

ВЕКТОРЫ

Векторы на плоскости и в пространстве

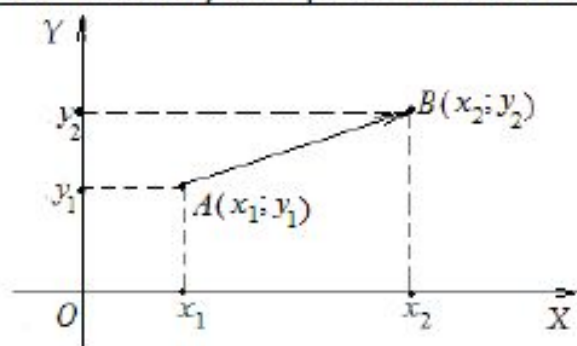
1. Основные определения

Пусть

на плоскости XOY точки имеют координаты $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$,

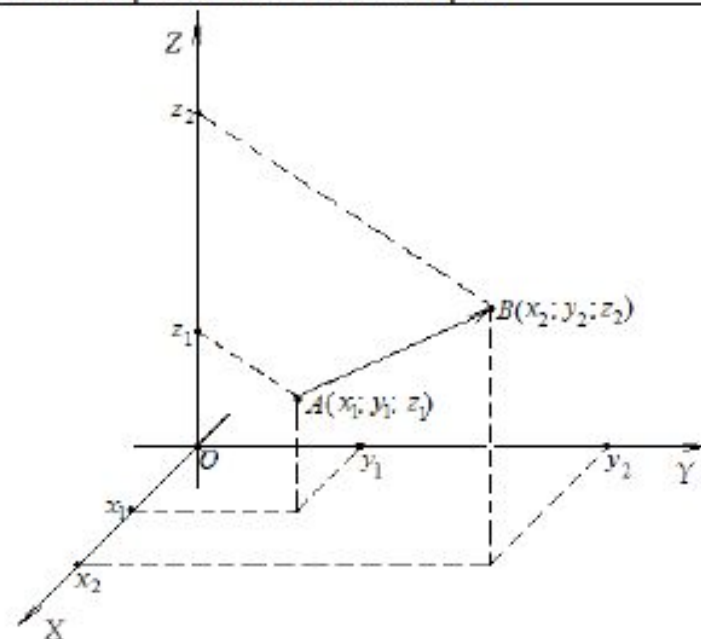
в пространстве $XOYZ$ точки имеют координаты $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$,

вектором \overrightarrow{AB} (геометрическим вектором) называется направленный отрезок прямой с началом в точке A , концом в точке B и направлением от первой точки ко второй



координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (x; y)$, где

$$\begin{cases} x = x_2 - x_1; \\ y = y_2 - y_1. \end{cases}$$



координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (x; y; z)$, где

$$\begin{cases} x = x_2 - x_1; \\ y = y_2 - y_1; \\ z = z_2 - z_1. \end{cases}$$

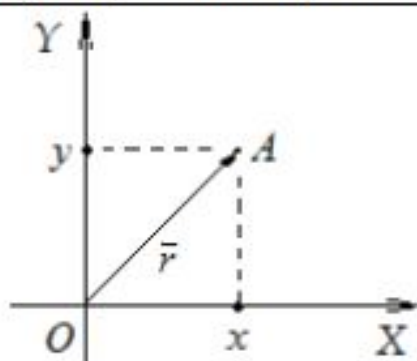
Длина вектора \overrightarrow{AB} — расстояние между его начальной точкой A и конечной точкой B , т.е.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

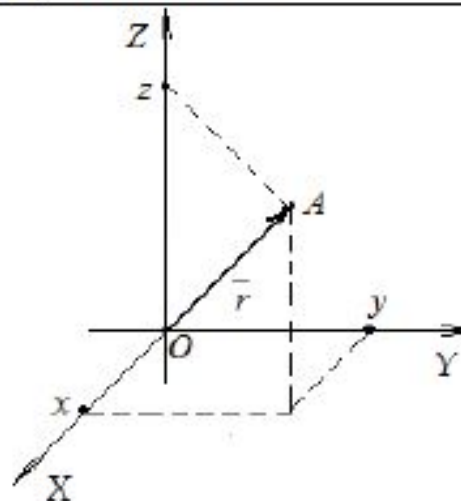
$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Вектор у которого начало и конец совпадают называется *нулевым вектором* $\vec{0}$, длина нулевого вектора равна нулю, а направление произвольно.

▼ Вектор \vec{OA} , начало которого находится в начале координат, а конец — в точке A , называют *радиус-вектором* точки A и обозначают $\vec{r}(A)$ или \vec{a} . ▲



координаты радиус-вектора: $\vec{a} = (x; y)$



координаты радиус-вектора: $\vec{a} = (x; y; z)$

Длина радиус-вектора \vec{a} определяется по формулам:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

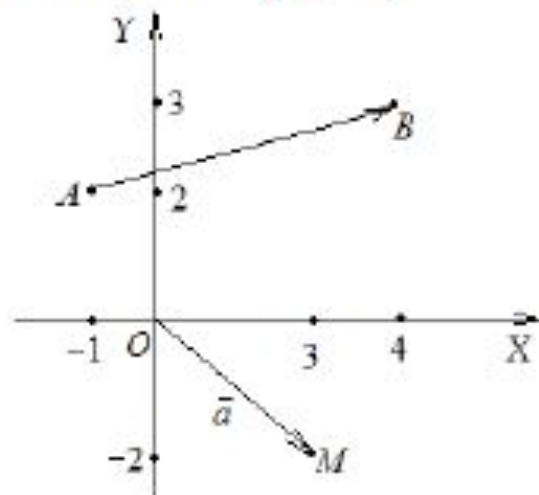
$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

▼ Векторы называются *равными*, если они имеют одинаковую длину и направление.

Построить векторы: \overrightarrow{AB} если $A(-1; -2)$ и $B(4; 3)$; $\vec{a} = (3; -2)$.

► В декартовой системе координат XOY строим точки $A(-1; -2)$ и $B(4; 3)$, точка A — начало вектора, точка B — конец вектора \overrightarrow{AB} .

В декартовой системе координат XOY строим точку $M(3; -2)$, вектор \overrightarrow{OM} — искомый радиус-вектор $\vec{a} = (3; -2)$.



▼ Единичным вектором (ортом) называется вектор, имеющий при выбранном масштабе длину, равную единице, т.е. если вектор задан своими координатами

$$\vec{a} = (x; y)$$

$$\vec{a} = (x; y; z)$$

тогда

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \blacktriangle$$

Найти орт вектора $\overline{AB} = (4; -10; 1)$.

$$\blacktriangleright \overline{AB}^0 = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \pm \frac{(4; -10; 1)}{\sqrt{16 + 100 + 1}} = \pm \left(\frac{4}{\sqrt{117}}; -\frac{10}{\sqrt{117}}; \frac{1}{\sqrt{117}} \right). \blacktriangleleft$$

Зная орт вектора можно найти координаты искомого вектора:

$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0 = |\vec{a}| \cdot \left(\frac{x}{|\vec{a}|}; \frac{y}{|\vec{a}|} \right)$$

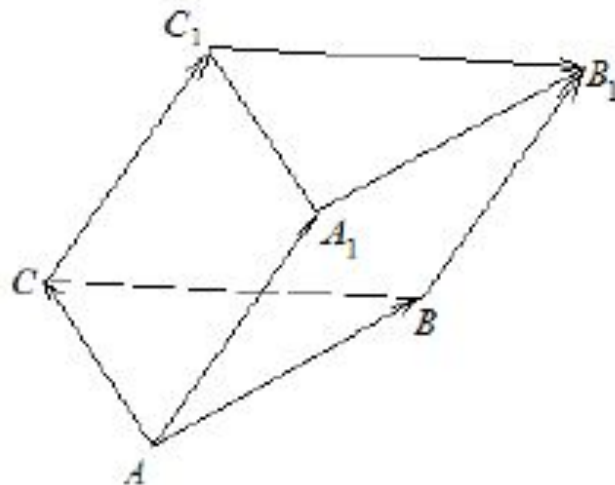
$$\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^0 = |\vec{a}| \cdot \left(\frac{x}{|\vec{a}|}; \frac{y}{|\vec{a}|}; \frac{z}{|\vec{a}|} \right)$$

▼ Векторы \vec{a} и \vec{b} называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные векторы могут быть

- *сонаправленными*, т.е. направлены в одну сторону;
- *противоположно направленными*, т.е. направлены в разные стороны. ▲

▼ Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной или параллельных плоскостях. ▲



В треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, векторы

$\vec{CC_1}$, $\vec{AA_1}$, $\vec{BB_1}$ коллинеарны;

$\vec{CC_1}$ и \vec{AB} коллинеарными не являются;

\vec{AC} , \vec{AB} и $\vec{C_1B_1}$ компланарны;

\vec{AC} , \vec{AB} и $\vec{AA_1}$ компланарными не являются.

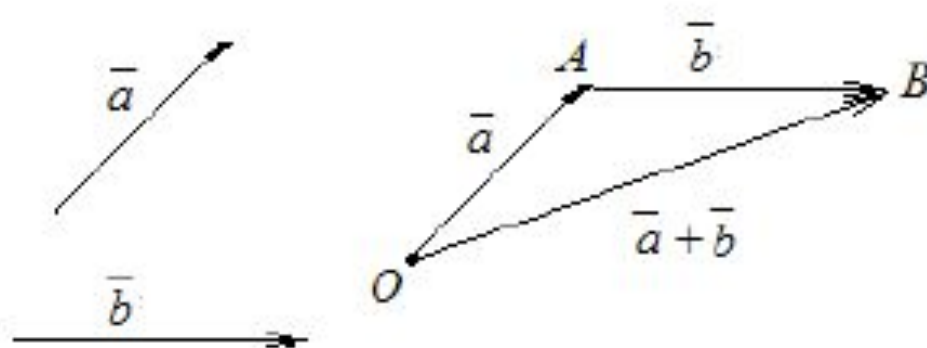
2. Линейные операции над векторами

1. Сложение векторов

Правило
треугольника для
двух ненулевых
векторов \vec{a} и \vec{b}

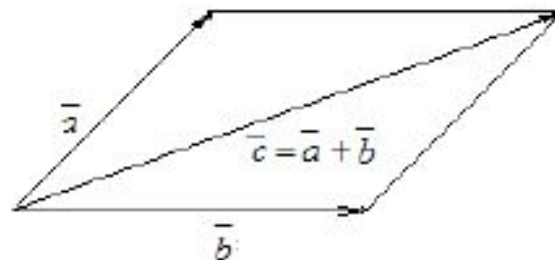
от произвольной точки O откладывается вектор $\vec{OA} = \vec{a}$, от конца
вектора \vec{OA} (от точки A) откладывается вектор $\vec{AB} = \vec{b}$, тогда

$$\vec{OB} = \vec{a} + \vec{b}$$



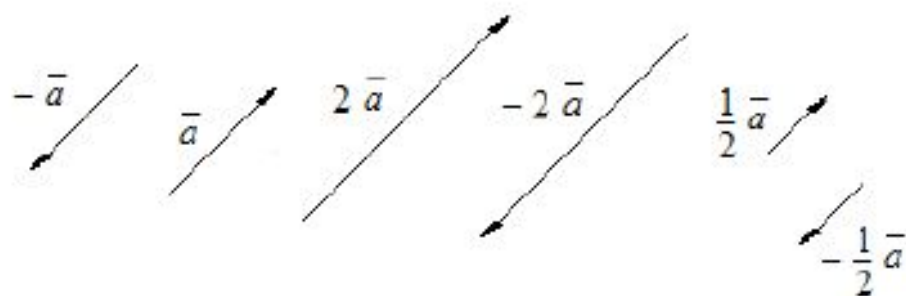
Правило
параллелограмма
для двух
ненулевых
векторов \vec{a} и \vec{b}

совместить путем параллельного переноса начала обоих векторов и достроить на этих векторах параллелограмм, тогда сумма этих векторов будет **вектор, идущий из их общего начала** (вектор диагонали этого параллелограмма)



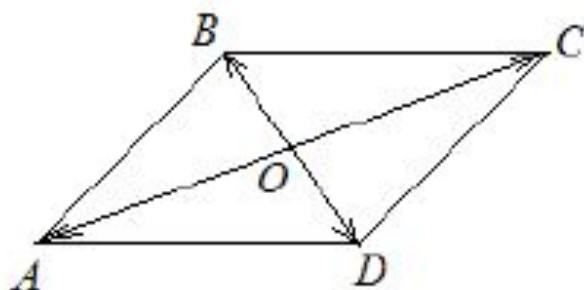
2. Произведение вектора на число

▼ Произведением вектора \vec{a} на число λ называется вектор $\lambda \vec{a}$, имеющий длину $|\lambda| |\vec{a}|$, направление которого совпадает с направлением вектора \vec{a} , если $\lambda > 0$ и противоположно ему, если $\lambda < 0$ (рис. 9). ▲



В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O найти сумму векторов $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.

► Диагонали параллелограмма, пересекаясь, делятся пополам: $|OA| = |OC|$, векторы \overrightarrow{OA} и \overrightarrow{OC} противоположно направлены, т.е. $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OC}$, поэтому $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.



Аналогично $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, следовательно, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$. ◀

Даны точки $A(1; -3; 2)$, $B(1; 0; 1)$, $C(1; -4; 0)$, $D(0; 1; 3)$. Найти координаты вектора, соединяющего середины векторов \overline{AB} и \overline{CD} .

► Пусть точка M — середина AB , точка O — середина CD , следовательно, нужно найти координаты вектора $\overline{MO} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CO}$.

Вектор $\overline{MB} = \frac{1}{2}\overline{AB}$, координаты вектора $\overline{AB} = (0; 3; -1)$, тогда

$$\overline{MB} = \left(0; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right).$$

Координаты вектора $\overline{BC} = (0; -4; -1)$.

Вектор $\overline{CO} = \frac{1}{2}\overline{CD}$, координаты вектора $\overline{CD} = (-1; 5; -3)$, тогда

$$\overline{CO} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right).$$

Таким

образом,

$$\begin{aligned}\overline{MO} &= \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CO} = \left(0 + 0 - \frac{1}{2}; \frac{3}{2} - 4 + \frac{5}{2}; -\frac{1}{2} - 1 - \frac{3}{2}\right) = \\ &= \left(-\frac{1}{2}; 0; -3\right), \text{ т.е. координаты вектора } \overline{MO} = \left(-\frac{1}{2}; 0; -3\right). \blacktriangleleft\end{aligned}$$

Теорема

Векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда существует такое число λ , что $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.

Два вектора $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т.е. $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$.

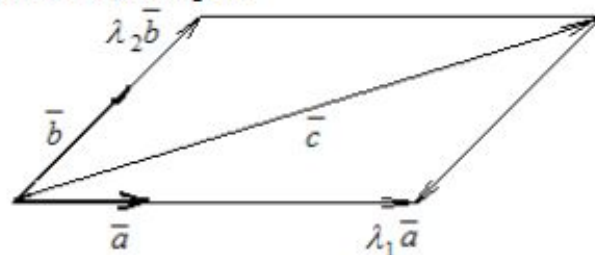
Линейной комбинацией
векторов

$\vec{a} = (x_1; y_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2)$ называется вектор $\vec{c} = (x_3; y_3)$, определяемый равенством: $\vec{c} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b}$.

Координаты вектора \vec{c} , являющегося линейной комбинацией векторов \vec{a} и \vec{b} , будут равны линейной комбинации одноименных координат этих векторов, т.е.

$$\begin{cases} x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2; \\ y_3 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2. \end{cases}$$

Геометрически такой вектор является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\lambda_1 \vec{a}$ и $\lambda_2 \vec{b}$, полученных «растяжением» векторов \vec{a} и \vec{b} в соответствующее число раз.



$\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ и $\vec{c} = (x_3; y_3; z_3)$ называется вектор $\vec{d} = (x_4; y_4; z_4)$, определяемый равенством: $\vec{d} = \lambda_1 \vec{a} + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 \vec{c}$.

Координаты вектора \vec{d} , являющегося линейной комбинацией векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} , будут равны линейной комбинации одноименных координат этих векторов, т.е.

$$\begin{cases} x_4 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3; \\ y_4 = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3; \\ z_4 = \lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2 + \lambda_3 z_3. \end{cases}$$

Геометрически такой вектор является диагональю параллелепипеда, построенного на векторах $\lambda_1 \vec{a}$, $\lambda_2 \vec{b}$ и $\lambda_3 \vec{c}$, полученных «растяжением» векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} в соответствующее число раз.

