ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ И БАЙЕСА

ЗАДАЧИ

Задача 1. В урне 5 красных и 8 белых шаров. Из урны последовательно без возвращения вынимают два шара. Найти вероятность того, что: а) оба шара белые; б) оба шара красные; в) первый шар белый, а второй красный; г) шары разного цвета.

Задача 2. В лотерее выпущено 10000 билетов и установлены 10 выигрышей по 1000 рублей, 100 – по 500 рублей, 500 – по 100 рублей и 1000 выигрышей по 25 рублей. Гражданин купил 1 билет. Какова вероятность того, что он выиграет не меньше 100 рублей?

ЗАДАЧИ

Задача 3. Студент знает ответы на 20 вопросов из 25. Экзаменатор последовательно задает студенту три вопроса. Найти вероятность того, что студент: а) ответит на все вопросы; б) не ответит ни на один вопрос; в) ответит на первый и второй вопросы, но не ответит на третий вопрос; г) ответит только на один вопрос.

Задача 4. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна p, для второго – 0,7. Вероятность ровно одного попадания при одном выстреле обоих стрелков равна 0,38. Найти p.

ЗАДАЧИ

Задача 5. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

Задача 6. В мешке содержится десять одинаковых кубиков с номерами от 1 до 10. Наудачу извлекают по одному три кубика. Найти вероятность того, что последовательно появятся кубики с номерами 1, 2, 3, если кубики извлекаются: а) без возвращения; б) с возвращением (извлеченный кубик возвращается в мешок).

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Следствием основных теорем вероятностей – теорем сложения и умножения вероятностей – является формула полной вероятностей.

Постановка задачи.

Допустим событие А может наступает при появления одного из несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$. Эти события образуют полную группу. Такие события B_i называются **гипотезами.**

Также даны вероятности этих событий и условные вероятности

$$P_{B_1}(A),\ \ P_{B_2}(A),...,P_{B_n}(A)$$

события А. Для нахождения вероятности события А можно воспользоваться следующей теоремой.

Теорема (*формула полной вероятности*)

Пусть несовместные события $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образуют полную группу. Тогда вероятность события А, которое может наступить только при условии появления одного из этих несовместных событий равняется сумме произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующую условную вероятность события А:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots$$
$$\ldots + P(B_n)P_{B_n}(A),$$

где $P(B_1)$- вероятность события B_1 ;

$P(B_2)$ - вероятность события B_2 ;

$P(B_i)$ - вероятность

события B_i ;

$P_{B_i}(A)-$ условная вероятность события А при условии, что произошло событие B_i .

Эту формулу называют

« формулой полной вероятности».

Пример. В магазин поступает изделия с двух фабрик, причем 40% из них изготовлены фабрикой №1, а остальные – фабрикой №2. Фабрика №1 дает 90% изделий первого сорта, а фабрикой №2 75%. Какова вероятность того, что купленное наудачу изделие окажется первого сорта?

Решение. Рассмотрим события:

А изделие, купленное наудачу, первого сорта;

B_1- изделие произведено на фабрике №1;

Так как событие А может состояться лишь при условии выполнения одной из гипотез B_1 или B_2, то по формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A).$$

Найдем вероятности гипотез, входящие в эту формулу. Так как на каждые 100 поступивших в магазин изделий 40 изготовлено фабрикой №1 (40%), а остальные 60 – фабрикой №2, то

$P(B_1)=40/100=0,4$;

$P(B_2)=60/100=0,6$

По условию задачи

$$P_{B_1}(A) = 0{,}9;$$

$$P_{B_2}(A) = 0{,}75;$$

Подставляя найденные вероятности в формулу (**), получим:

$P(A)=0{,}4\cdot 0{,}9+0{,}6\cdot 0{,}75=0{,}81$

Вывод формулы Байеса . Примеры.

Задача. Имеется полная группа несовместных гипотез $B_1, B_2, \ldots, B_n$, вероятность которых $P(B_i)$ $(i=1,2,\ldots,n)$ известных до опыта (вероятности априори). Производится опыт (испытание), в результате которого зарегистрировано появление события A, причем известно, что этому событию наши гипотезы приписывали определенные вероятности

$$P_i(A) \qquad (i = 1, 2, ..., n).$$

Тогда вероятность появления события А равна:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A).$$

Найдем условные вероятности

$$P_A(B_1),\ P_A(B_2), ..., P_A(B_n).$$

В соответствии с теоремой умножения условная вероятность $P_A(B_1)$ равна:

Тогда $P(AB_1) = P(A)P_A(B_1) = P(B_1)P_{B_1}(A),$

После преобразований получим

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)}.$$

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Эти формулы носят название формул Байеса, благодаря которым можно оценить вероятности гипотез после того, как становится известным результат испытания, в результате которого появилось событие А.

Пример. В цехе работают 20 станков, изготавливающих одинаковые детали. Из них 10 станков- 1-го типа, 6станков – 2-го типа, а остальные – 3-го типа.

Вероятности того, что качество детали окажется отличным на станках этих типов, равны соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Производительность всех типов станков одинакова.

Условная вероятность любой гипотезы B_i (i=1,2,3,…,n) рассчитывается следующим образом:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i)P_{B_i}(A)}{P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + \ldots + P(B_n)P_{B_n}(A)}.$$

Какова вероятность, что наугад взятая деталь, изготовленная в цехе, окажется отличного качества?

Наугад взятая деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность , что она была изготовлена на станке 1-го типа?

Решение.

Обозначим события:

А- наугад взятая деталь отличного качества;

B_1 - наугад взятая деталь изготовлена на станке 1-го типа;

B_2 - наугад взятая деталь изготовлена на станке 2-го типа;

B_3 - наугад взятая деталь изготовлена на станке 3 -го типа;

Так как производительность всех типов станков одинакова, то количество деталей, изготовленных на станках данного типа, пропорционально количеству станков. Поэтому

$P(B_1)=10/20=0,5;$

$P(B_2)=6/20=0,3;$

$P(B_3)=4/20=0,2$

Вероятности $p_{B_i}(A)$ даны в условии задачи:

$$P_{B_1}(A) = 0{,}9;$$

$$P_{B_2}(A) = 0{,}8;$$

$$P_{B_3}(A) = 0{,}7.$$

1. По формуле полной вероятности

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + P(B_3)P_{B_3}(A) =$$
$$= 0{,}5 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}83;$$

2. По формуле Байеса получим ответ на второй вопрос

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1)P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,5 \cdot 0,9}{0,83} = 0,54.$$

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

Задача 1. Имеются три одинаковые урны. В первой урне находятся 4 белых и 7 черных шаров, во второй – только белые и в третьей – только черные шары. Наудачу выбирается одна урна и из неё наугад извлекается шар. Какова вероятность того, что этот шар чёрный?

Задача 2. В тире имеются 5 различных по точности боя винтовок. Вероятности попада ния в мишень для данного стрелка соответственно равны 0,5; 0,55; 0,7; 0,75 и 0,4. Чему равна вероятность попадания в мишень, если стрелок делает один выстрел из слу чайно выбранной винтовки?

Задача 3. На склад поступило 2 партии изделий: первая – 4000 штук, вторая – 6000 штук. Средний процент нестандартных изделий в первой партии составляет 20%, а во второй – 10%. Наудачу взятое со склада изделие оказалось стандартным. Найти вероятность того, что оно: а) из первой партии, б) из второй партии.