Дисциплина: МАТЕМАТИКА

Раздел 4: Дифференциальные уравнения

Лекция №14
Дифференциальные уравнения первого порядка

Разработчик: Бредихина Ольга Александровна

4 Дифференциальные уравнения
4.1 Основные понятия

Всякое уравнение, содержащее, по крайней мере, одну производную неизвестной функции, называется **дифференциальным уравнением**.

В общем виде дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0,$$

где F – некоторая функция от $n+2$ переменных, y – некоторая функция от x, $n \geq 1$.

Порядок n старшей производной, входящей в запись уравнения, называется **порядком дифференциального уравнения**.

Если из уравнения в общем виде выразить в явном виде старшую производную, то получим уравнение вида

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

называемое **уравнением, разрешённым относительно старшей производной**.

4 Дифференциальные уравнения
4.1 Основные понятия

Функция $y=\varphi(x)$ называется **решением** дифференциального уравнения, если последнее обращается в тождество после подстановки $y=\varphi(x)$.

Обычно дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. Для выделения из множества решений отдельного, называемого частным решением, необходимо задавать дополнительные условия в виде

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0,\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}{}_0.$$

Задача нахождения решения, удовлетворяющего дополнительным условиям, называется **задачей Коши**, а решение уравнения – **решением задачи Коши**.

4 Дифференциальные уравнения
4.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение **первого порядка** имеет общий вид $F(x, y, y') = 0$.

Дифференциальное уравнение первого порядка, **разрешённое относительно** y', имеет вид $y' = f(x, y)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной, можно также записать в **дифференциальной форме**:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – известные функции.

4 Дифференциальные уравнения
4.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Условие $y(x_0)=y_0$ называется **начальным условием**.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y=\varphi(x,C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

– функция $\varphi(x,C)$ является решением дифференциального уравнения при каждом фиксированном значении C;

– каково бы ни было начальное условие, можно найти такое значение постоянной $C=C_0$, что функция $y=\varphi(x,C_0)$, удовлетворяет заданному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y=\varphi(x,C_0)$, полученная из общего решения при конкретном значении постоянной $C=C_0$.

4.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ называется **дифференциальным уравнением с разделёнными переменными**.

Алгоритм решения

1. Перенесём $Q(y)dy$ в правую часть уравнения:

$$P(x)dx = -Q(y)dy$$

2. Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int P(x)dx = -\int Q(y)dy$$

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Пример 1 Найти общее решение дифференциального уравнения $xdx + \frac{dy}{y} = 0$.

Решение.

$$xdx + \frac{dy}{y} = 0, \quad xdx = -\frac{dy}{y}, \quad \int xdx = -\int \frac{dy}{y}, \quad \frac{x^2}{2} = -\ln|y| + C,$$

$$\ln|y| = C - \frac{x^2}{2}, \quad y = e^{C - \frac{x^2}{2}},$$

$$y = e^C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Заменим $C_1 = e^C$, тогда общее решение исходного дифференциального уравнения примет вид:

$$y = C_1 \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

№	Формула	№	Формула
1	$\int dx = \int 1 \cdot dx = x + C$	9	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
2	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$	10	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
2*	$\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$	11	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\| + C$
2**	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$	12	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left\|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\| + C$
3	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	13	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$
4	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	13*	$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = arctgx + C$
4*	$\int e^x dx = e^x + C$	14	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C$ $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a-x}{a+x}\right\| + C$
5	$\int \sin x dx = -\cos x + C$	15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
6	$\int \cos x dx = \sin x + C$	15*	$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$
7	$\int tgx dx = -\ln\|\cos x\| + C$	16	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\| + C$
8	$\int ctgx dx = \ln\|\sin x\| + C$		

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Более общий случай описывают **дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными**, которые имеют вид $P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0.$

Алгоритм решения

1. Перенесём $P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy$ в правую часть уравнения:

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx = -P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy$$

2. Разделим переменные, используя пропорцию:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = -\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy$$

3. Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = -\int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy$$

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Пример 2 Найти общее решение дифференциального уравнения $xy^2dx + ydy = xdx.$

Решение.

$$xy^2dx + ydy = xdx,$$

$$xy^2dx - xdx = -ydy,$$

$$\left(y^2 - 1\right)xdx = -ydy,$$

$$xdx = -\frac{y}{y^2 - 1}dy,$$

$$\int xdx = -\int \frac{y}{y^2 - 1}dy.$$

Интеграл в левой части уравнения является простым табличным, а интеграл, полученный в правой части уравнения, решим отдельно.

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$-\int \frac{y}{y^2-1}dy = -\int \frac{1}{y^2-1}\cdot ydy = \left[\begin{array}{l} обозначим \quad t = y^2-1 \\ dt = \left(y^2-1\right)' dy = 2ydy \\ ydy = \dfrac{dt}{2} \end{array}\right] = -\int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| + C.$$

Таким образом, уравнение примет вид: $\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| + C.$

Заменим $C = \frac{C_1}{2}$, получим $\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| + \frac{C_1}{2}.$

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $x^2 = C_1 - \ln\left|y^2-1\right|.$

Ответ: $x^2 = C_1 - \ln\left|y^2-1\right|.$

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Также уравнение с разделяющимися переменными может иметь вид $y' = f(x) \cdot g(y)$.

Алгоритм решения

1. Заменим $y' = \frac{dy}{dx}$, получим уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$.

2. Разделим переменные, используя пропорцию:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

3. Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Пример 3 Найти общее решение дифференциального уравнения

Решение.

$$xy' - y = 1,$$

$$xy' = y + 1,$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y + 1,$$

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{d(y+1)}{y+1} = \int \frac{dx}{x}.$$

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$\int \frac{d(y+1)}{y+1} = \int \frac{dx}{x}$$

Замечание: в случае, когда в левой и правой частях дифференциального уравнения интегралы обращаются в логарифмические функции, необходимо прибавлять не постоянную C, а постоянную $\ln C$. Это позволяет упростить ответ, воспользовавшись такими свойствами логарифмов, как

$$\ln|a| + \ln|b| = \ln|a \cdot b| \quad \text{или} \quad \ln|a| - \ln|b| = \ln\left|\frac{a}{b}\right| \quad (b \neq 0).$$

Возвращаясь к нашему дифференциальному уравнению, получим $\ln|y+1| = \ln|x| + \ln C$, $\ln|y+1| = \ln|Cx|$, $y+1 = Cx$.
Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $y = Cx - 1$.
Ответ: $y = Cx - 1$.

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка $Pdx+Qdy=0$ называется **линейным**, если отношение $\frac{P}{Q}$ содержит лишь в первой степени (линейно). Линейное уравнение принято записывать в виде $y' + P(x)\cdot y = Q(x)$.

Алгоритм решения

1. Воспользуемся подстановкой $y=UV$, где U и V –функции от переменной x, тогда $y' = U'V + UV.'$

Получим уравнение вида $U'V + UV' + P(x)\cdot UV = Q(x).$

2. Первое слагаемое $U'V$ переписываем, а из второго и третьего выносим общий множитель U за скобки, то есть получим равенство $U'V + U(V' + P(x)\cdot V) = Q(x).$

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

3. Обнуляем скобку, получая при этом новое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида $V' + P(x) \cdot V = 0$, из которого находим неизвестную переменную V (используя замену $V' = \frac{dV}{dx}$).

Замечание 1: постоянную C принимаем за ноль.

4. В уравнение из пункта 2, заменяя выражение $V' + P(x) \cdot V$ нулём, получим уравнение вида $U'V = Q(x)$. Подставляя в него значение V, найденное в пункте 3 и замену $U' = \frac{dU}{dx}$, находим неизвестную переменную .

Замечание 2: постоянную C писать обязательно.

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

5. Общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка находится путём подстановки в $y=UV$ значения переменных U и V, найденные в пунктах 4 и 3 соответственно.

Замечание 3: если в задании имеется дополнительное условие вида $y(x_0)=y_0$ (задача Коши), то может быть найдено частное решение, удовлетворяющее данному условию. Для его нахождения достаточно подставить в общее решение замены $x=x_0$, $y=y_0$, после чего найти конкретное значение постоянной $C=C_0$. Подставляя это значение в общее решение дифференциального уравнения, получаем искомое частное решение.

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 4 Найти решение задачи Коши $y' + 2xy = 2x^2 \cdot e^{-x^2}$, y(0)=2.

Решение.

$$y' + 2xy = 2x^2 \cdot e^{-x^2},$$
$$U'V + UV' + 2xUV = 2x^2 \cdot e^{-x^2},$$
$$U'V + U\left(V' + 2xV\right) = 2x^2 \cdot e^{-x^2},$$

$$V' + 2xV = 0,$$
$$V' = -2xV,$$
$$\frac{dV}{dx} = -2xV,$$
$$\frac{dV}{V} = -2xdx,$$
$$\int \frac{dV}{V} = -2\int xdx,$$
$$\ln|V| = -2 \cdot \frac{x^2}{2},$$
$$\ln|V| = -x^2,$$
$$V = e^{-x} \quad (C = 0).$$

$$U'V = 2x^2 \cdot e^{-x^2},$$
$$U' \cdot e^{-x^2} = 2x^2 \cdot e^{-x^2},$$
$$U' = 2x^2,$$
$$\frac{dU}{dx} = 2x^2,$$
$$dU = 2x^2 dx,$$
$$\int dU = 2\int x^2 dx,$$
$$U = \frac{2x^3}{3} + C.$$

Общее решение найдём из замены $y=UV$:

$$y = \left(\frac{2x^3}{3} + C\right) \cdot e^{-x}$$

Частное решение найдём, используя условие $y(0)=2$. Подставим $x=0$, $y=2$ в общее решение:

$$\left(0 + C\right) \cdot e^0 = 2,$$
$$C = 2,$$
$$y = \left(\frac{2x^3}{3} + 2\right) \cdot e^{-x}.$$

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка также может иметь вид $x' + P(y) \cdot x = Q(y)$.

Решение аналогично, только подстановка в этом случае следующая:

$$x = UV, \qquad x' = U'V + UV,'$$

где $V' = \frac{dV}{dy}$, $U' = \frac{dU}{dy}$.

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 5 Найти решение задачи Коши $x'y + x = y^2,\ x(1) = -\frac{2}{3}.$

Решение.

$$x'y + x = y^2, \quad \big| : y \neq 0$$

$$x' + \frac{1}{y} \cdot x = y,$$

$$U'V + UV' + \frac{1}{y} \cdot UV = y,$$

$$U'V + U\left(V' + \frac{V}{y}\right) = y,$$

$V' + \frac{V}{y} = 0,$	$U'V = y,$	$x = UV$

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

$$V' + \frac{V}{y} = 0,$$
$$V' = -\frac{V}{y},$$
$$\frac{dV}{dy} = -\frac{V}{y},$$
$$\frac{dV}{V} = -\frac{dy}{y},$$
$$\int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dy}{y},$$
$$\ln|V| = -\ln|y|,$$
$$\ln|V| = \ln|y^{-1}|,$$
$$V = \frac{1}{y} \quad (C = 0).$$

$$U'V = y,$$
$$U' \cdot \frac{1}{y} = y,$$
$$U' = y^2,$$
$$\frac{dU}{dy} = y^2,$$
$$dU = y^2 dy,$$
$$\int dU = \int y^2 dy,$$
$$U = \frac{y^3}{3} + C.$$

Общее решение найдём из замены $x=UV$:

$$x = \left(\frac{y^3}{3} + C\right) \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{3} + \frac{C}{y}.$$

Частное решение найдём, используя условие $x(1) = -\frac{2}{3}$.

Подставим $x = -\frac{2}{3}$, $y=1$ в общее решение:

$$\frac{1^2}{3} + \frac{C}{1} = -\frac{2}{3},$$
$$C = -1,$$
$$x = \frac{y^2}{3} - \frac{1}{y}.$$

4.2.3 Дифференциальные уравнения Бернулли

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^n \quad (\text{или} \quad x' + P(y)\cdot x = Q(y)\cdot x^n),$$

где $n\neq 0$, $n\neq 1$ называется **уравнением Бернулли**.

Схема решения уравнений Бернулли аналогична решению линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

4.2.3 Дифференциальные уравнения Бернулли

Пример 6 Найти решение задачи Коши $y' - 4 \cdot \frac{y}{x} = x \cdot \sqrt{y}$, $y\left(e^2\right) = e^8$.

Решение.

$$y' - 4 \cdot \frac{y}{x} = x \cdot \sqrt{y},$$

$$U'V + UV' - 4 \cdot \frac{UV}{x} = x \cdot \sqrt{UV},$$

$$U'V + U\left(V' - 4 \cdot \frac{V}{x}\right) = x \cdot \sqrt{U} \cdot \sqrt{V},$$

$V' - 4 \cdot \frac{V}{x} = 0,$	$U'V = x \cdot \sqrt{U} \cdot \sqrt{V},$	$y = UV$

4.2.3 Дифференциальные уравнения Бернулли

$$V' - 4 \cdot \frac{V}{x} = 0,$$
$$V' = 4 \cdot \frac{V}{x},$$
$$\frac{dV}{dx} = 4 \cdot \frac{V}{x},$$
$$\frac{dV}{V} = 4 \cdot \frac{dx}{x},$$
$$\int \frac{dV}{V} = 4 \int \frac{dx}{x},$$
$$\ln|V| = 4 \ln|x|,$$
$$\ln|V| = \ln|x^4|,$$
$$V = x^4 \quad (C = 0).$$

$$U'V = x \cdot \sqrt{U} \cdot \sqrt{V},$$
$$U'\sqrt{V} = x \cdot \sqrt{U},$$
$$U'\sqrt{x^4} = x \cdot \sqrt{U},$$
$$U' \cdot x^2 = x \cdot \sqrt{U},$$
$$U' = \frac{\sqrt{U}}{x},$$
$$\frac{dU}{dx} = \frac{\sqrt{U}}{x},$$
$$\frac{dU}{\sqrt{U}} = \frac{dx}{x},$$
$$\int \frac{dU}{\sqrt{U_1}} = \int \frac{dx}{x},$$
$$\int U^{-\frac{1}{2}} dU = \int \frac{dx}{x},$$
$$\frac{U^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \ln|x| + \ln C,$$
$$\sqrt{U} = \frac{1}{2} \cdot \ln|Cx|,$$
$$U = \ln^2 \sqrt{Cx}.$$

Общее решение найдём из замены $y=UV$:

$$y = x^4 \cdot \ln^2 \sqrt{Cx}.$$

Частное решение найдём, используя условие $y(e^2) = e^8$.

Подставим $x=e^2$, $y=e^8$ в общее решение:

$$(e^2)^4 \cdot \ln^2 \sqrt{e^2 \cdot C} = e^8,$$
$$e^8 \cdot \ln^2 (e \cdot \sqrt{C}) = e^8,$$
$$\ln^2 (e \cdot \sqrt{C}) = 1,$$
$$\ln (e \cdot \sqrt{C}) = \ln e,$$
$$e \cdot \sqrt{C} = e,$$
$$\sqrt{C} = 1,$$
$$C = 1,$$
$$y = x^4 \cdot \ln^2 \sqrt{x}.$$

Спасибо за внимание!