Дисциплина: МАТЕМАТИКА

Раздел 4: Дифференциальные уравнения

Лекция №14
Дифференциальные уравнения первого порядка

Разработчик: Бредихина Ольга Александровна

4 Дифференциальные уравнения
4.1 Основные понятия

Всякое уравнение, содержащее, по крайней мере, одну производную неизвестной функции, называется **дифференциальным уравнением**.

В общем виде дифференциальное уравнение можно записать в виде

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}\right) = 0,$$

где F – некоторая функция от $n+2$ переменных, y – некоторая функция от x, $n \geq 1$.

Порядок n старшей производной, входящей в запись уравнения, называется **порядком дифференциального уравнения**.

Если из уравнения в общем виде выразить в явном виде старшую производную, то получим уравнение вида

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$

называемое **уравнением, разрешённым относительно старшей производной**.

4 Дифференциальные уравнения
4.1 Основные понятия

Функция $y=\varphi(x)$ называется **решением** дифференциального уравнения, если последнее обращается в тождество после подстановки $y=\varphi(x)$.

Обычно дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений. Для выделения из множества решений отдельного, называемого частным решением, необходимо задавать дополнительные условия в виде

$$y(x_0)=y_0,\quad y'(x_0)=y'_0,\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=y^{(n-1)}{}_0.$$

Задача нахождения решения, удовлетворяющего дополнительным условиям, называется **задачей Коши**, а решение уравнения – **решением задачи Коши**.

4 Дифференциальные уравнения
4.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение **первого порядка** имеет общий вид $F(x, y, y') = 0$.

Дифференциальное уравнение первого порядка, **разрешённое относительно** y', имеет вид $y' = f(x, y)$.

Дифференциальное уравнение первого порядка, разрешённое относительно производной, можно также записать в **дифференциальной форме**:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x,y)$, $Q(x,y)$ – известные функции.

4 Дифференциальные уравнения

4.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Условие $y(x_0)=y_0$ называется **начальным условием**.

Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y=\varphi(x,C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

– функция $\varphi(x,C)$ является решением дифференциального уравнения при каждом фиксированным значении C;

– каково бы ни было начальное условие, можно найти такое значение постоянной $C=C_0$, что функция $y=\varphi(x,C_0)$, удовлетворяет заданному начальному условию.

Частным решением дифференциального уравнения первого порядка называется функция $y=\varphi(x,C_0)$, полученная из общего решения при конкретном значении постоянной $C=C_0$.

4.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Уравнение вида $P(x)dx + Q(y)dy = 0$ называется **дифференциальным уравнением с разделёнными переменными**.

Алгоритм решения

1. Перенесём $Q(y)dy$ в правую часть уравнения:

$$P(x)dx = -Q(y)dy$$

2. Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int P(x)dx = -\int Q(y)dy$$

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Пример 1 Найти общее решение дифференциального уравнения $xdx+\dfrac{dy}{y}=0$.

Решение.

$$xdx+\frac{dy}{y}=0,\quad xdx=-\frac{dy}{y},\quad \int xdx=-\int\frac{dy}{y},\quad \frac{x^2}{2}=-\ln|y|+C,$$

$$\ln|y|=C-\frac{x^2}{2},\quad y=e^{C-\frac{x^2}{2}},$$

$$y=e^C\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Заменим $C_1=e^C$, тогда общее решение исходного дифференциального уравнения примет вид:

$$y=C_1\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

№	Формула	№	Формула
1	$\int dx=\int 1\cdot dx=x+C$	9	$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=tgx+C$
2	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$, где $n\neq -1$	10	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-ctgx+C$
2^*	$\int xdx=\frac{x^2}{2}+C$	11	$\int\frac{dx}{\sin x}=\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$
2^{**}	$\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$	12	$\int\frac{dx}{\cos x}=\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$
3	$\int\frac{dx}{x}=\ln\|x\|+C$	13	$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$
4	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	13^*	$\int\frac{dx}{x^2+1}=arctgx+C$
4^*	$\int e^x dx=e^x+C$	14	$\int\frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\|+C$ $\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{a-x}{a+x}\right\|+C$
5	$\int\sin xdx=-\cos x+C$	15	$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
6	$\int\cos xdx=\sin x+C$	15^*	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$
7	$\int tgxdx=-\ln\|\cos x\|+C$	16	$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$
8	$\int ctgxdx=\ln\|\sin x\|+C$		

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Более общий случай описывают **дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными**, которые имеют вид $P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx + P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy = 0.$

Алгоритм решения

1. Перенесём $P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy$ в правую часть уравнения:

$$P_1(x)\cdot Q_1(y)\cdot dx = -P_2(x)\cdot Q_2(y)\cdot dy$$

2. Разделим переменные, используя пропорцию:

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = -\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy$$

3. Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx = -\int\frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy$$

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Пример 2 Найти общее решение дифференциального уравнения $xy^2dx + ydy = xdx$.

Решение.

$$xy^2dx + ydy = xdx,$$

$$xy^2dx - xdx = -ydy,$$

$$(y^2-1)xdx = -ydy,$$

$$xdx = -\frac{y}{y^2-1}dy,$$

$$\int xdx = -\int \frac{y}{y^2-1}dy.$$

Интеграл в левой части уравнения является простым табличным, а интеграл, полученный в правой части уравнения, решим отдельно.

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$-\int \frac{y}{y^2-1}dy = -\int \frac{1}{y^2-1}\cdot ydy = \begin{bmatrix} \textit{обозначим} \quad t = y^2-1 \\ dt = \left(y^2-1\right)' dy = 2ydy \\ ydy = \dfrac{dt}{2} \end{bmatrix} = -\int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| + C.$$

Таким образом, уравнение примет вид: $\dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| + C.$

Заменим $C = \dfrac{C_1}{2}$, получим $\dfrac{x^2}{2} = -\dfrac{1}{2}\ln\left|y^2-1\right| + \dfrac{C_1}{2}.$

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $x^2 = C_1 - \ln\left|y^2-1\right|.$

Ответ: $x^2 = C_1 - \ln\left|y^2-1\right|.$

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Также уравнение с разделяющимися переменными может иметь вид $y' = f(x)\cdot g(y)$.

Алгоритм решения

1. Заменим $y' = \frac{dy}{dx}$, получим уравнение вида $\frac{dy}{dx} = f(x)\cdot g(y)$.

2. Разделим переменные, используя пропорцию:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx.$$

3. Проинтегрируем левую и правую части уравнения:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx.$$

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Пример 3 Найти общее решение дифференциального уравнения

Решение.

$$xy' - y = 1,$$

$$xy' = y + 1,$$

$$x \cdot \frac{dy}{dx} = y + 1,$$

$$\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\int \frac{d(y+1)}{y+1} = \int \frac{dx}{x}.$$

4.2.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

$$\int \frac{d(y+1)}{y+1} = \int \frac{dx}{x}$$

Замечание: в случае, когда в левой и правой частях дифференциального уравнения интегралы обращаются в логарифмические функции, необходимо прибавлять не постоянную C, а постоянную $\ln C$. Это позволяет упростить ответ, воспользовавшись такими свойствами логарифмов, как

$$\ln|a| + \ln|b| = \ln|a \cdot b| \quad \text{или} \quad \ln|a| - \ln|b| = \ln\left|\frac{a}{b}\right| \quad (b \neq 0).$$

Возвращаясь к нашему дифференциальному уравнению, получим $\ln|y+1| = \ln|x| + \ln C$, $\ln|y+1| = \ln|Cx|$, $y+1 = Cx$.

Таким образом, общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид $y = Cx - 1$.

Ответ: $y = Cx - 1$.

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка $Pdx+Qdy=0$ называется **линейным**, если отношение $\frac{P}{Q}$ содержит лишь в первой степени (линейно). Линейное уравнение принято записывать в виде $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$.

Алгоритм решения

1. Воспользуемся подстановкой $y=UV$, где U и V –функции от переменной x, тогда $y' = U'V + UV'$.

Получим уравнение вида $U'V + UV' + P(x) \cdot UV = Q(x)$.

2. Первое слагаемое $U'V$ переписываем, а из второго и третьего выносим общий множитель U за скобки, то есть получим равенство $U'V + U(V' + P(x) \cdot V) = Q(x)$.

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

3. Обнуляем скобку, получая при этом новое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными вида $V' + P(x) \cdot V = 0$, из которого находим неизвестную переменную V (используя замену $V' = \frac{dV}{dx}$).

Замечание 1: постоянную C принимаем за ноль.

4. В уравнение из пункта 2, заменяя выражение $V' + P(x) \cdot V$ нулём, получим уравнение вида $U'V = Q(x)$. Подставляя в него значение V, найденное в пункте 3 и замену $U' = \frac{dU}{dx}$, находим неизвестную переменную .

Замечание 2: постоянную C писать обязательно.

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

5. Общее решение линейного дифференциального уравнения первого порядка находится путём подстановки в $y=UV$ значения переменных U и V, найденные в пунктах 4 и 3 соответственно.

Замечание 3: если в задании имеется дополнительное условие вида $y(x_0)=y_0$ (задача Коши), то может быть найдено частное решение, удовлетворяющее данному условию. Для его нахождения достаточно подставить в общее решение замены $x=x_0$, $y=y_0$, после чего найти конкретное значение постоянной $C=C_0$. Подставляя это значение в общее решение дифференциального уравнения, получаем искомое частное решение.

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 4 Найти решение задачи Коши $y' + 2xy = 2x^2 \cdot e^{-x^2}$, y(0)=2.

Решение.

$$y' + 2xy = 2x^2 \cdot e^{-x^2},$$

$$U'V + UV' + 2xUV = 2x^2 \cdot e^{-x^2},$$

$$U'V + U\left(V' + 2xV\right) = 2x^2 \cdot e^{-x^2},$$

$$V' + 2xV = 0,$$

$$V' = -2xV,$$

$$\frac{dV}{dx} = -2xV,$$

$$\frac{dV}{V} = -2xdx,$$

$$\int \frac{dV}{V} = -2\int xdx,$$

$$\ln|V| = -2 \cdot \frac{x^2}{2},$$

$$\ln|V| = -x^2,$$

$$V = e^{-x} \quad (C = 0).$$

$$U'V = 2x^2 \cdot e^{-x^2},$$

$$U' \cdot e^{-x^2} = 2x^2 \cdot e^{-x^2},$$

$$U' = 2x^2,$$

$$\frac{dU}{dx} = 2x^2,$$

$$dU = 2x^2 dx,$$

$$\int dU = 2\int x^2 dx,$$

$$U = \frac{2x^3}{3} + C.$$

Общее решение найдём из замены $y=UV$:

$$y = \left(\frac{2x^3}{3} + C\right) \cdot e^{-x}$$

Частное решение найдём, используя условие $y(0)=2$. Подставим $x=0$, $y=2$ в общее решение:

$$(0 + C) \cdot e^0 = 2,$$

$$C = 2,$$

$$y = \left(\frac{2x^3}{3} + 2\right) \cdot e^{-x}.$$

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка также может иметь вид $x' + P(y) \cdot x = Q(y)$.

Решение аналогично, только подстановка в этом случае следующая:

$$x = UV, \qquad x' = U'V + UV',$$

где $V' = \dfrac{dV}{dy}$, $U' = \dfrac{dU}{dy}$.

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Пример 5 Найти решение задачи Коши $x'y + x = y^2, \ x(1) = -\frac{2}{3}.$

Решение.

$$x'y + x = y^2, \quad \Big| : y \neq 0$$

$$x' + \frac{1}{y} \cdot x = y,$$

$$U'V + UV' + \frac{1}{y} \cdot UV = y,$$

$$U'V + U\left(V' + \frac{V}{y}\right) = y,$$

$V' + \frac{V}{y} = 0,$	$U'V = y,$	$x = UV$

4.2.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

$$V' + \frac{V}{y} = 0,$$
$$V' = -\frac{V}{y},$$
$$\frac{dV}{dy} = -\frac{V}{y},$$
$$\frac{dV}{V} = -\frac{dy}{y},$$
$$\int \frac{dV}{V} = -\int \frac{dy}{y},$$
$$\ln|V| = -\ln|y|,$$
$$\ln|V| = \ln\left|y^{-1}\right|,$$
$$V = \frac{1}{y} \quad (C = 0).$$

$$U'V = y,$$
$$U' \cdot \frac{1}{y} = y,$$
$$U' = y^2,$$
$$\frac{dU}{dy} = y^2,$$
$$dU = y^2 dy,$$
$$\int dU = \int y^2 dy,$$
$$U = \frac{y^3}{3} + C.$$

Общее решение найдём из замены $x=UV$:

$$x = \left(\frac{y^3}{3} + C\right) \cdot \frac{1}{y} = \frac{y^2}{3} + \frac{C}{y}.$$

Частное решение найдём, используя условие $x(1) = -\frac{2}{3}$.

Подставим $x = -\frac{2}{3}$, $y=1$ в общее решение:

$$\frac{1^2}{3} + \frac{C}{1} = -\frac{2}{3},$$
$$C = -1,$$
$$x = \frac{y^2}{3} - \frac{1}{y}.$$

4.2.3 Дифференциальные уравнения Бернулли

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)\cdot y = Q(x)\cdot y^n \quad (\text{или} \quad x' + P(y)\cdot x = Q(y)\cdot x^n),$$

где $n \neq 0$, $n \neq 1$ называется **уравнением Бернулли**.

Схема решения уравнений Бернулли аналогична решению линейных дифференциальных уравнений первого порядка.

4.2.3 Дифференциальные уравнения Бернулли

Пример 6 Найти решение задачи Коши $y' - 4 \cdot \dfrac{y}{x} = x \cdot \sqrt{y},$ $y\left(e^2\right) = e^8.$

Решение.

$$y' - 4 \cdot \frac{y}{x} = x \cdot \sqrt{y},$$

$$U'V + UV' - 4 \cdot \frac{UV}{x} = x \cdot \sqrt{UV},$$

$$U'V + U\left(V' - 4 \cdot \frac{V}{x}\right) = x \cdot \sqrt{U} \cdot \sqrt{V},$$

$V' - 4 \cdot \dfrac{V}{x} = 0,$	$U'V = x \cdot \sqrt{U} \cdot \sqrt{V},$	$y = UV$

4.2.3 Дифференциальные уравнения Бернулли

$$V' - 4\cdot\frac{V}{x} = 0,$$
$$V' = 4\cdot\frac{V}{x},$$
$$\frac{dV}{dx} = 4\cdot\frac{V}{x},$$
$$\frac{dV}{V} = 4\cdot\frac{dx}{x},$$
$$\int\frac{dV}{V} = 4\int\frac{dx}{x},$$
$$\ln|V| = 4\ln|x|,$$
$$\ln|V| = \ln\left|x^4\right|,$$
$$V = x^4 \quad (C=0).$$

$$U'V = x\cdot\sqrt{U}\cdot\sqrt{V},$$
$$U'\sqrt{V} = x\cdot\sqrt{U},$$
$$U'\sqrt{x^4} = x\cdot\sqrt{U},$$
$$U'\cdot x^2 = x\cdot\sqrt{U},$$
$$U' = \frac{\sqrt{U}}{x},$$
$$\frac{dU}{dx} = \frac{\sqrt{U}}{x},$$
$$\frac{dU}{\sqrt{U}} = \frac{dx}{x},$$
$$\int\frac{dU}{\sqrt{U}} = \int\frac{dx}{x},$$
$$\int U^{-\frac{1}{2}}dU = \int\frac{dx}{x},$$
$$\frac{U^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \ln|x| + \ln C,$$
$$\sqrt{U} = \frac{1}{2}\cdot\ln|Cx|,$$
$$U = \ln^2\sqrt{Cx}.$$

Общее решение найдём из замены $y=UV$:

$$y = x^4\cdot\ln^2\sqrt{Cx}.$$

Частное решение найдём, используя условие $y\left(e^2\right) = e^8$. Подставим $x=e^2$, $y=e^8$ в общее решение:

$$\left(e^2\right)^4\cdot\ln^2\sqrt{e^2\cdot C} = e^8,$$
$$e^8\cdot\ln^2\left(e\cdot\sqrt{C}\right) = e^8,$$
$$\ln^2\left(e\cdot\sqrt{C}\right) = 1,$$
$$\ln\left(e\cdot\sqrt{C}\right) = \ln e,$$
$$e\cdot\sqrt{C} = e,$$
$$\sqrt{C} = 1,$$
$$C = 1,$$
$$y = x^4\cdot\ln^2\sqrt{x}.$$

Спасибо за внимание!