



АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Повторение.

N-АРНАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ОПЕРАЦИЯ

Функция $f:A^n \rightarrow B$ называется n -местной функцией из A в B .

Функция $f:A^n \rightarrow A$ называется n -местной алгебраической операцией на A .

При $n=1$ операция называется унарной.

При $n=2$ операция называется бинарной.

При $n=0$ операцию принято называть константой.

Очевидно, что n -местная операция на множестве A является $(n+1)$ -местным отношением на том же множестве.

Если область значений операции лежит в A , то будем говорить, что операция f замкнута на A .

Сигнатурой называется совокупность предикатных и функциональных символов с указанием их местности.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

Алгебраической системой $(A; \Sigma)$ сигнатуры Σ называется непустое множество A , где каждому n -местному предикатному (функциональному) символу из Σ поставлен в соответствие n -местный предикат (операция), определенный на множестве A .

Множество A называется носителем или универсумом алгебраической системы $(A; \Sigma)$.

Мощностью а.с. называется мощность ее носителя.

А.с. называется алгеброй, если ее сигнатура состоит только из функциональных символов.

А.с. называется моделью, если ее сигнатура состоит только из предикатных символов.

АЛГЕБРЫ С ОДНОЙ ОПЕРАЦИЕЙ

Группоид – алгебра (A, \cdot) с одной бинарной операцией. Помимо требования замкнутости множества относительно заданной на нём операции, других требований к операции и множеству не предъявляется.

Полугруппа – группоид с ассоциативной операцией (т.е. для всех $x, y, z \in A$ верно $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$).

Пример: $(\mathbb{N}, +)$

Элемент $e \in A$ такой, что $e \cdot x = x \cdot e = x$ для всех $x \in A$, называется **единицей**.

Моноид – полугруппа с единицей.

Пример: (\mathbb{N}, \cdot)

ГРУППА

Элемент $x^{-1} \in A$, такой что для $x \in A$ $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$, называется **обратным** к x . Элемент x называется обратимым.

Группа – моноид (A, \cdot) , у которого для любого элемента существует обратный.

Пример: $(\mathbb{Z}, +)$

Абелева (коммутативная) группа – группа (A, \cdot) , где операция \cdot коммутативна (т.е. $x \cdot y = y \cdot x$ для всех $x, y \in A$).

Пример: $(\mathbb{Z}, +)$

АЛГЕБРЫ С ДВУМЯ ОПЕРАЦИЯМИ

Кольцо — множество R , на котором заданы две бинарные операции: $+$ и \times (называемые сложение и умножение), со следующими свойствами, выполняющимися для любых $a, b, c \in R$:

1. $a + b = b + a$ — коммутативность сложения;
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ — ассоциативность сложения;
3. $\exists 0 \in R (a + 0 = 0 + a = a)$ — существование нейтрального элемента относительно сложения;
4. $\forall a \in R \exists b \in R (a + b = b + a = 0)$ — существование противоположного элемента относительно сложения;
5. $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ — ассоциативность умножения;
6. $\begin{cases} a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c) \\ (b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a) \end{cases}$ — дистрибутивность.

Иными словами, кольцо — алгебра $(R, +, \times)$, являющаяся абелевой группой относительно сложения $+$, полугруппой относительно умножения \times , и обладающая двусторонней дистрибутивностью \times относительно $+$.

Пример: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$.

ТЕЛО

Кольцо с 1 – кольцо, содержащее нейтральный элемент $e \in R$ относительно умножения ($e \cdot x = x \cdot e = x$ для всех $x \in R$).

Тело — кольцо с единицей, в котором каждый ненулевой элемент обратим (относительно умножения).

Иными словами, тело - это множество с двумя операциями (сложение и умножение), обладающее следующими свойствами:

образует абелеву группу относительно сложения;

все ненулевые элементы образуют группу относительно умножения;

имеет место дистрибутивность умножения относительно сложения.

ПОЛЕ

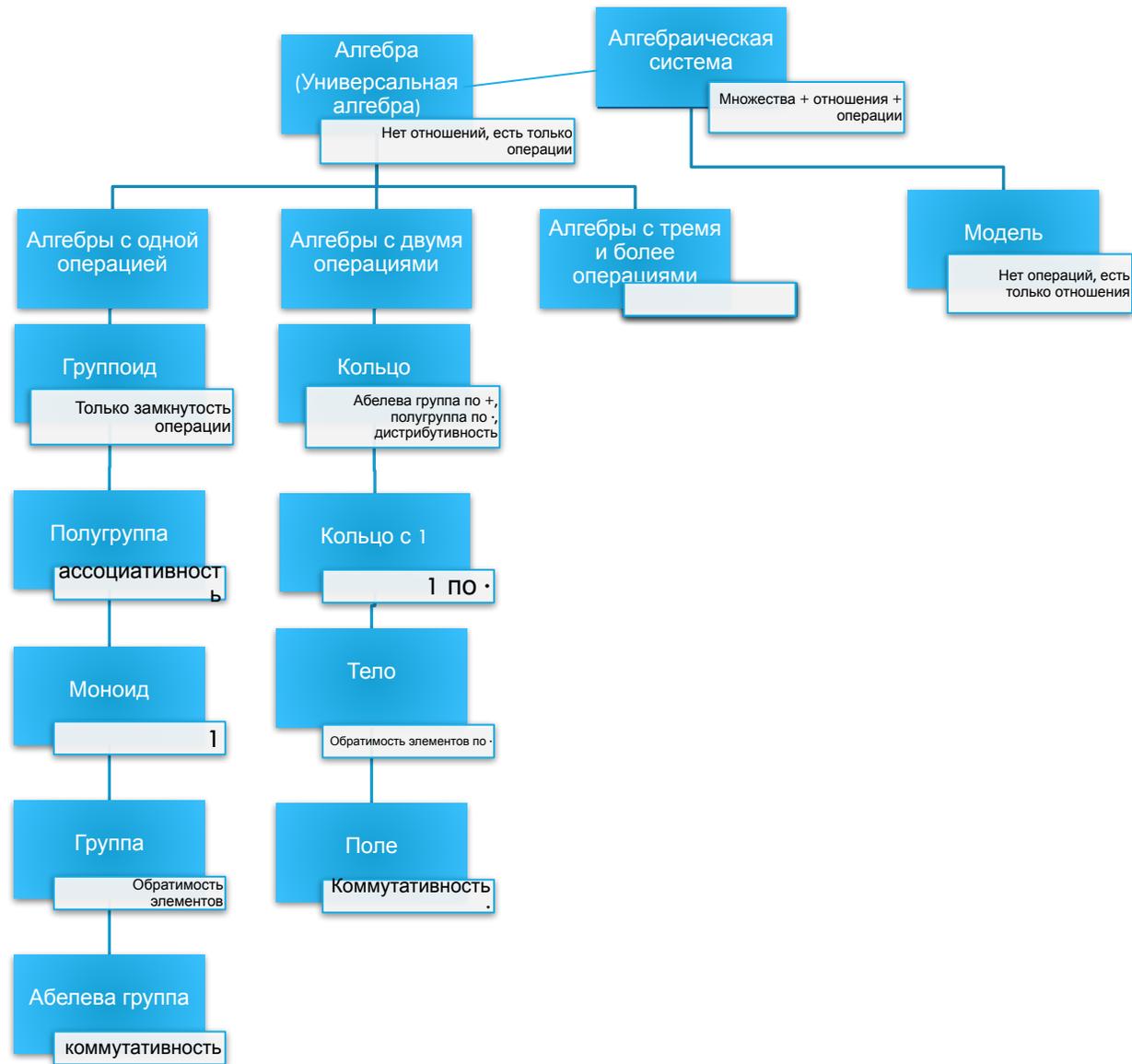
Поле - множество F с введёнными на нём алгебраическими операциями сложения $+$ и умножения $*$ ($+$: $F \times F \rightarrow F$, $*$: $F \times F \rightarrow F$, для которого выполняются следующие аксиомы:

1. Коммутативность сложения: $\forall a, b \in F \quad a + b = b + a$.
2. Ассоциативность сложения: $\forall a, b, c \in F \quad (a + b) + c = a + (b + c)$.
3. Существование нулевого элемента: $\exists \mathbf{0} \in F: \forall a \in F \quad a + \mathbf{0} = a$.
4. Существование противоположного элемента: $\forall a \in F \exists (-a) \in F: a + (-a) = \mathbf{0}$.
5. Коммутативность умножения: $\forall a, b \in F \quad a * b = b * a$.
6. Ассоциативность умножения: $\forall a, b, c \in F \quad (a * b) * c = a * (b * c)$.
7. Существование единичного элемента: $\exists e \in F \setminus \{\mathbf{0}\}: \forall a \in F \quad a * e = a$.
8. Существование обратного элемента для ненулевых элементов: $(\forall a \in F: a \neq \mathbf{0}) \exists a^{-1} \in F: a * a^{-1} = e$.
9. Дистрибутивность умножения относительно сложения: $\forall a, b, c \in F \quad (a + b) * c = (a * c) + (b * c)$.

Поле - алгебра $(F, +, \times)$, являющаяся абелевой группой по сложению, все его ненулевые элементы образуют абелеву группу по умножению, и выполняется свойство дистрибутивности.

ПРИМЕРЫ ПОЛЯ

- \mathbb{Q} – рациональные числа,
- \mathbb{R} – вещественные числа,
- \mathbb{C} – комплексные числа,
- \mathbb{Z}_p – поле вычетов по модулю p , где p – простое число.
- \mathbb{F}_q – конечное поле из $q = p^k$ элементов, где p – простое число, k – натуральное.



Алгебраическая система

```
graph TD; A[Алгебраическая система] --> B[Одноосновная (односортная)]; A --> C[Многоосновная (многосортовая)];
```

Одноосновная
я
(односортная)

Многоосновная
я
(многосортовая)

МНОГООСНОВНАЯ АЛГЕБРА

Многоосновной алгеброй (многоосновной универсальной алгеброй) называется $(A_1, A_2, \dots, A_n, \Sigma)$, где A_1, A_2, \dots, A_n – произвольные непустые множества (основы алгебры) и Σ – множество полиморфных операций на указанных основах (в общем случае различной ариности) – сигнатура многоосновной алгебры.

Отличие полиморфных операций от алгебраических состоит в том, что аргументы такой операции могут выбираться в нескольких основах, а результат (значение) может принадлежать любой из основ (может быть не имеющей никакого отношения к тем основам, откуда выбирались аргументы).

Аналогично определяются многоосновные модели и многоосновные АС.

ВЕКТОРНОЕ ПРОСТРАНСТВО

Линейное, или векторное, пространство $V(F)$ над полем F — это упорядоченная четвёрка $(V, F, +, \cdot)$, где

V — непустое множество элементов произвольной природы, которые называются векторами.

F — поле, элементы которого называются скалярами.

Определена операция сложения векторов $V \times V \rightarrow V$, сопоставляющая каждой паре элементов $x, y \in V$ единственный элемент множества V , называемый их суммой и обозначаемый $x + y$.

Определена операция умножения векторов на скаляры $F \times V \rightarrow V$, сопоставляющая каждому элементу λ поля F и каждому элементу x множества V единственный элемент множества V , обозначаемый $\lambda \cdot x$.

Заданные операции должны удовлетворять следующим аксиомам — аксиомам линейного (векторного) пространства:

1. $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ (коммутативность сложения);
2. $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ (ассоциативность сложения);
3. существует такой элемент $\mathbf{0} \in V$, что $\mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V$ (существование нейтрального элемента относительно сложения);
4. для любого $\mathbf{x} \in V$ существует такой элемент $-\mathbf{x} \in V$, что $\mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, называемый вектором, **противоположным** вектору \mathbf{x} ;
5. $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$ (ассоциативность умножения на скаляр);
6. $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ (унитарность: умножение на нейтральный (по умножению) элемент поля F сохраняет вектор).
7. $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$ (дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения скаляров);
8. $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ (дистрибутивность умножения вектора на скаляр относительно сложения векторов).

Таким образом, операция сложения задаёт на множестве V структуру абелевой группы.

Пример: множество пар действительных чисел \mathbb{R}^2 - двумерное векторное пространство над полем действительных.