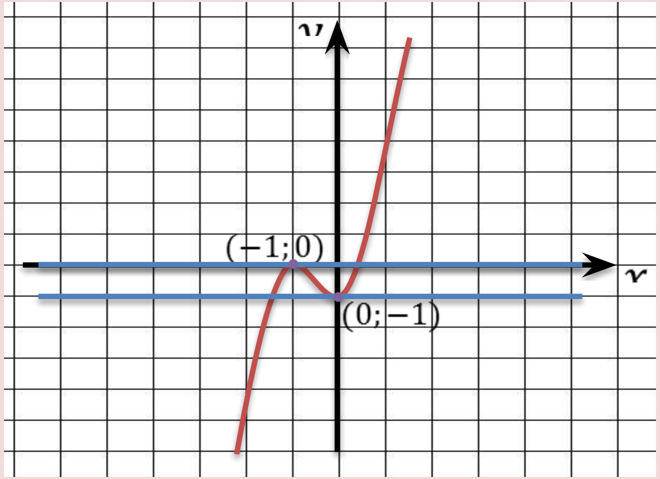
Применение производной функции для отыскания точек экстремума

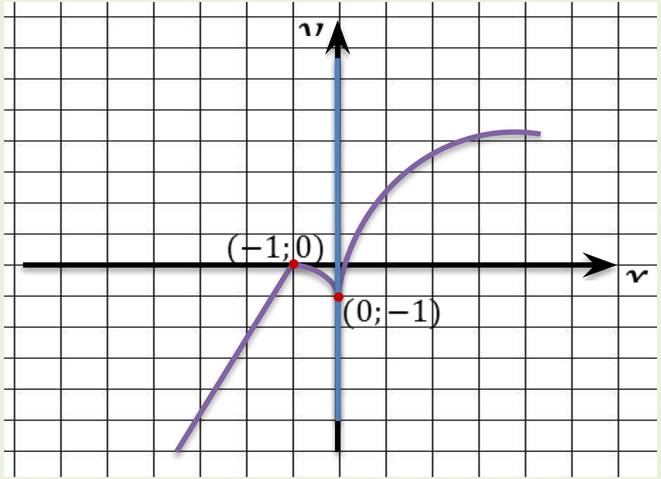


$f(x)$ возрастает: $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$

$f(x)$ убывает: $x \in [-1; 0]$

$f'(-1) = 0$

$f'(0) = 0$



$f(x)$ возрастает: $x \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$

$f(x)$ убывает: $x \in [-1; 0]$

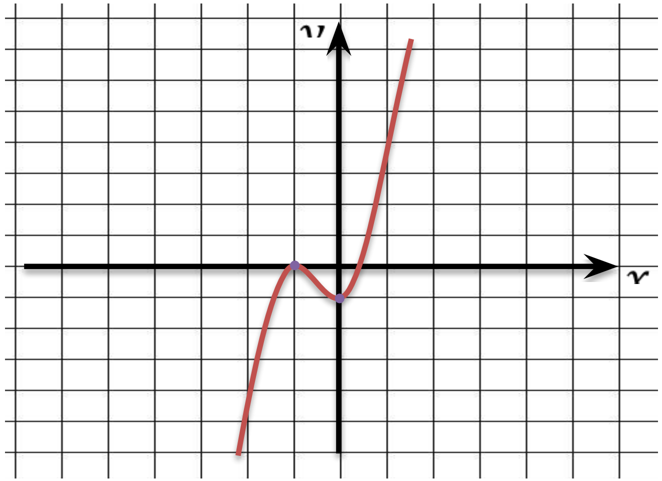
касательной в точке $x = -1$ не существует

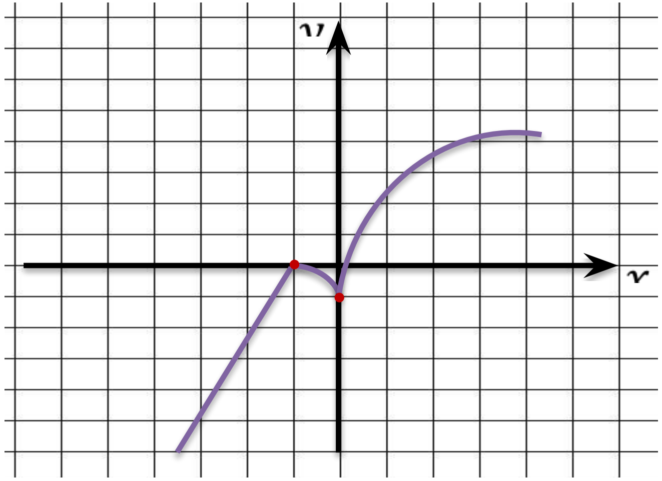
касательная в точке $x = 0$ – ось OY

Точку $x = x_0$ называют точкой минимума функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

$$f(x) \geq f(x_0)$$

$$y(x_0) = y_{min}$$

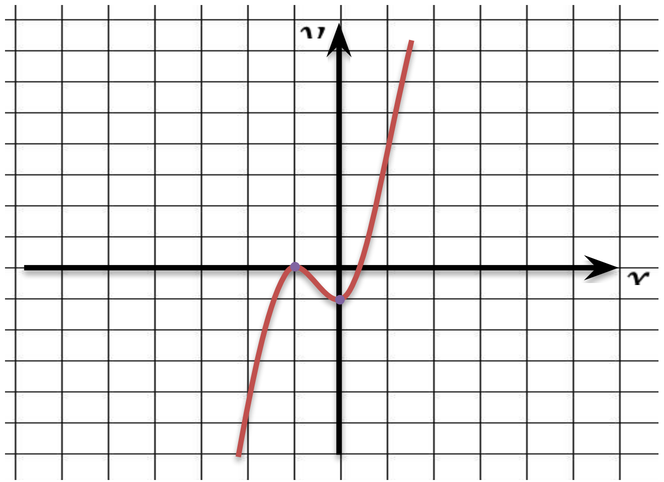


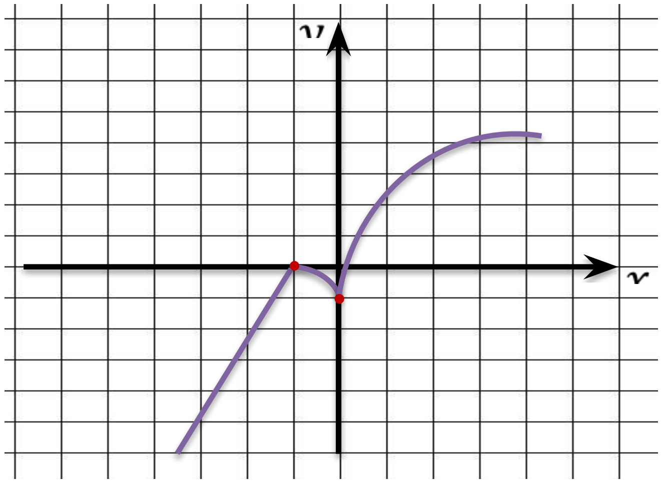


Точку $x = x_0$ называют точкой максимума функции $y = f(x)$, если у этой точки существует окрестность, для всех точек которой выполняется неравенство

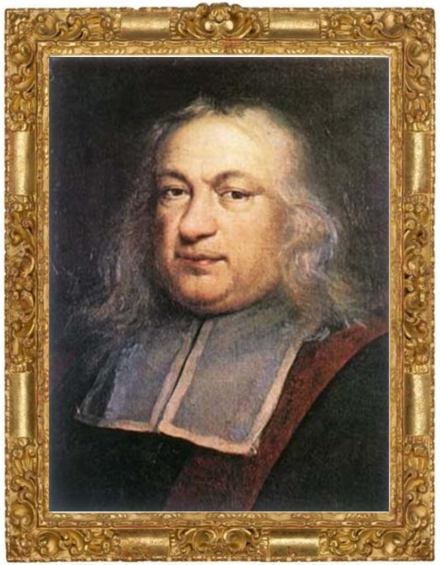
$$f(x) \le f(x_0)$$

$$y(x_0) = y_{max}$$



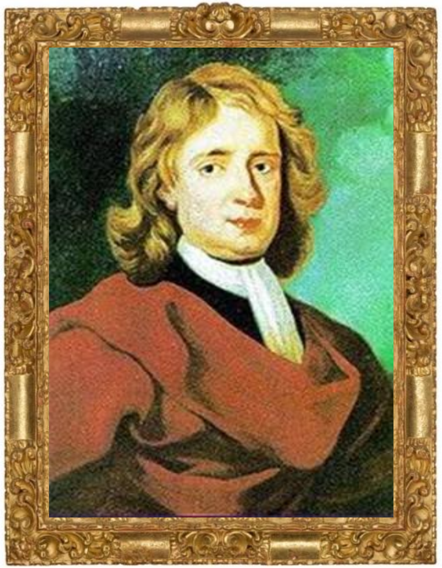


Точки минимума и максимума функции – точки экстремума (от латинского слова *extremum* − «крайний»).

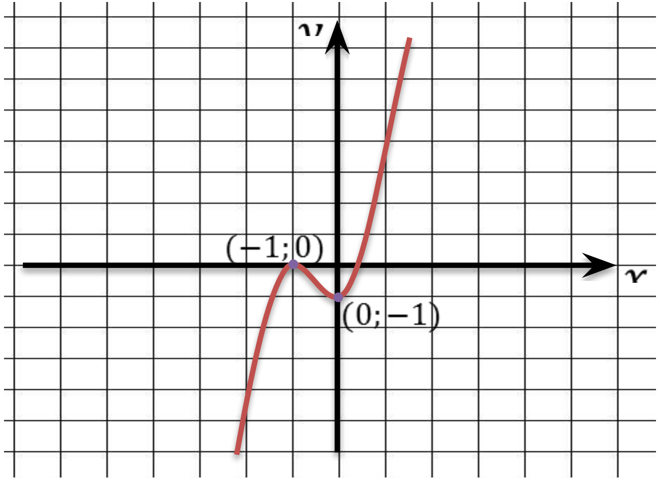


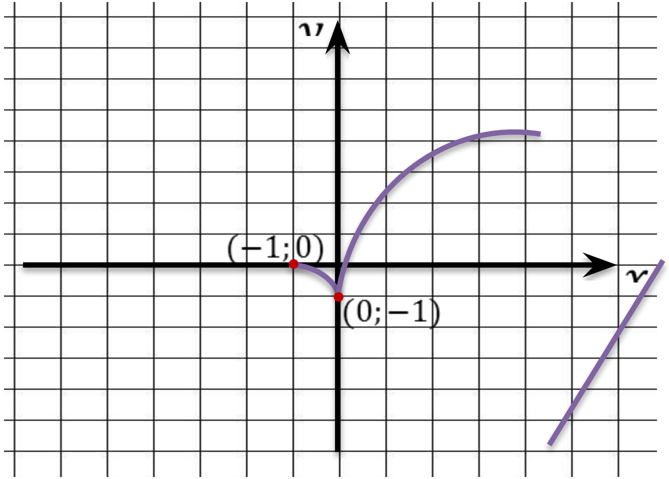
Пьер Ферма
(1601 – 1665 гг.)

Леонард Эйлер
(1707 – 1783 гг.)



Колин Маклорен
(1698 – 1746 гг.)





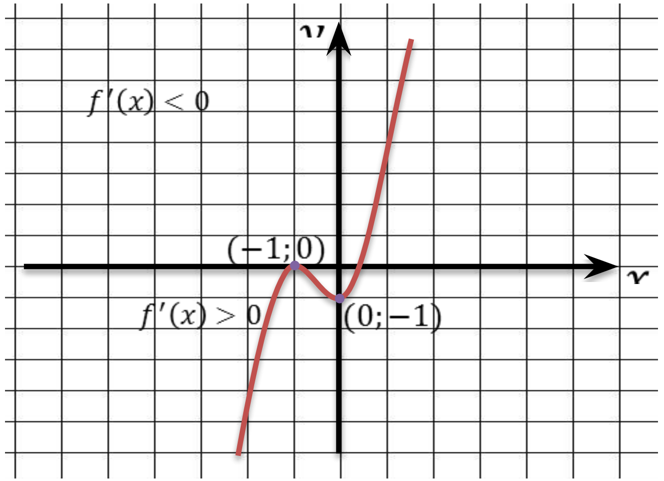
$x = x_0,\ (x_0; f(x_0))$

$f'(-1) = 0, f'(0) = 0$

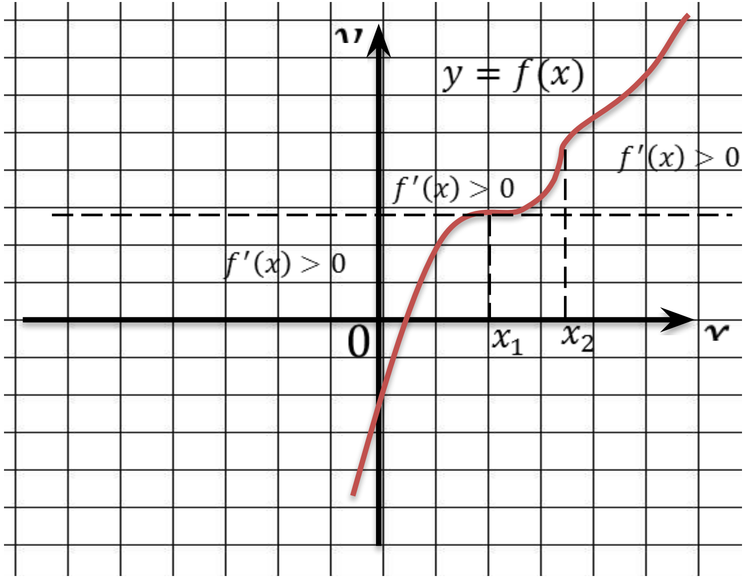
$f'(-1)$ – не существует, $f'(0)$– не существует

Теорема 4. Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то в этой точке производная функции либо равна нулю либо не существует.

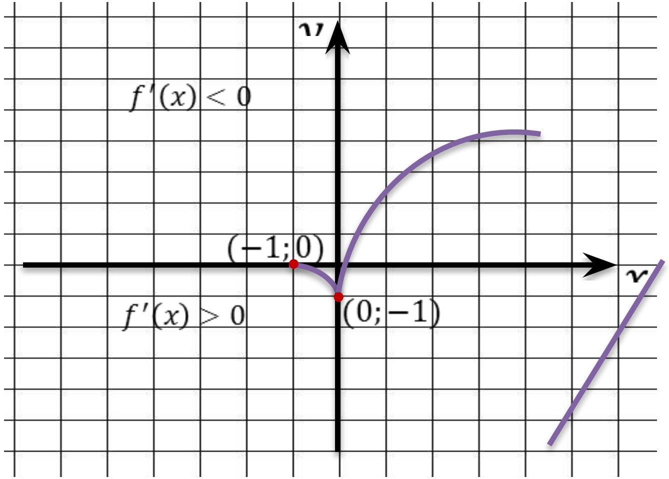
Внутренние точки области определения, в которых производная функции равна нулю, называют стационарными, а внутренние точки области определения, в которых производная функции непрерывна, но производная не существует, называют критическими.



y
x
$f'(x) < 0$
$(-1;0)$
$f'(x) > 0$
$(0;-1)$



y
x
$y = f(x)$
$f'(x) > 0$
$f'(x) > 0$
$f'(x) > 0$
0
x_1
x_2



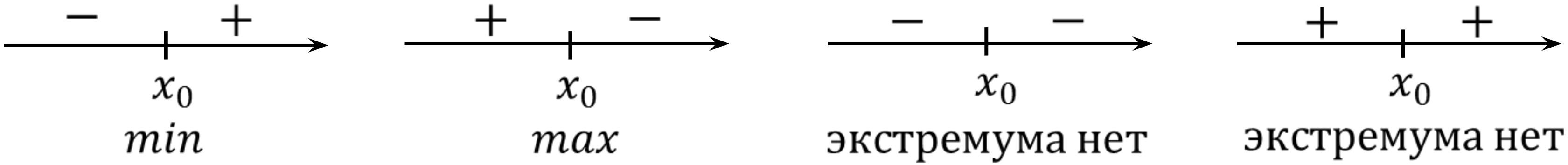
y
x
$f'(x) < 0$
$(-1;0)$
$f'(x) > 0$
$(0;-1)$

Теорема 5. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри промежутка стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

а) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) < 0$, а при $x > x_0$ – неравенство $f'(x) > 0$, то $x = x_0$ – точка минимума функции $y = f(x)$;

б) если у этой точки существует такая окрестность, в которой при $x < x_0$ выполняется неравенство $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ – неравенство $f'(x) < 0$, то $x = x_0$ – точка максимума функции $y = f(x)$;

в) если у этой точки существует такая окрестность, что в ней и слева и справа от точки x_0 знаки производной одинаковы, то в точке x_0 экстремума нет.



Пример:

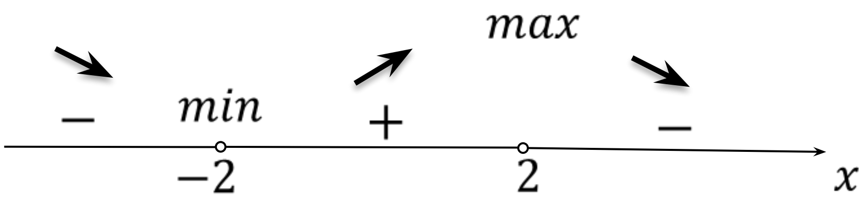
- Найдите точки экстремума функции $y = 7 + 12x - x^3$ и определите их характер.

Решение:

$f'(x) = 12 - 3x^2$

$12 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3(4 - x^2) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ или $x = 2$

-2 – точка экстремума



2 – точка экстремума

$x = -2$ – точка минимума

$x = 2$ – точка максимума

Ответ: $x = -2$ – точка минимума, $x = 2$ – точка максимума

Алгоритм исследования непрерывной функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы:

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные $(f'(x) = 0)$ и критические $(f'(x)\ \text{не существует})$ точки функции $y = f(x)$.
3. Отметить стационарные и критические точки на числовой прямой и определить знаки производной на получившихся промежутках.
4. На основании теорем 1, 2 и 5 сделать выводы о монотонности функции и о ее точках экстремума.

Замечание! Если заданная функция имеет вид $y = \frac{p(x)}{q(x)}$, то точки, в которых $q(x) = 0$ тоже отмечают на числовой прямой, причем делают это до определения знаков производной.

Пример:

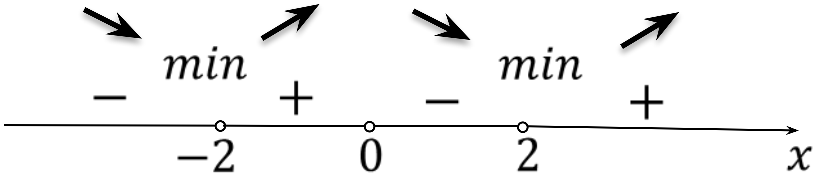
- Исследовать функцию $y = \frac{x^4+16}{x^2}$ на монотонность и экстремумы.

Решение:

$x = 0$

$$f'(x) = \frac{(x^4+16)' \cdot x^2 - (x^4+16) \cdot (x^2)'}{(x^2)^2} = \frac{4x^3 \cdot x^2 - 2x(x^4+16)}{x^4} =$$

$$= \frac{4x^5 - 2x^5 - 32x}{x^4}$$



$f'(x) = 0$ при $x = -2, x = 2$

при $x \in (-\infty; -2) \cup (0; 2)$ функция убывает, при $x \in (-2; 0) \cup (2; +\infty)$ функция возрастает

$x = -2$ – точка минимума $y_{min} = \frac{(-2)^4+16}{(-2)^2} = 8$

$x = 2$ – точка минимума $y_{min} = \frac{2^4+16}{2^2} = 8$

Пример:

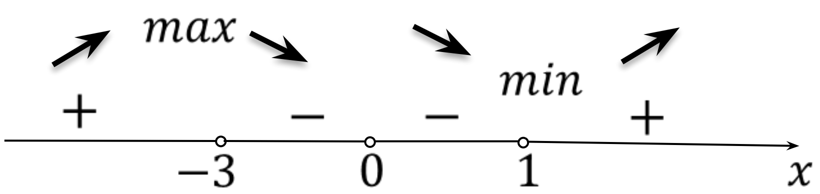
- Исследовать функцию $y = 2x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 3$ на монотонность и экстремумы.

Решение:

$f'(x) = 10x^4 + 20x^3 - 30x^2$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 10x^4 + 20x^3 - 30x^2 = 0 \Leftrightarrow 10x^2(x^2 + 2x - 3) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x^2 = 0$ или $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = -3$ или $x = 1$



при $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ функция возрастает,

при $x \in (-3; 0) \cup (0; 1)$ функция убывает $\Leftrightarrow$ при $x \in (-3; 1)$ функция убывает

$x = -3$ – точка максимума $y_{max} = 2(-3)^5 + 5(-3)^4 - 10(-3)^3 + 3 = 192$

$x = 1$ – точка минимума $y_{min} = 2 \cdot 1^5 + 5 \cdot 1^4 - 10 \cdot 1^3 + 3 = 0$