Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ. Лекция 14 октября 2020 года

Глава. Линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\dots+a_n(x)y=f(x) \quad (1)$$

где $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$ — заданные функции из $C[a,b]$, а $y(x)$ — неизвестная функция.

Определение решения уравнения (1) было дано раньше.

Опр. Решение задачи Коши для уравнения (1) состоит в том, чтобы среди всех решений уравнения (1) найти те, которые удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0 \\ y'(x_0)=y_0' \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (2)$$

где $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа

или геометрически это означает, что среди всех интегральных кривых уравнения (1) нужно найти те, которые проходят через точку $(x_0, \vec{y_0}) \in R^1_x \otimes R^n_{\vec{y}}$, где $\vec{y_0}=(y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$

Уравнение (1) можно свести к системе.

Обозначим: $\begin{cases} y_1=y \\ y_2=y' \\ \dots \\ y_n=y^{(n-1)} \end{cases}$

Продифференцировав эти равенства, получим:

$$\begin{cases} y_1' = y' = y_2 \\ y_2' = y'' = y_3 \\ \dots\dots\dots \\ y_{n-1}' = (y^{(n-2)})' = y^{(n-1)} = y_n \\ y_n' = y^{(n)} = -a_n y_1 - \dots - a_1 y_n + f \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots\dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_n y_1 - \dots - a_1 y_n + f \end{cases} \qquad (1')$$

Вывод. Линейное дифференциальное уравнение n-ого порядка (1) эквивалентно линейной системе (1').

Систему (1') запишем в матричном виде. Для этого обозначим

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & \dots & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{f} \qquad (1')$$

Начальные условия (2) примут вид

$$\vec{Y}(x_0) = \vec{Y}_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (2')$$

Теорема (ТСЕ решения задачи Коши (1)-(2))

Пусть в уравнении (1) $a_k(x)$, $(k=\overline{1,n})$ и $f(x)$ принадлежат $C[a,b]$. Тогда для $\forall x_0 \in [a,b]$ и $\forall (y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in R^n$ существует решение задачи Коши (1) - (2), определённое на всём $[a,b]$ и это решение единственное.

Док-во: Так как задача Коши (1) - (2) эквивалентна задаче Коши для линейной системы (1') - (2'), а для системы (1') - (2') Теорема существования и единственности решения задачи Коши (1')-(2') была доказана ранее. Из ТСЕ задачи Коши (1')-(2') следует, что $\vec{Y} \in \vec{C}^{(1)}[a,b]$. Следовательно, $y_n \in C^{(1)}[a,b]$, то есть $y^{(n-1)} \in C^{(1)}[a,b]$. Откуда следует, что $y(x) \in C^{(n)}[a,b]$. #

§ Однородное линейное уравнение n-ого порядка с переменными коэффициентами.

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=0 \qquad (1_0)$$

Всюду ниже будем предполагать, что $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x) \in C[a,b]$. Тогда для уравнения (1_0) будет справедлива ТСЕ решения задачи Коши.

Обозначим через H — множество решений уравнения (1_0). Оно не пусто (так содержит $y(x)\equiv 0$)

Утв. 1) H — линейное пространство

Утв 2) $\dim H \le n$

Утв 3) $\dim H = n$

Док-во: Так как уравнение (1_0) эквивалентно системе

$$\vec{y}\,'=A\vec{y} \qquad (1_0')$$

а для системы $(1_0')$ все три утверждения справедливы (были доказаны ранее). Следовательно, все эти три утверждения справедливы и для (1_0) #

Опр Любые n — линейно независимых решений уравнения (1_0) называются фундаментальной системой решений (ФСР) уравнения (1₀)

Утв. ФСР для уравнения (1₀) существует и их бесконечно много.

Док-во Следует из эквивалентности уравнения (1₀) и системы (1₀') и существования ФСР для системы (1₀') #

Построение Возьмём произвольный базис $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_n$ в $\mathbb{R}^n$.

$$\vec{b}_k = \begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1,n}$$

и рассмотрим n-задач Коши

$$\mathcal{L}y = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \qquad (1_0)$$

$$\begin{cases} y(x_0) = b_{1k} \\ y'(x_0) = b_{2k} \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = b_{nk} \end{cases} \qquad (2_k), \quad k = \overline{1,n}$$

при $k=1$ в силу ТСЕ $\exists!\ y_1(x)$

при $k=2$ в силу ТСЕ $\exists!\ y_2(x)$

. . . .

при $k=n$ в силу ТСЕ $\exists!\ y_n(x)$

Так построенная система функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — линейно независима. Следовательно, она является фундаментальной системой решений (ФСР) уравнения (1₀).

<u>Док-во</u> Для решений $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ эквивалентной задачи Коши (1'₀)–(2'ₖ) рассмотрим определитель Вронского $W[\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x)] = W(x)$ в точке $x = x_0$

Тогда получим $W(x_0) = \det[\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n] \neq 0$ (Так как $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ – линейно независимы)

Из теоремы об определителе Вронского тогда следует, что $\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{bmatrix}, \dots, \vec{y}_n = \begin{bmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$

линейно независимы. Откуда следует, что и $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – линейно независимы. (это легко доказывается методом „от противного")

Следовательно, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – образуют ФСР. Так как базисов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ в R^n бесконечно много, то и ФСР уравнения (1₀) бесконечно много

<u>Следствие</u> ФСР $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (1₀) является базисом в H.

§ <u>Общее решение однородного уравнения (1₀)</u>

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_n(x) y(x) = 0 \quad (1_0)$$

Теорема. Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — ФСР уравнения (1_0). Тогда общее решение однородного уравнения (1_0) y_{oo} имеет вид

$$y_{oo}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), \ C_k \in R \quad (*)$$

C_k — произвольные числа $k = \overline{1,n}$

Док-во. 1) $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ является решением уравнения (1_0) для любых чисел $C_1, C_2, \dots, C_n$ (следует из утверждения 1 для H)

2) Для любого решения $y(x)$ уравнения (1_0) (из того, что $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ является ФСР уравнения (1_0) и следовательно является базисом в H) следует, что существуют числа $C_1, C_2, \dots, C_n$ такие что $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$

Из 1) и 2) следует, что $(*)$ есть общее решение уравнения (1_0). #

§ Определитель Вронского

Опр. Определителем Вронского системы функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \in C^{(n-1)}[a,b]$ называется

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n] = W(x) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Лемма Для того чтобы система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \in C^{(n-1)}[a,b]$ была (линейно независима) линейно зависима необходимо и достаточно чтобы была (линейно независима) линейно зависима система вектор-функций $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n(x)$

где $\vec{\varphi}_k(x) = \begin{bmatrix} \varphi_k \\ \varphi_k' \\ \vdots \\ \varphi_k^{(n-1)} \end{bmatrix}$, $k = \overline{1,n}$

Док-во.

a) $\Longrightarrow$ Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно зависимы. Докажем, что $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно зависимы. Так как $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно зависимы, то существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ $\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \neq 0\right)$:

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) \equiv 0 \text{ на } [a,b]$$

Продифференцируем это равенство, получим:

$$\alpha_1 \varphi_1'(x) + \alpha_2 \varphi_2'(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n'(x) \equiv 0$$

Дифференцируя k-раз, $k = \overline{1,(n-1)}$, получим

$$\begin{cases} \alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) \equiv 0 \\ \alpha_1 \varphi_1'(x) + \alpha_2 \varphi_2'(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n'(x) \equiv 0 \\ \dots \\ \alpha_1 \varphi_1^{(n-1)}(x) + \alpha_2 \varphi_2^{(n-1)} + \dots + \alpha_n \varphi_n^{(n-1)}(x) \equiv 0 \end{cases} \qquad (A)$$

Систему (A) запишем в векторном виде:

$$\alpha_1 \vec{\varphi}_1(x) + \alpha_2 \vec{\varphi}_2(x) + \dots + \alpha_n \vec{\varphi}_n(x) = \vec{\theta}$$

причём $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2$. Следовательно, $\vec{\varphi}_1(x), \vec{\varphi}_2(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно зависимы #

а) $\Longleftarrow$ Дано $\vec{\varphi}_1(x), \vec{\varphi}_2(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно зависимы. Требуется доказать, что $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно зависимы. Так как $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно зависимы, то существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$: $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \neq 0$:

$$\alpha_1 \vec{\varphi}_1(x) + \alpha_2 \vec{\varphi}_2(x) + \dots + \alpha_n \vec{\varphi}_n(x) \equiv 0 \text{ на } [a;b]$$

Запишем 1-ую координату этого равенства

$$\alpha_1 \varphi_1(x) + \alpha_2 \varphi_2(x) + \dots + \alpha_n \varphi_n(x) \equiv 0 \text{ на } [a;b]$$

причём $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \neq 0$. Следовательно, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n$ линейно зависимы. #

б) $\Longrightarrow$ Дано $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно независимы. Надо доказать, что $\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n$ линейно независимы. Докажем это методом „от противного". Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно независимы, а $\vec{\varphi}_1(x), \vec{\varphi}_2(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно зависимы. Тогда из а) $\Longleftarrow$ следует, что $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$

линейно зависимы, что противоречит предположению. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

б) $\Leftarrow$ Дано $\vec{\varphi}_1(x), \vec{\varphi}_2(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно независимы. Требуется доказать, что $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ также линейно независимы. Будем доказывать это утверждение методом „от противного".

Пусть $\vec{\varphi}_1(x), \vec{\varphi}_2(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ – линейно независимы, а $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ линейно зависимы. Тогда согласно а) $\Rightarrow$ следует, что $\vec{\varphi}_1(x), \vec{\varphi}_2(x), \ldots, \vec{\varphi}_n(x)$ также линейно зависимы, что противоречит предположению. Полученное противоречие и доказывает утверждение #

Теорема (об определителе Вронского для решений уравнения (1о))

1) Решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (1о) линейно независимы тогда и только тогда, когда $W(x) \neq 0$ для любого $x \in [a;b]$

2) Решения $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ уравнения (1о) линейно независимы тогда и только

тогда, когда существует $x_0 \in [a; b]$ такое, что $W(x_0) \neq 0$.

3) Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$, то $W(x) = 0$ для любого $x \in [a; b]$.

4) Если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — решения уравнения (1_0) и существует $x_0 \in [a; b]$ такое, что $W(x_0) = 0$, то $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависимы на $[a, b]$ и $W(x) = 0$ для любого $x \in [a; b]$.

Док-во. Следует из леммы и соответствующего утверждения для системы (I_0), эквивалентного линейному уравнению (1_0).

Замечание. Если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ не являются решениями уравнения (1_0), то теорема об определителе Вронского может не выполняться.

Пример. Рассмотрим функции

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{при } x \in [-1, 0] \\ 0, & \text{при } x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [-1, 0] \\ x^2, & \text{при } x \in [0; 1] \end{cases}$$

1) функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на $[-1;1]$. Действительно, пусть

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) \equiv 0 \text{ на } [-1;1] \quad (*)$$

Тогда при $x=-1$ имеем $\alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0 = 0$

Следовательно, $\alpha_1 = 0$

при $x = 1$ имеем $\alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 = 0$

Следовательно, $\alpha_2 = 0$

Следовательно, равенство $(*)$ выполняется только при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Поэтому $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на $[-1;1]$

2) Определитель Вронского

$$W(x)\Big|_{[-1,0]} = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} \equiv 0, \quad W(x)\Big|_{[0;1]} = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} \equiv 0$$

#

§ Формула Лиувилля

Теорема Пусть $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — решения уравнения (1_0). Тогда для определителя Вронского этих решений справедлива формула

$$W(x) = W(x_0) \exp\left(-\int_{x_0}^{x} a_1(\tau)\,d\tau\right)$$

Док-во: Доказательство следует из эквивалентности уравнения $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0 \quad (1_0)$ и системы $\vec{y}\,' = A\vec{y} \quad (T_0)$ где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_n & \cdots & \cdots & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}.$$

и формулы Лиувилля для системы (Го)
и того, что $Sp A = -a_1(x)$ #