

# ***Математическая статистика***

***Математическая статистика — наука о математических методах систематизации и использования статистических данных для решения научных и практических задач.***

Математическая статистика тесно примыкает к теории вероятностей и базируется на ее понятиях.

Однако главным в математической статистике является не распределение случайных величин, а анализ статистических данных и выяснение, какому распределению они соответствуют.

Предположим, что необходимо изучить множество объектов по какому-либо признаку.

Большая совокупность объектов для исследования, называется **генеральной совокупностью**.

Для генеральной совокупности можно определить **генеральную среднюю** — среднее арифметическое значение всех величин, составляющих эту совокупность.

Учитывая большой объем этой совокупности, можно полагать, что генеральная средняя равна математическому ожиданию.

$$\bar{x}_Г = M(X)$$

Рассеяние значений изучаемого признака генеральной совокупности от их генеральной средней оценивают ***генеральной дисперсией***, или ***генеральным средним квадратическим отклонением***.

Рассеяние значений изучаемого признака генеральной совокупности от их генеральной средней оценивают **генеральной дисперсией**, или **генеральным средним квадратическим отклонением**.

$$\bar{x}_\Gamma = M(X) = x_1 \frac{n_1}{N} + x_2 \frac{n_2}{N} + \dots + x_k \frac{n_k}{N},$$

$$D_\Gamma(X) = x_1^2 \frac{n_1}{N} + x_2^2 \frac{n_2}{N} + \dots + x_k^2 \frac{n_k}{N} - [\bar{x}_\Gamma]^2,$$

$$\sigma_\Gamma(x) = \sqrt{D_\Gamma(x)}$$

где  $N$  — объем генеральной совокупности.

Часто возникает ситуация, при которой изучить всю генеральную совокупность практически невозможно.

Тогда изучают не всю генеральную совокупность, а только ее часть и по полученным результатам делают вывод о всей генеральной совокупности и ее числовых характеристиках.

Множество объектов, отобранные из **генеральной совокупности**, называются **выборкой**, или **выборочной совокупностью**.

Свойство объектов выборки должно соответствовать свойству объектов генеральной совокупности, или, как принято говорить, выборка должна быть представительной (**репрезентативной**).

Для дальнейшего изучения значений случайной величины служат числовые характеристики выборки.

Эти характеристики вычисляются по статистическим данным, т.е. данным, полученным в результате наблюдений, поэтому их называют статистическими.

Основные характеристики, которые находятся в теории вероятности с помощью вероятности  $p$ , в статистике находятся с помощью **относительной частоты**  $w = \frac{n_i}{n}$  по тем же формулам.

Нам в лабораторной работе понадобятся:

математическое ожидание  $M(x)$ ,

дисперсия  $D(x)$  и

среднее квадратичное отклонение  $\sigma(x)$ .



Для дискретной случайной величины  $X$ , принимающей конечное число значений, законом распределения в теории вероятностей считается таблица.


Необходимые нам характеристики находятся по следующим формулам

$$M(x) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_k p_k,$$

$$D(x) = M(x^2) - [M(x)]^2 = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + \dots + x_k^2 p_k - [M(x)]^2,$$

$$\sigma(x) = \sqrt{D(x)}.$$

В статистике, представленные данные измерений составляют похожую таблицу (статистический закон распределения).


Здесь  $n_i$  показывает сколько раз встретилось в выборке значение  $x_i$ ,

а  $N$  дает общее количество данных – объем выборки.

Для выборки в качестве основных характеристик выступают:

выборочное среднее  $\bar{x}_B$  (аналог математического ожидания),  
выборочная дисперсия  $D_B(x)$  (аналог дисперсии) и  
выборочное среднее квадратичное отклонение

$$\sigma_B(x) = \sqrt{D_B(x)}.$$

Находятся они по тем же формулам, что и их аналоги, но, как мы уже упоминали, вероятность меняется на ее приближенное значение – относительную частоту.

$$\bar{x}_B = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \dots + x_k \frac{n_k}{n},$$

$$D_B(x) = x_1^2 \frac{n_1}{n} + x_2^2 \frac{n_2}{n} + \dots + x_k^2 \frac{n_k}{n} - [\bar{x}_B]^2,$$

$$\sigma_B(x) = \sqrt{D_B(x)}.$$

Указанные характеристики дают хорошее приближение для математического ожидания и дисперсии изучаемой случайной величины.

Однако **дисперсия** имеет небольшую, но постоянную ошибку (говорят является смещенной оценкой).

Чтобы этого избежать, используют следующие исправленные оценки

$$D_x = \frac{n}{n-1} D_B;$$

$$s_x = \sqrt{D_{И}}.$$

Эти формулы называют точечными оценками числовых характеристик.

## ***Задания к лабораторной работе***

В лесу проведена рубка деревьев на пробном участке и проведены измерения диаметра при основании ( $X$  см) и длины этих деревьев ( $Y$  м).

Приводятся результаты 100 измерений двумерной случайной величины  $(X; Y)$ .

I) Для каждой из двух случайных величин  $X$  и  $Y$  провести статистический анализ:

Построить интервальные и вариационные ряды;

Построить гистограмму и полигон относительных частот;

***Найти числовые характеристики выборки;***

Проверить с помощью критерия Пирсона гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при  $\alpha = 0,05$ ;

Построить гистограмму и выровненную нормальную кривую;

Найти интервальные оценки нормального распределения.

II) Для двумерной случайной величины  $(X; Y)$  провести корреляционный анализ:

Составить интервальную и вариационную корреляционные таблицы;

Найти коэффициент корреляции  $r_B$ ;

Найти функции регрессии  $X$  на  $Y$  и  $Y$  на  $X$ ;

Построить корреляционное поле и графики функций регрессии.

Пусть мы имеем следующий набор данных.

Отметим, что

величина  $x$  представляет измерения диаметра древесного ствола у случайно выбранных деревьев, а

величина  $y$  измерения высоты того же дерева в метрах.

x	y	x	y	x	y	x	y	x	y
31,4	7,64	37,6	8,42	37,7	8,84	38	8,94	32,6	6,83
18,3	3,68	29,8	7,20	21,9	5,37	29,1	6,16	25,5	5,75
33,7	7,90	32,7	7,23	34	8,76	31,5	6,56	35,8	9,61
28,9	7,46	27,5	5,46	29,9	5,71	22,6	6,36	27,7	6,04
36,9	8,78	35,9	10,32	33	9,31	36,1	9,74	30,3	6,36
29,1	5,90	18,6	4,22	18,7	4,79	29,9	7,69	16,9	2,19
30	7,40	44	10,00	38,7	10,97	33,7	8,12	37,7	10,18
26,2	7,06	21,2	5,59	20,4	3,62	26,2	5,12	28	7,87
35,1	7,76	33,2	8,41	34,2	9,18	34,2	9,91	30,4	5,85
21,3	6,04	20,8	4,38	29,9	8,58	26,3	6,82	27,5	6,93
30,2	7,31	43,8	11,40	31,4	6,89	36,1	8,27	31	8,33
26,2	5,55	17	4,25	18,2	3,01	27,9	6,79	19,2	3,43
30	7,55	34,7	9,77	32,5	7,70	30	7,59	31,1	7,00
28,7	5,28	21,8	4,22	27,9	5,88	23,7	4,91	20,9	3,09
34,3	7,08	33,6	8,21	30,7	8,31	39,2	10,87	33,4	8,34
29	7,45	21,3	6,27	26,7	5,46	21,3	5,89	27,3	6,72
40,3	11,0	33,6	8,21	31,9	7,84	33,3	7,65	30,8	6,15
14,2	3,08	13	1,32	24,5	4,06	27,2	4,90	28,8	6,04
40,6	10,7	42,7	10,78	31,8	7,54	33,2	7,78	35	8,52
24,6	6,73	21	4,26	23,3	4,48	28,7	8,10	26,3	6,43



Данные измерений очевидно содержат ошибки.

Сюда входят как ошибки измеряющих, так и вытекающие из ограниченной точности приборов, используемых для измерений.

Мы разбиваем имеющиеся данные на несколько интервалов и на каждом интервале усредняем имеющиеся значения.

Это позволяет частично сгладить возможные ошибки. Процесс усреднения заключается в том, что мы рассматриваем сколько данных попало на интервал, но конкретные данные заменяем на их среднее.

Для определения оптимальной длины интервала используем формулу Стерджесса

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3.32Lg(n)}$$

где  $x_{max}$  ,  $x_{min}$  – соответственно максимальное и минимальное значения выборки (представленных данных), а  $n$  объем выборки (общее количество данных).

В нашем случае  $n = 100$  и  $h \cong 4,1$ .

Минимальное значение  $x$  равно 13, прибавляем  $h \cong 4,1$ , получаем первый интервал (13; 17,1).

В нашей выборке четыре данных попадают в этот интервал. Продолжая процесс, получаем следующую таблицу (*интервальная таблица распределения частот*).

	4	10	10	22	27	17	7	3

Завершая усреднение, выберем представителем каждого интервала его середину

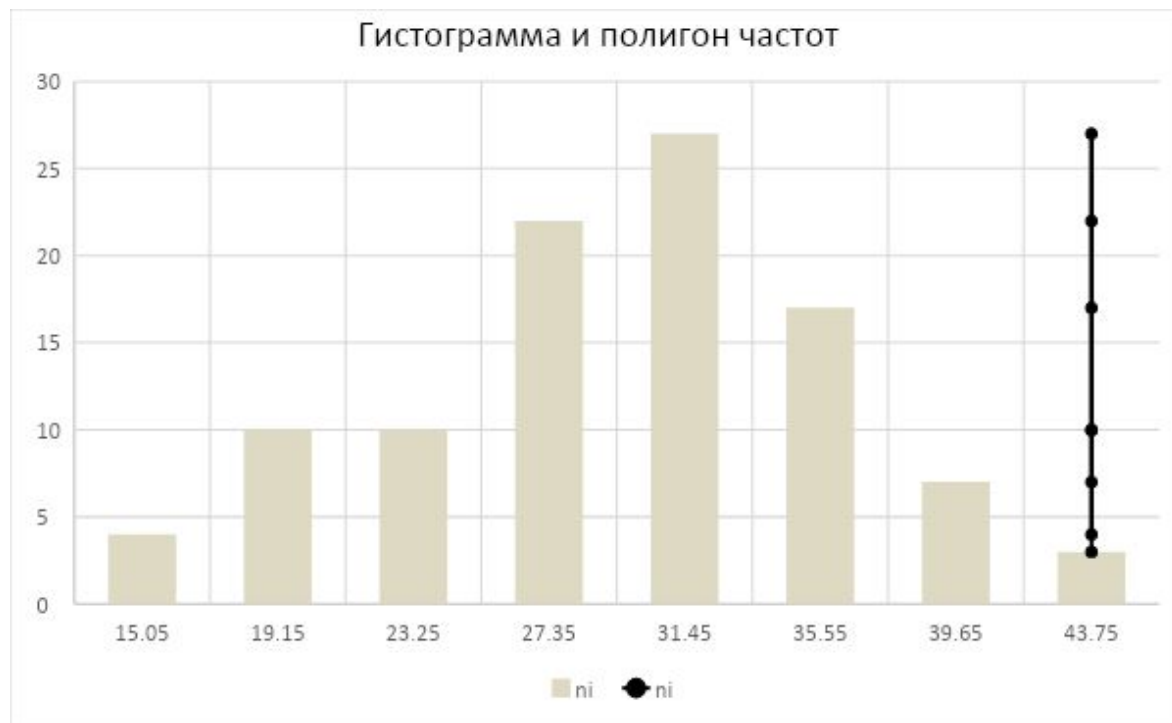
$$x_i' = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$$

и будем считать, что она встретилась столько раз, сколько данных попало на данный интервал.

В результате получим следующий статистический закон распределения (*дискретная таблица распределения частот*)

	15,05	19,15	23,25	27,35	31,45	35,55	39,65	43,75
	4	10	10	22	27	17	7	3

По интервальной таблице распределения частот построим гистограмму и полигон частот.



Вычисление основных характеристик выборки.

Чтобы завершить предварительную обработку данных, по формулам, указанным выше, найдем точечные оценки числовых характеристик

$$\bar{x}_B = x_1 \frac{n_1}{n} + x_2 \frac{n_2}{n} + \dots + x_k \frac{n_k}{n} = 15,05 \frac{4}{100} + 19,15 \frac{10}{100} + \dots \\ \cong 29,48,$$

$$D_B = x_1^2 \frac{n_1}{n} + x_2^2 \frac{n_2}{n} + \dots + x_k^2 \frac{n_k}{n} - [\bar{x}_B]^2 \cong 44,54,$$

$$\sigma_B(x) = \sqrt{D_B(x)} \cong 6,67,$$

$$D_x = \frac{n}{n-1} D_B = \frac{100}{99} \cdot 44,54 = 44,98;$$

$$s_x = \sqrt{D_B} = \sqrt{44,98} = 6,71$$

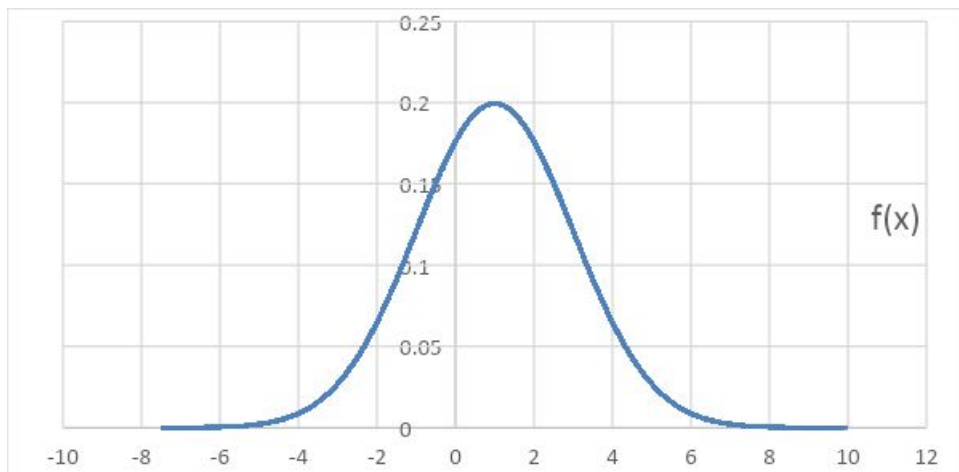
Проверка гипотезы о нормальном распределении.

Закон распределения непрерывной случайной величины называется нормальным, если функция плотности задается формулой

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Причем параметр  **$a$**  является математическим ожиданием случайной величины, а параметр  **$\sigma$**  средним квадратичным отклонением. График функции плотности имеет следующий вид.

Здесь  **$a = 1$**  и  **$\sigma = 2$**



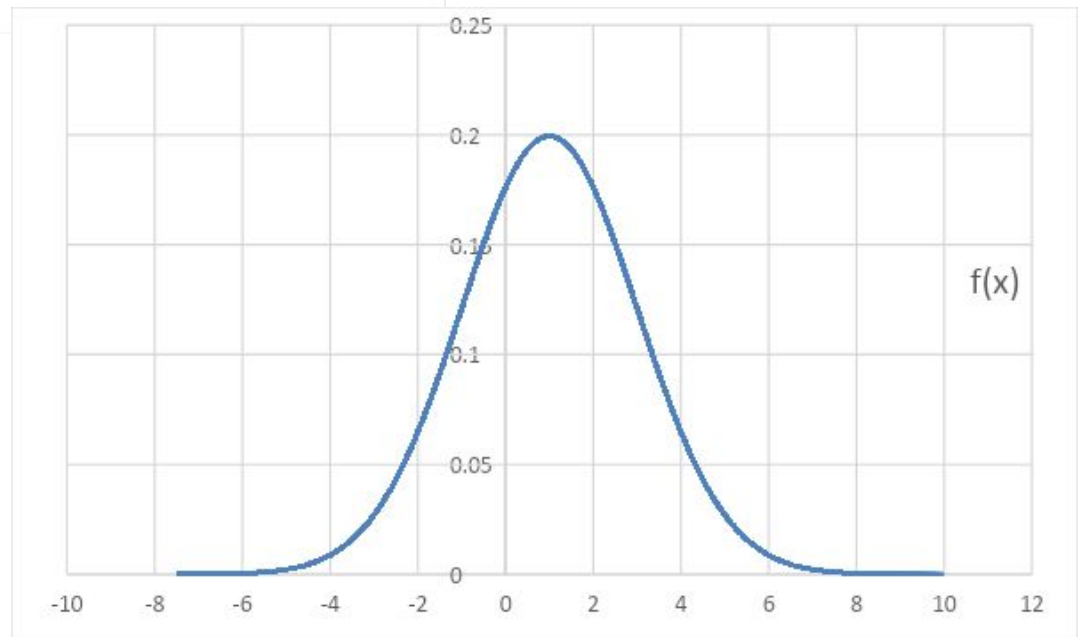
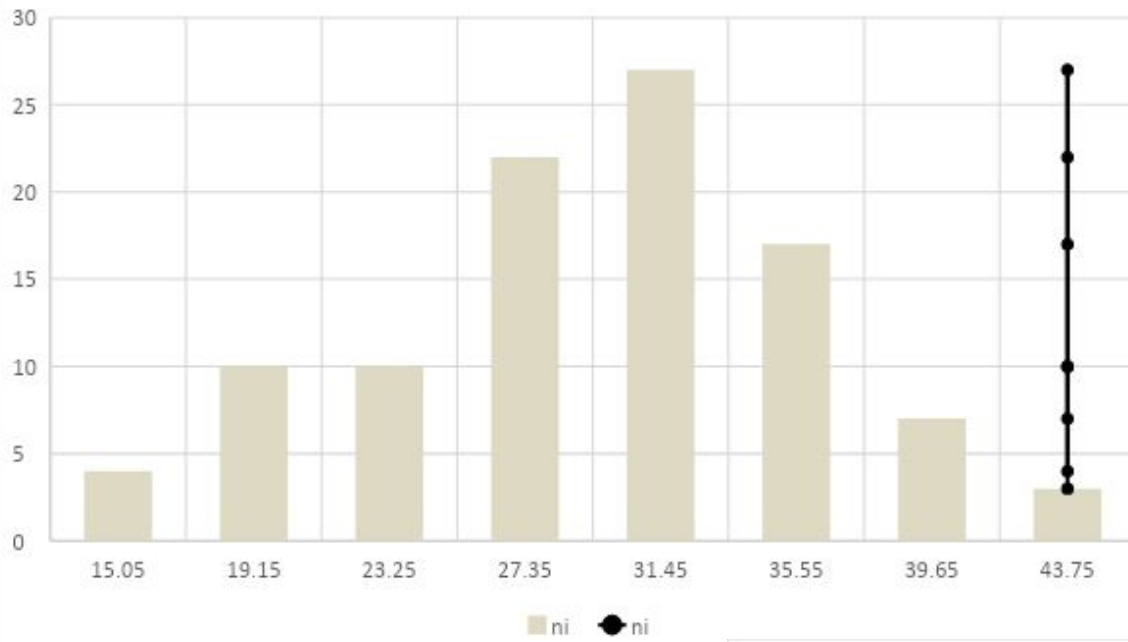
По интервальной таблице распределения частот мы построили гистограмму и полигон частот.

Если получившаяся конструкция похожа на «шапочку» как у графика плотности нормального закона мы выдвинем гипотезу о нормальном законе изучаемой случайной величины и, в дальнейшем, проверим это.

Если не похожа, то мы, используя рассмотренный далее критерий, убедимся в необоснованности предположения о нормальном распределении.



Гистограмма и полигон частот



Выдвигаем гипотезу о нормальном распределении изучаемой случайной величины. Причем параметры  $\mu$  и  $\sigma$  считаем равными

$$\mu = \bar{x}_B, \quad \sigma = S_x.$$

Функция плотности нормального распределения, соответственно, задается следующей формулой

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{S_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x}_B)^2}{2S_x^2}} = \\ &= \frac{1}{6,7 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-29,48)^2}{89,98}}. \end{aligned}$$

Используя функцию плотности, задающую предполагаемый закон распределения, мы можем найти теоретические частоты, то есть сколько должно появляться данных на каждом интервале, если закон распределения задается принятой нами формулой.

Теоретические частоты  $n_i'$  находятся для каждого интервала по следующей формуле.

$$n_i' = \frac{nh}{s_x} \cdot \varphi\left(\frac{x_i - \bar{x}_B}{s_x}\right),$$

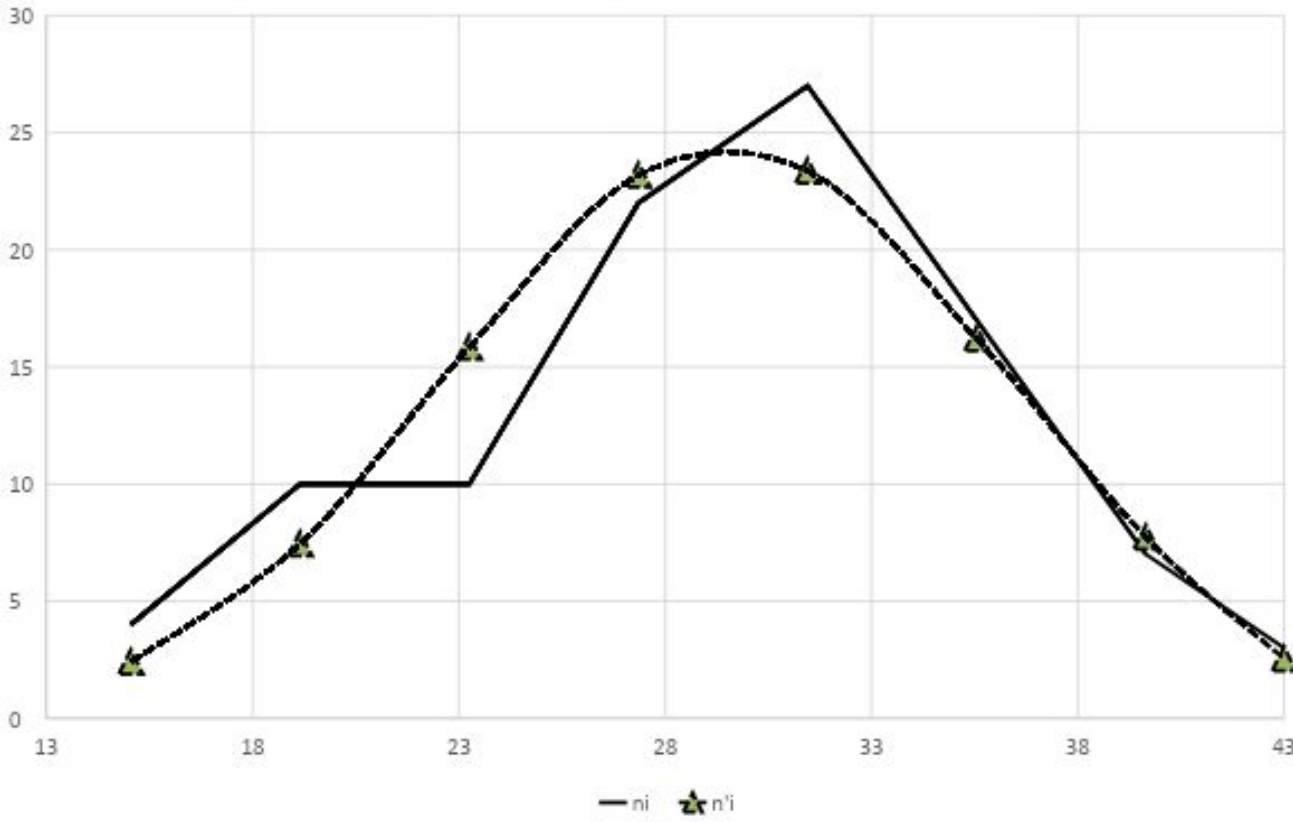
где

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

После подсчетов получаем таблицу.

	15,05	19,15	23,25	27,35	31,45	35,55	39,65	43,75
	4	10	10	22	27	17	7	3
	2,41	7,44	15,84	23,18	23,36	16,2	7,73	2,54

Диаграмма наблюдаемых и теоретических частот



Проверка гипотезы о нормальном распределении будет проводиться с помощью критерия Пирсона.

Этот метод оценивает суммарную погрешность между наблюдаемыми частотами  $n_i$  и теоретическими частотами  $n_i'$ .

Если суммарная погрешность больше критического значения, то гипотеза отвергается. В ином случае, гипотеза принимается.

Точная формула по которой находится значение критерия Пирсона.

$$X^2_{\text{набл.}} = \sum_{i=1}^{i=8} \frac{(n_i - n_i')^2}{n_i'}$$

Результаты вычислений удобно представлять в виде таблицы.

	15,05	19,15	23,25	27,35	31,45	35,55	39,65	43,75
	4	10	10	22	27	17	7	3
	2,41	7,44	15,84	23,18	23,36	16,2	7,73	2,54

i					
1	4	2,409019	1,590981	2,531221	1,050727
2	10	7,445548	2,554452	6,525225	0,876393
3	10	15,83736	-5,83736	34,07477	2,151544
4	22	23,18454	-1,18454	1,403144	0,060521
5	27	23,35845	3,641553	13,26091	0,567714
6	17	16,19642	0,803581	0,645742	0,039869
7	7	7,729007	-0,72901	0,531451	0,068761
8	3	2,538388	0,461612	0,213085	0,083945
		98,69873			

Критическое значение критерия  $\chi^2_{\text{кр}}$  находится из таблицы с таким же названием и зависит от двух параметров.

Первый параметр  $s$  называется «число степеней свободы» и находится из равенства  $s = k - 3$ , где  $k$  это количество рассматриваемых интервалов. В нашем случае  $k = 8$  и  $s = 5$ .



Второй параметр  $\alpha$  называется уровень значимости (или критерий значимости). Этот параметр показывает вероятность отвергнуть правильную гипотезу.

По условию задачи: Проверить с помощью критерия Пирсона гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности при  $\alpha = 0,05$ .

Для заданных параметров

$$X^2_{\text{кр.}} = 11,1.$$

Так как  $X^2_{\text{набл.}} = 4,899 < X^2_{\text{кр.}} = 11,1$ ,

то у нас нет оснований отвергнуть гипотезу.

Гипотеза принимается.

# Отыскание интервальных оценок параметров нормального распределения.

Найдём интервальные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения генеральной совокупности  $X$ .

Для математического ожидания

$$\bar{x}_e - t_\gamma \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_e + t_\gamma \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}}$$

где  $n$ —объём выборки,

$\bar{x}_e$  —выборочное среднее,

$S_x$  —исправленное среднее квадратическое отклонение.

$t_\gamma$  — находится по заданной надёжности  $\alpha$  (доверительной вероятности) и объёму выборки  $n$  по приложению 3 (см. Гмурман В.Е.). Приняв за надёжность 0,95 (в соответствии с заданием  $\gamma = 1 - \alpha$ ),  $n = 100$ , получаем: 1,984.

Тогда  $28.15 < a < 30.81$

## **Сделаем окончательный вывод.**

Проведенные исследования показали, что генеральная совокупность случайной величины  $x$ , выражающей диаметры ствола деревьев изучаемого лесного массива из которой взята выборка, распределена по нормальному закону, плотность вероятности которого

$$f(x) = \frac{1}{6,7 \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-29,48)^2}{89,98}}.$$

Среднее значение диаметра ствола деревьев у основания составляет 29,48 сантиметра, причем с вероятностью 0,95 оно лежит в интервале (28,15 ; 30,81),

Среднее отклонение  $s_x = 6,7$  сантиметра.

В основном (68%) значения диаметра ствола деревьев лежат в интервале (22,78 ; 36,18) сантиметра.



# КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ АНАЛИЗ

Вернемся к исходным данным - двумерной случайной величине (X;Y).

x	y	x	y	x	y	x	y
31,4	7,64	37,6	8,42	37,7	8,84	38	8,94
18,3	3,68	29,8	7,20	21,9	5,37	29,1	6,16
33,7	7,90	32,7	7,23	34	8,76	31,5	6,56
28,9	7,46	27,5	5,46	29,9	5,71	22,6	6,36
36,9	8,78	35,9	10,32	33	9,31	36,1	9,74
29,1	5,90	18,6	4,22	18,7	4,79	29,9	7,69
30	7,40	44	10,00	38,7	10,97	33,7	8,12
26,2	7,06	21,2	5,59	20,4	3,62	26,2	5,12
35,1	7,76	33,2	8,41	34,2	9,18	34,2	9,91
21,3	6,04	20,8	4,38	29,9	8,58	26,3	6,82
30,2	7,31	43,8	11,40	31,4	6,89	36,1	8,27
26,2	5,55	17	4,25	18,2	3,01	27,9	6,79
30	7,55	34,7	9,77	32,5	7,70	30	7,59
28,7	5,28	21,8	4,22	27,9	5,88	23,7	4,91
34,3	7,08	33,6	8,21	30,7	8,31	39,2	10,87
29	7,45	21,3	6,27	26,7	5,46	21,3	5,89
40,3	11,09	33,6	8,21	31,9	7,84	33,3	7,65
14,2	3,08	13	1,32	24,5	4,06	27,2	4,90
40,6	10,76	42,7	10,78	31,8	7,54	33,2	7,78
24,6	6,73	21	4,26	23,3	4,48	28,7	8,10
27,3	6,72	31	8,33	16,9	2,19	32,6	6,83
30,8	6,15	19,2	3,43	37,7	10,18	25,5	5,75
28,8	6,04	31,1	7,00	28	7,87	35,8	9,61
35	8,52	20,9	3,09	30,4	5,85	27,7	6,04
26,3	6,43	33,4	8,34	27,5	6,93	30,3	6,36

Для каждой из двух случайных величин **X** и **Y** отдельно мы построили интервальные и вариационные ряды, нашли числовые характеристики.

Х. инт.	13-17	17-21	21-25	25-29	29-33	33-37	37-41	41-45
Ni	3	9	12	19	25	21	8	3

Х ср	15	19	23	27	31	35	39	43
Ni	3	9	12	19	25	21	8	3

$$\bar{x}_B \cong 29,56, \quad D_x = 42,51; \quad s_x = 6,52$$

Y инт.	1,32-2,62	2,62-3,92	3,92-5,22	5,22-6,52	6,52-7,82	7,82-9,12	9,12-10,42	10,42-11,72
Ni	2	6	11	21	26	19	9	6

Y ср	1,97	3,27	4,57	5,87	7,17	8,47	9,77	11,07
Ni	2	6	11	21	26	19	9	6

$$\bar{y}_B \cong 6,99, \quad D_x = \frac{n}{n-1} D_B = 4,40, \quad s_y = \sqrt{D_B} = 2,1$$

Построим ***интервальную корреляционную таблицу***.

По горизонтали отложим интервалы  $X$ , а по вертикали по  $Y$ . В ячейки таблицы запишем количество пар  $(X; Y)$ , для которых  $X$  попадает в интервал  $(X_i; X_{i+1})$ , а  $Y$  в интервал  $(Y_j; Y_{j+1})$ .

Например, первая пара  $(31,4; 7,64)$  по  $X$  попадает в интервал  $(29; 33)$ , а по  $Y$  в интервал  $(6,52; 7,82)$ .

Для контроля просуммируем строки и столбцы. Должны получиться интервальные ряды для каждой из двух случайных величин  $X$  и  $Y$  отдельно.



Получаем интервальную корреляционную таблицу.

Y\X	13-17	17-21	21-25	25-29	29-33	33-37	37-41	41-45	
1,32-2,62	2								2
2,62-3,92	1	5							6
3,92-5,22		4	5	2					11
5,22-6,52			6	9	6				21
6,52-7,82			1	6	16	3			26
7,82-9,12				2	3	12	2		19
9,12-10,42						6	2	1	9
10,42-11,72							4	2	6
	3	9	12	19	25	21	8	3	100

Заменяя интервалы на их середины, получим вариационную корреляционную таблицу.

$Y \backslash X$	15	19	23	27	31	35	39	43	
1,97	2								2
3,27	1	5							6
4,57		4	5	2					11
5,87			6	9	6				21
7,17			1	6	16	3			26
8,47				2	3	12	2		19
9,77						6	2	1	9
11,07							4	2	6
	3	9	12	19	25	21	8	3	100

Рассчитываем показатель тесноты связи между случайными величинами  $X$  и  $Y$ . Таким показателем является выборочный линейный коэффициент корреляции, который рассчитывается по формуле:

$$r_B = \frac{\sum n_{ij} \cdot x_i \cdot y_j - n \cdot \bar{x}_B \cdot \bar{y}_B}{n \cdot s_x \cdot s_y}$$

где  $n_{ij}$  – количество пар, попавших, в ячейку с координатами  $(x_i; y_j)$  в вариационной корреляционной таблице.

В нашем примере

$$\sum n_{ij} \cdot x_i \cdot y_j = 2 \cdot 15 \cdot 1,97 + 1 \cdot 15 \cdot 3,27 + \dots + 2 \cdot 43 \cdot 11,07 = 21878,32$$

$$r_B = \frac{21878,32 - 100 \cdot 29,56 \cdot 6,99}{100 \cdot 6,52 \cdot 2,1} = 0,89$$

Линейный коэффициент корреляции принимает значения от  $-1$  до  $+1$ .

Связи между признаками могут быть слабыми и сильными (тесными). Их критерии оцениваются по [шкале Чеддока](#):

$0.1 < r_B < 0.3$ : слабая;

$0.3 < r_B < 0.5$ : умеренная;

$0.5 < r_B < 0.7$ : заметная;

$0.7 < r_B < 0.9$ : высокая;

$0.9 < r_B < 1$ : весьма высокая.

Если  $|r_B|$  близок к единице, то зависимость мало отличается от линейной. В этом случае связь между величинами достаточно точно описывается линейной функцией.

В нашем примере  $r_B = 0,89$ , поэтому связь между признаком  $Y$  и фактором  $X$  высокая и в качестве уравнения регрессии (зависимости), мы можем рассматривать линейную функцию.

Уравнение линейной регрессии  $Y$  на  $X$  имеет вид

$$y = \bar{y}_B + r_B \frac{s_y}{s_x} (x - \bar{x}_B)$$

$$y = 6,99 + 0,89 \frac{2,1}{6,52} (x - 29,56) = 0,59x - 1,48$$

$$y = 0,59x - 1,48$$

Уравнение линейной регрессии  $X$  на  $Y$  имеет вид

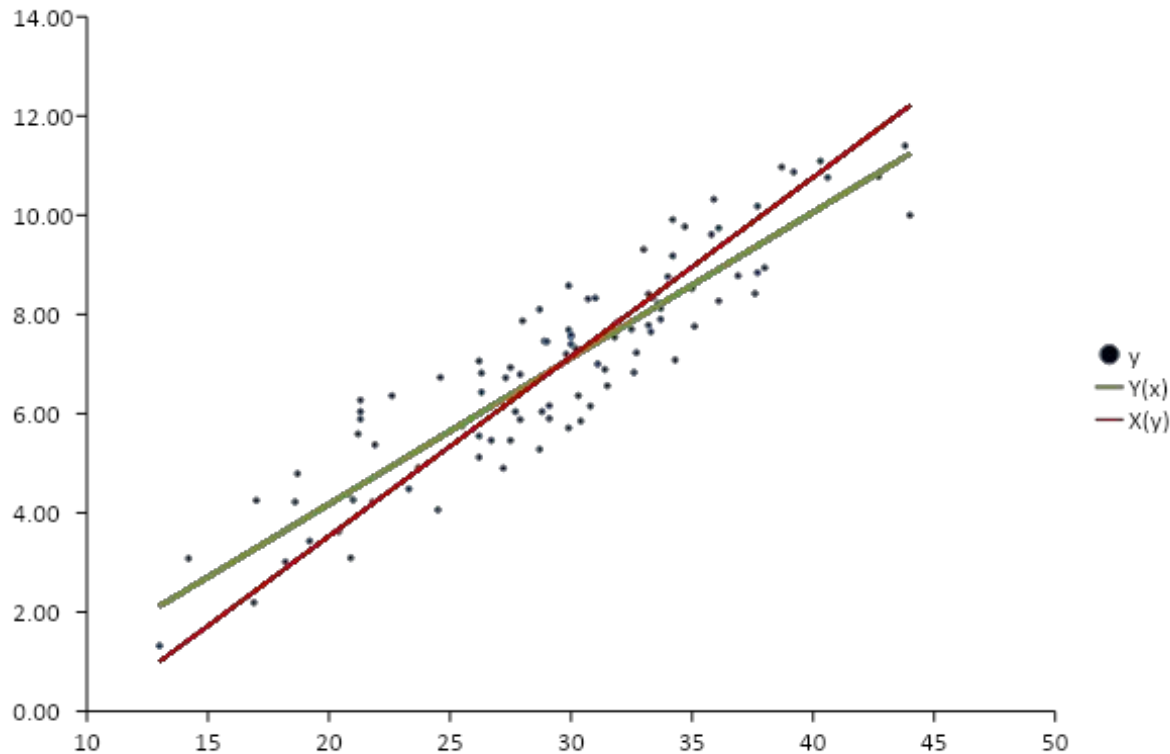
$$x = \bar{x}_B + r_B \frac{s_x}{s_y} (y - \bar{y}_B)$$

$$y = 29,56 + 0,89 \frac{6,52}{2,1} (x - 6,99) = 2,76x + 10,24$$

$$y = 2,76x + 10,24$$

На одних осях координат построим три графика:

- 1) корреляционное поле (пары  $(X;Y)$  указанные в задании) – на графике изображаются точками,
- 2) график линейной регрессии  $Y$  на  $X$  – прямая  $Y(x)$ ,
- 3) график линейной регрессии  $X$  на  $Y$ – прямая  $X(y)$ .





## Вывод.

Длина ствола дерева  $Y$  и диаметр основания  $X$  зависят между собой линейно ( $y = ax + b$ ) и связь между величинами  $X$  и  $Y$  высокая (результаты измерений лежат в узкой полосе вокруг прямой).

В среднем, длина ствола дерева  $Y$ (м) вычисляется через диаметр основания  $X$ (см) по формуле

$$y = 0,59x - 1,48,$$

а диаметр основания  $X$ (см) вычисляется через длину ствола дерева  $Y$ (м) по формуле

$$y = 2,76x + 10,24.$$



