ВЕКТОРЫ

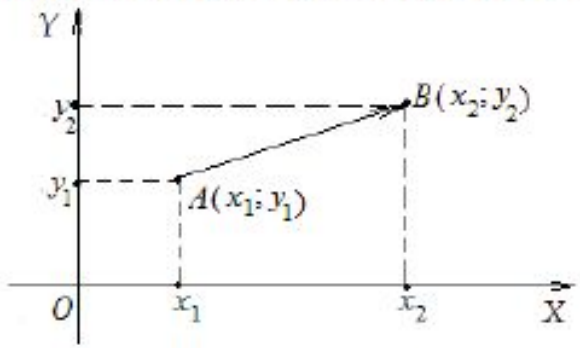
Векторы на плоскости и в пространстве

1. Основные определения

Пусть

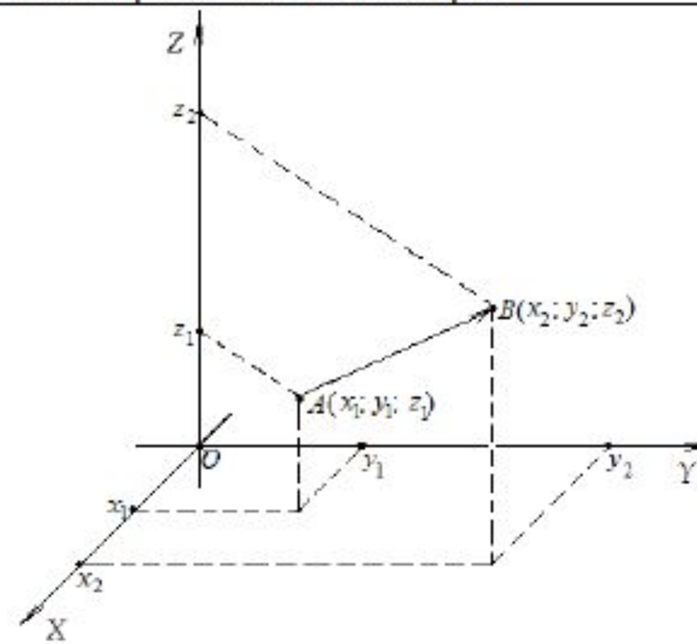
на плоскости *XOY* точки имеют координаты $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$,	в пространстве *XOYZ* точки имеют координаты $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$,

вектором $\overrightarrow{AB}$ (*геометрическим вектором*) называется *направленный отрезок* прямой с началом в точке *A*, концом в точке *B* и направлением от первой точки ко второй



координаты вектора $\overrightarrow{AB}=(x;y)$, где

$$\begin{cases} x = x_2 - x_1; \\ y = y_2 - y_1. \end{cases}$$



координаты вектора $\overrightarrow{AB}=(x;y;z)$, где

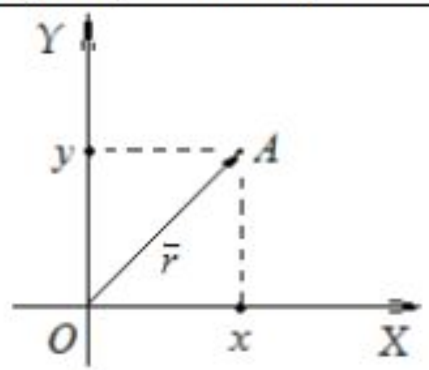
$$\begin{cases} x = x_2 - x_1; \\ y = y_2 - y_1; \\ z = z_2 - z_1. \end{cases}$$

Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ — расстояние между его начальной точкой *A* и конечной точкой *B*, т.е.

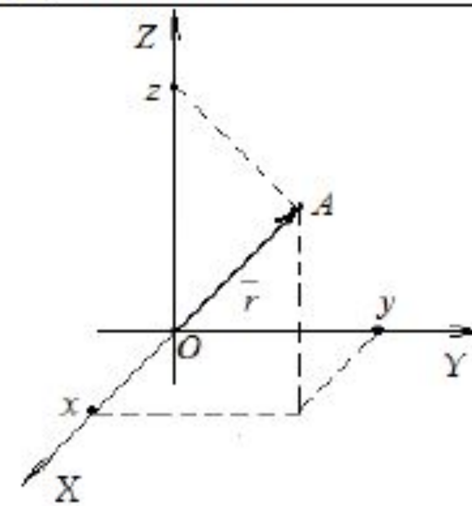
$\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \sqrt{x^2+y^2}$	$\left\lvert\overrightarrow{AB}\right\rvert = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$

Вектор у которого начало и конец совпадают называется *нулевым вектором* $\vec{0}$, длина нулевого вектора равна нулю, а направление произвольно.

▼ Вектор $\overrightarrow{OA}$, начало которого находится в начале координат, а конец — в точке A, называют *радиус-вектором* точки A и обозначают $\vec{r}(A)$ или $\vec{a}$. ▲



координаты радиус-вектора: $\vec{a}=(x;y)$



координаты радиус-вектора: $\vec{a}=(x;y;z)$

Длина радиус-вектора $\vec{a}$ определяется по формулам:

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$$

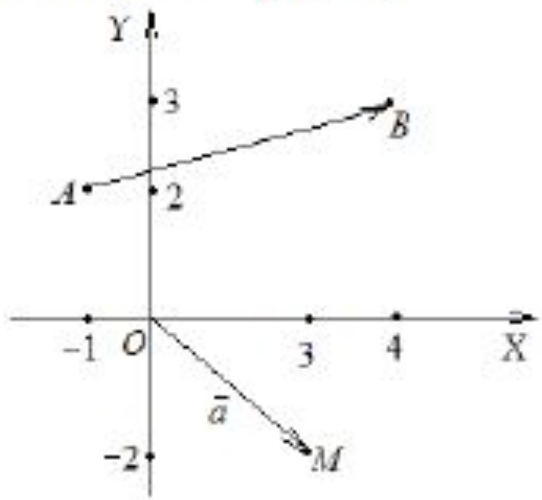
$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

▼ *Векторы* называются *равными*, если они имеют одинаковую длину и направление.

Построить векторы: $\overrightarrow{AB}$ если $A(-1;-2)$ и $B(4;3)$; $\vec{a}=(3;-2)$.

► В декартовой системе координат XOY строим точки $A(-1;-2)$ и $B(4;3)$, точка A — начало вектора, точка B — конец вектора $\overrightarrow{AB}$.

В декартовой системе координат XOY строим точку $M(3;-2)$, вектор $\overrightarrow{OM}$ — искомый радиус-вектор $\vec{a}=(3;-2)$.



◄

▼ *Единичным вектором* (*ортом*) называется вектор, имеющий при выбранном масштабе длину, равную единице, т.е. если вектор задан своими координатами

$\vec{a}=(x;y)$	$\vec{a}=(x;y;z)$

тогда

$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}};\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$	$\vec{a}^0=\frac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}};\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$ ▲

Найти орт вектора $\overrightarrow{AB}=(4;-10;1)$.

► $\overrightarrow{AB}^0=\frac{\overrightarrow{AB}}{\lvert\overrightarrow{AB}\rvert}=\pm\frac{(4;-10;1)}{\sqrt{16+100+1}}=\pm\left(\frac{4}{\sqrt{117}};-\frac{10}{\sqrt{117}};\frac{1}{\sqrt{117}}\right)$. ◄

Зная орт вектора можно найти координаты искомого вектора:

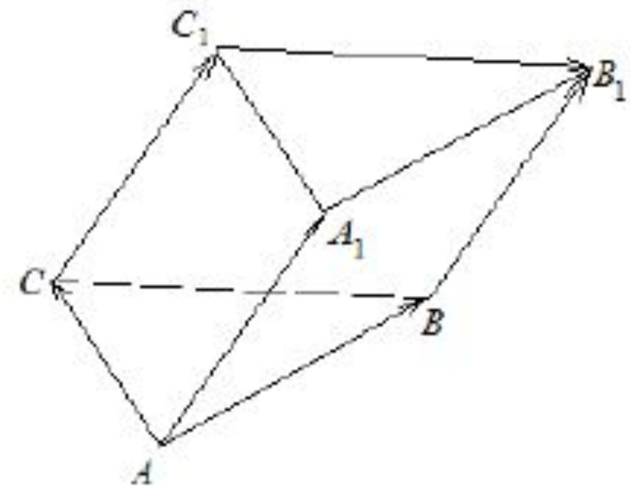
$\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\vec{a}^0=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\left(\frac{x}{\lvert\vec{a}\rvert};\frac{y}{\lvert\vec{a}\rvert}\right)$	$\vec{a}=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\vec{a}^0=\lvert\vec{a}\rvert\cdot\left(\frac{x}{\lvert\vec{a}\rvert};\frac{y}{\lvert\vec{a}\rvert};\frac{z}{\lvert\vec{a}\rvert}\right)$

▼ Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные векторы могут быть

- *сонаправленными*, т.е. направлены в одну сторону;
- *противоположно направленными*, т.е. направлены в разные стороны. ▲

▼ Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной или параллельных плоскостях. ▲



В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, векторы

$\overrightarrow{CC_1}$, $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ коллинеарны;

$\overrightarrow{CC_1}$ и $\overrightarrow{AB}$ коллинеарными не являются;

$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{C_1B_1}$ компланарны;

$\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AA_1}$ компланарными не являются.

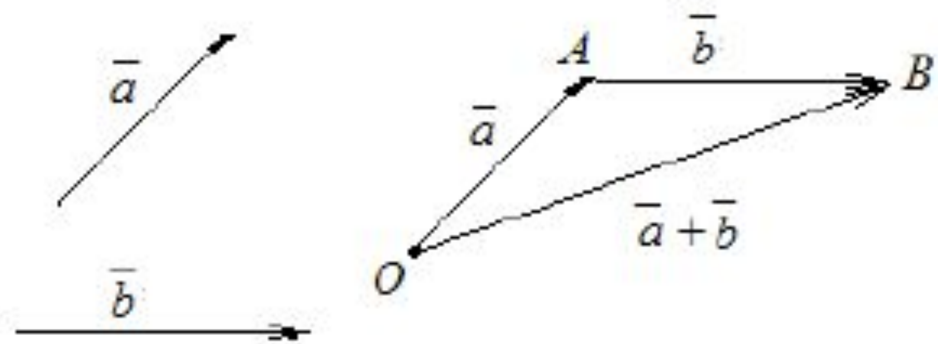
2. Линейные операции над векторами

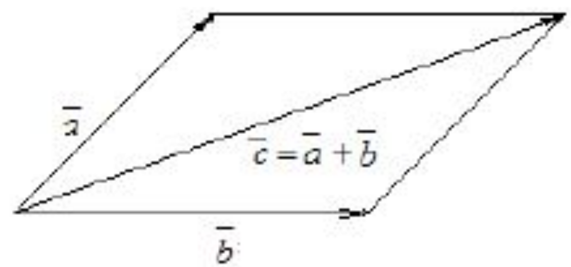
1. Сложение векторов

Правило треугольника для двух ненулевых векторов $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$

от произвольной точки *O* откладывается вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, от конца вектора $\overrightarrow{OA}$ (от точки *A*) откладывается вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, тогда

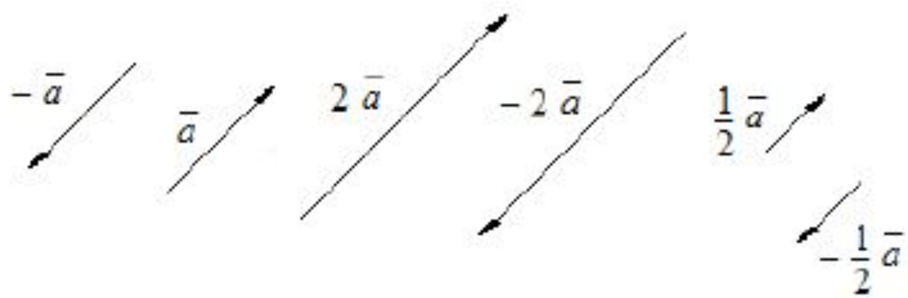
$$\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$$



Правило параллелограмма для двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$	совместить путем параллельного переноса начала обоих векторов и достроить на этих векторах параллелограмм, тогда сумма этих векторов будет вектор, идущий из их общего начала (вектор диагонали этого параллелограмма) 

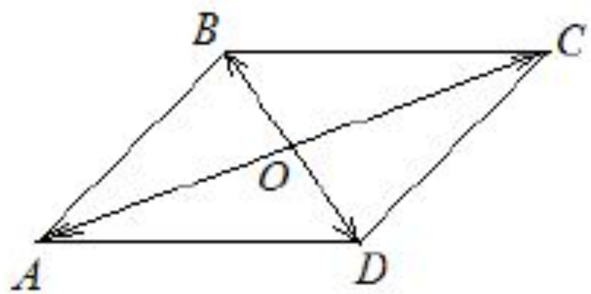
2. Произведение вектора на число

▼ *Произведением вектора* $\vec{a}$ на число λ называется вектор $\lambda\vec{a}$, имеющий длину $|\lambda||\vec{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно ему, если $\lambda < 0$ (рис. 9). ▲



В параллелограмме *ABCD* диагонали пересекаются в точке *O* найти сумму векторов $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

► Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам: $|OA|=|OC|$, векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OC}$ противоположно направлены, т.е. $\overrightarrow{OA}=-\overrightarrow{OC}$, поэтому $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$.



Аналогично $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$, следовательно, $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$. ◄

Даны точки $A(1;-3;2)$, $B(1;0;1)$, $C(1;-4;0)$, $D(0;1;3)$. Найти координаты вектора, соединяющего середины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

► Пусть точка M — середина AB, точка O — середина CD, следовательно, нужно найти координаты вектора $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}$.

Вектор $\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, координаты вектора $\overrightarrow{AB}=(0;3;-1)$, тогда $\overrightarrow{MB}=\left(0;\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

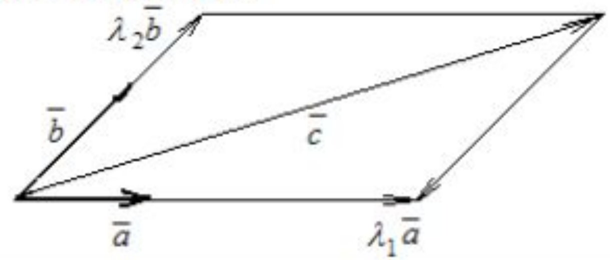
Координаты вектора $\overrightarrow{BC}=(0;-4;-1)$.

Вектор $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$, координаты вектора $\overrightarrow{CD}=(-1;5;-3)$, тогда $\overrightarrow{CO}=\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Таким образом, $\overrightarrow{MO}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\left(0+0-\frac{1}{2};\frac{3}{2}-4+\frac{5}{2};-\frac{1}{2}-1-\frac{3}{2}\right)=$
$=\left(-\frac{1}{2};0;-3\right)$, т.е. координаты вектора $\overrightarrow{MO}=\left(-\frac{1}{2};0;-3\right)$. ◄

Теорема	Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число λ, что $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.

≫ Два вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т.е. $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$.

Линейной комбинацией векторов	$\vec{a}=(x_1;y_1)$ и $\vec{b}=(x_2;y_2)$ называется вектор $\vec{c}=(x_3;y_3)$, определяемый равенством: $\vec{c}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}$. Координаты вектора $\vec{c}$, являющегося линейной комбинацией векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, будут равны линейной комбинации одноименных координат этих векторов, т.е. $\begin{cases} x_3=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2; \\ y_3=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2. \end{cases}$ *Геометрически* такой вектор является *диагональю параллелограмма*, построенного на векторах $\lambda_1\vec{a}$ и $\lambda_2\vec{b}$, полученных «растяжением» векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в соответствующее число раз. 
	$\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ и $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$ называется вектор $\vec{d}=(x_4;y_4;z_4)$, определяемый равенством: $\vec{d}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}$. Координаты вектора $\vec{d}$, являющегося линейной комбинацией векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, будут равны линейной комбинации одноименных координат этих векторов, т.е. $\begin{cases} x_4=\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\lambda_3x_3; \\ y_4=\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\lambda_3y_3; \\ z_4=\lambda_1z_1+\lambda_2z_2+\lambda_3z_3. \end{cases}$

Геометрически такой вектор является *диагональю параллелепипеда*, построенного на векторах $\lambda_1\vec{a}$, $\lambda_2\vec{b}$ и $\lambda_3\vec{c}$, полученных «растяжением» векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в соответствующее число раз.