АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Повторение.

n-арная алгебраическая операция

Функция $f:A^n\to B$ называется n-местной функцией из A в B.

Функция $f:A^n\to A$ называется n-местной алгебраической операцией на A.

При $n=1$ операция называется унарной.

При $n=2$ операция называется бинарной.

При $n=0$ операцию принято называть константой.

Очевидно, что n-местная операция на множестве A является $(n+1)$-местным отношением на том же множестве.

Если область значений операции лежит в A, то будем говорить, что операция f замкнута на A.

Сигнатурой называется совокупность предикатных и функциональных символов с указанием их местности.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Алгебраической системой (А;Σ) сигнатуры Σ называется непустое множество А, где каждому n-местному предикатному (функциональному) символу из Σ поставлен в соответствие n-местный предикат (операция), определенный на множестве А.

Множество А называется носителем или универсумом алгебраической системы (А;Σ).

Мощностью а.с. называется мощность ее носителя.

А.с. называется алгеброй, если ее сигнатура состоит только из функциональных символов.

А.с. называется моделью, если ее сигнатура состоит только из предикатных символов.

АЛГЕБРЫ С ОДНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

Группоид – алгебра $(A,\cdot)$ с одной бинарной операцией. Помимо требования замкнутости множества относительно заданной на нём операции, других требований к операции и множеству не предъявляется.

Полугруппа – группоид с ассоциативной операцией (т.е. для всех $x,y,z \in A$ верно $(x\cdot y)\cdot z=x\cdot(y\cdot z)$).

Пример: $(N,+)$

Элемент $e\in A$ такой, что $e\cdot x=x\cdot e=x$ для всех $x\in A$, называется **единицей**.

Моноид – полугруппа с единицей.

Пример: $(N,\cdot)$

ГРУППА

Элемент $x^{-1} \in A$, такой что для $x \in A$ $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$, называется **обратным** к x. Элемент x называется обратимым.

Группа – моноид $(A, \cdot)$, у которого для любого элемента существует обратный.

Пример: $(Z,+)$

Абелева (коммутативная) группа – группа $(A, \cdot)$, где операция $\cdot$ коммутативна (т.е. $x \cdot y = y \cdot x$ для всех $x, y \in A$).

Пример: $(Z,+)$

АЛГЕБРЫ С ДВУМЯ ОПЕРАЦИЯМИ

Кольцо — множество R, на котором заданы две бинарные операции: + и × (называемые сложение и умножение), со следующими свойствами, выполняющимися для любых a , b , c ∈ R:

1. $a + b = b + a$ — коммутативность сложения;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность сложения;
3. $\exists 0 \in R \ (a + 0 = 0 + a = a)$ — существование нейтрального элемента относительно сложения;
4. $\forall a \in R \ \exists b \in R \ (a + b = b + a = 0)$ — существование противоположного элемента относительно сложения;
5. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ — ассоциативность умножения;
6. $\begin{cases} a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \\ (b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a) \end{cases}$ — дистрибутивность.

Иными словами, кольцо —алгебра (R , + , ×), являющаяся абелевой группой относительно сложения +, полугруппой относительно умножения × , и обладающая двусторонней дистрибутивностью × относительно +.

Пример: (Z,+,·).

ТЕЛО

Кольцо с 1 – кольцо, содержащее нейтральный элемент $e \in R$ относительно умножения ($e \cdot x = x \cdot e = x$ для всех $x \in R$).

Тело — кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим (относительно умножения).

Иными словами, тело - это множество с двумя операциями (сложение и умножение), обладающее следующими свойствами:

образует абелеву группу относительно сложения;

все ненулевые элементы образуют группу относительно умножения;

имеет место дистрибутивность умножения относительно сложения.

ПОЛЕ

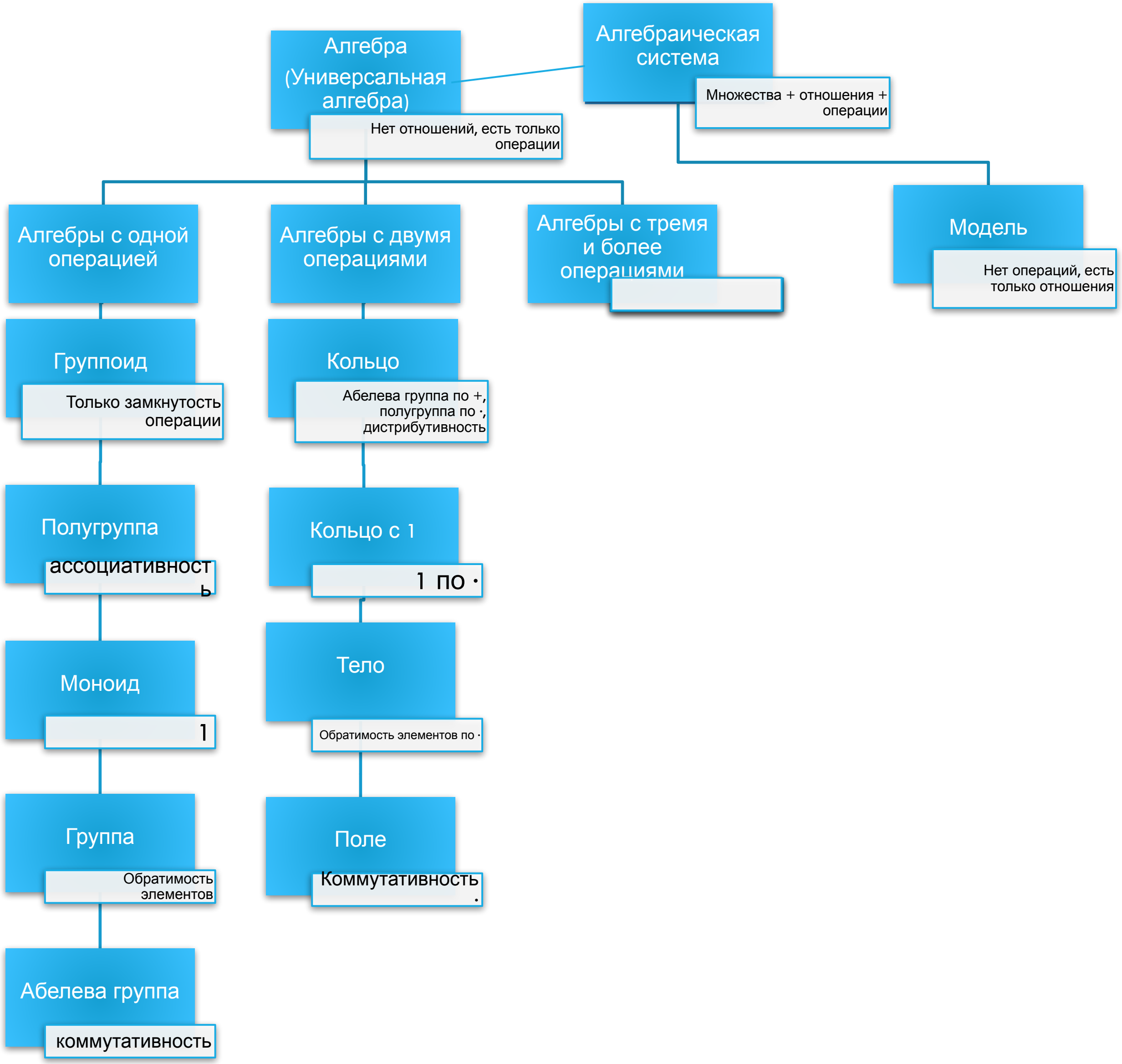
Поле - множество F с введёнными на нём алгебраическими операциями сложения + и умножения * ($+ : F \times F \to F$, $* : F \times F \to F$, для которого выполняются следующие аксиомы:

1. Коммутативность сложения: $\forall a, b \in F \quad a + b = b + a$.
2. Ассоциативность сложения: $\forall a, b, c \in F \quad (a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Существование нулевого элемента: $\exists \mathbf{0} \in F : \forall a \in F \quad a + \mathbf{0} = a$.
4. Существование противоположного элемента: $\forall a \in F \; \exists (-a) \in F : a + (-a) = \mathbf{0}$.
5. Коммутативность умножения: $\forall a, b \in F \quad a * b = b * a$.
6. Ассоциативность умножения: $\forall a, b, c \in F \quad (a * b) * c = a * (b * c)$.
7. Существование единичного элемента: $\exists e \in F \setminus \{\mathbf{0}\} : \forall a \in F \quad a * e = a$.
8. Существование обратного элемента для ненулевых элементов: $(\forall a \in F : a \neq \mathbf{0}) \; \exists a^{-1} \in F : a * a^{-1} = e$.
9. Дистрибутивность умножения относительно сложения: $\forall a, b, c \in F \quad (a + b) * c = (a * c) + (b * c)$.

Поле - алгебра (F , + , ×), являющаяся абелевой группой по сложению, все его ненулевые элементы образуют абелеву группу по умножению, и выполняется свойство дистрибутивности.

ПРИМЕРЫ ПОЛЯ

- $\mathbb{Q}$ – рациональные числа,
- $\mathbb{R}$ – вещественные числа,
- $\mathbb{C}$ – комплексные числа,
- $\mathbb{Z}_p$ – поле вычетов по модулю p, где p – простое число.
- $\mathbb{F}_q$ – конечное поле из $q = p^k$ элементов, где p – простое число, k – натуральное.



Алгебра (Универсальная алгебра)
Нет отношений, есть только операции
Алгебраическая система
Множества + отношения + операции
Модель
Нет операций, есть только отношения
Алгебры с одной операцией
Алгебры с двумя операциями
Алгебры с тремя и более операциями
Группоид
Только замкнутость операции
Полугруппа
ассоциативность
Моноид
1
Группа
Обратимость элементов
Абелева группа
коммутативность
Кольцо
Абелева группа по +, полугруппа по ·, дистрибутивность
Кольцо с 1
1 по ·
Тело
Обратимость элементов по ·
Поле
Коммутативность ·


Алгебраическая система
Одноосновная (односортная)
Многоосновная (многосортная)

МНОГООСНОВНАЯ АЛГЕБРА

Многоосновной алгеброй (многоосновной универсальной алгеброй) называется $(A_1, A_2, \ldots, A_n, \Sigma)$, где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – произвольные непустые множества (основы алгебры) и Σ - множество полиморфных операций на указанных основах (в общем случае различной арности) - сигнатура многоосновной алгебры.

Отличие полиморфных операций от алгебраических состоит в том, что аргументы такой операции могут выбираться в нескольких основах, а результат (значение) может принадлежать любой из основ (может быть не имеющей никакого отношения к тем основам, откуда выбирались аргументы).

Аналогично определяются многоосновные модели и многоосновные АС.

ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Линейное, или векторное, пространство $V(F)$ **над полем** F — это упорядоченная четвёрка $(V, F, +, \cdot)$, где

V — непустое множество элементов произвольной природы, которые называются векторами.

F — поле, элементы которого называются скалярами.

Определена операция сложения векторов $V \times V \to V$, сопоставляющая каждой паре элементов $x, y \in V$ единственный элемент множества V, называемый их суммой и обозначаемый $x + y$.

Определена операция умножения векторов на скаляры $F \times V \to V$, сопоставляющая каждому элементу λ поля F и каждому элементу x множества V единственный элемент множества V, обозначаемый $\lambda \cdot x$.

Заданные операции должны удовлетворять следующим аксиомам — аксиомам линейного (векторного) пространства:

1. $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$ (*коммутативность сложения*);
2. $\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})=(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}$ для любых $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$ (*ассоциативность сложения*);
3. существует такой элемент $\mathbf{0}\in V$, что $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\mathbf{x}=\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x}\in V$ (*существование нейтрального элемента относительно сложения*);
4. для любого $\mathbf{x}\in V$ существует такой элемент $-\mathbf{x}\in V$, что $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$, называемый вектором, **противоположным** вектору $\mathbf{x}$;
5. $\alpha(\beta\mathbf{x})=(\alpha\beta)\mathbf{x}$ (*ассоциативность умножения на скаляр*);
6. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$ (*унитарность: умножение на нейтральный (по умножению) элемент поля F сохраняет вектор*).
7. $(\alpha+\beta)\mathbf{x}=\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{x}$ (*дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров*);
8. $\alpha(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\alpha\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}$ (*дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов*).

Таким образом, операция сложения задаёт на множестве V структуру абелевой группы.

Пример: множество пар действительных чисел R^2 - двумерное векторное пространство над полем действительных.