

Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович - доцент кафедры №30 Высшей
математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ. лекция 14 октября 2020 года
Глава. Линейные дифференциальные
уравнения n -ого порядка

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = f(x) \quad (1)$$

где $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x), f(x)$ — заданные
функции из $C[a, b]$, а $y(x)$ — неизвестная
функция.

Определим решения уравнения (1) было
дано раньше.

Опр. Решение задачи Коши для уравне-
ния (1) состоит в том, чтобы среди всех
решений уравнения (1) найти те, которые
удовлетворяют условиям:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} \quad (2)$$

где $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа
или геометрически это означает, что среди
всех интегральных кривых уравнения (1)
нужно найти те, которые проходят через
точку $(x_0, \vec{y}_0) \in R_x^1 \otimes R_y^n$, где $\vec{y}_0 = (y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$
Уравнение (1) можно свести к системе.

Обозначим:

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y_2 = y' \\ \vdots \\ y_n = y^{(n-1)} \end{cases}$$

Продифференцировав эти равенства, получим:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}' = (y^{(n-2)})' = y^{(n-1)} = y_n \\ y_n' = y^{(n)} = -a_n y_1 - \dots - a_1 y_n + f \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_n y_1 - \dots - a_1 y_n + f \end{cases} \quad (1')$$

Вывод. Линейное дифференциальное уравнение n -ого порядка (1) эквивалентно линейной системе (1').

Систему (1') запишем в матричном виде. Для этого обозначим

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \vec{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ f \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & \dots & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}$$

Тогда уравнение (1) примет вид

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y} + \vec{f} \quad (1')$$

Начальные условия $\bar{y}(x_0)$ примут вид

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0 = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_0' \\ \vdots \\ y_0^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad (2')$$

Теорема (ТСЕ) решения задачи Коши (1)-(2)

Пусть в уравнении (1) $a_k(x)$, ($k=1, n$) и $f(x)$ принадлежат $C[a, b]$. Тогда для $\forall x_0 \in [a, b]$ и $\forall (y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in \mathbb{R}^n$

существует решение задачи Коши (1)-(2), определенное на всем $[a, b]$ и это решение единственное.

Док-во. Поскольку задача Коши (1)-(2) эквивалентна задаче Коши для линейной системы (1')-(2'), а для системы (1')-(2') теорема существования и единственности решения задачи Коши (1')-(2') была доказана ранее. Из ТСЕ задачи Коши (1')-(2') следует, что $\bar{y}' \in C^{(1)}[a, b]$. Следовательно, $y_n \in C^{(1)}[a, b]$, то есть $y^{(n-1)} \in C^{(1)}[a, b]$. Откуда следует, что $y(x) \in C^{(n)}[a, b]$. #

§ Однопорядное линейное уравнение n -ого порядка с переменными коэффициентами.

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y = 0 \quad (1_0)$$

Всюду ниже будем предполагать, что $a_1(x), a_2(x), \dots, a_n(x) \in C[a, b]$. Тогда для уравнения (1_0) будет справедлива ТСЕ решения задачи Коши.

Обозначим через H — множество решений уравнения (1_0) . Оно не пусто (так содержит $y(x) \equiv 0$)

Утв. 1) H — линейное пространство

Утв. 2) $\dim H \leq n$

Утв. 3) $\dim H = n$

Док-во) Так как уравнение (1_0) эквивалентно системе

$$y' = Ay \quad (1'_0)$$

а для системы $(1'_0)$ все три утверждения справедливы (были доказаны ранее). Следовательно, все эти три утверждения справедливы и для (1_0)

Опр) Любые n — линейно независимых решений уравнения (1_0) называются фундаментальной системой решений #

Нит (ФСР) уравнения (1₀)

Урав. ФСР для уравнения (1₀) существует
и их бесконечно много.

Док-во Следует из эквивалентности
уравнения (1₀) и системы (1₀') и су-
ществования ФСР для системы (1₀') ≠

Построение Возьмем произвольный
базис $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ в \mathbb{R}^n .

$$\vec{v}_k = \begin{bmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \\ \vdots \\ v_{nk} \end{bmatrix}, \quad k = \overline{1, n}$$

и рассмотрим n -задан Коши

$$\begin{cases} Ly = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0 & (1_0) \\ \begin{cases} y(x_0) = v_{1k} \\ y'(x_0) = v_{2k} \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = v_{nk} \end{cases} & (2_k), \quad k = \overline{1, n} \end{cases}$$

при $k=1$ в силу ТСЕ $\exists!$ $y_1(x)$

при $k=2$ в силу ТСЕ $\exists!$ $y_2(x)$

при $k=n$ в силу ТСЕ $\exists!$ $y_n(x)$

Так построенная система функций

$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — линейно неза-
висима. Следовательно, она является

-6-

Фундаментальной системой решений
(ФСР) уравнения (10).

Док-во Для решений $\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n$ эквивалентной задаче Коши (10') - (10'')

рассмотрим определитель Вронского
 $W[\vec{y}_1(x), \vec{y}_2(x), \dots, \vec{y}_n(x)] = W(x)$ в точке $x = x_0$

Тогда получим $W(x_0) = \det[\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n] \neq 0$
(так как $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ - линейно независимы)

Из Теоремы об определителе Вронского

Тогда следует, что $\vec{y}_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)} \end{bmatrix}, \dots, \vec{y}_n = \begin{bmatrix} y_n \\ y_n' \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$

линейно независимы. Откуда следует, что
и $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ - линейно независимы.
(это легко доказывается методом "от противного")

Следовательно, $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ -

образующая ФСР. Так как базис в

\mathbb{R}^n бесконечно много, то

и ФСР уравнения (10) бесконечно много

Следствие ФСР $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$
уравнения (10) является базисом в H .

§ Общее решение однородного
уравнения (10)

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \dots + a_n(x)y(x) = 0 \quad (I_0)$$

Теорема Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — ФСР уравнения (I_0) . Тогда общее решение однородного уравнения (I_0) имеет вид

$$y_{00}(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x), C_k \in \mathbb{R} \quad (*)$$

Док-во, 1) $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ является решением уравнения (I_0) для любых чисел C_1, C_2, \dots, C_n (следует из утверждения 1 для H).

2) Для любого решения $y(x)$ уравнения (I_0) (из того, что $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ является ФСР уравнения (I_0) и следовательно является базисом в H) следует, что существуют числа C_1, C_2, \dots, C_n такие что $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$

Из 1) и 2) следует, что $(*)$ есть общее решение уравнения (I_0) . #

§ Определитель Вронского

Опр. Определитель Вронского системы функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \in C^{(n-1)}[a, b]$ называется

$$W[\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n] = W(x) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \dots & \varphi_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)} & \varphi_2^{(n-1)} & \dots & \varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

Лемма Для того чтобы система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \in C^{(n-1)} [a, b]$ была (линейно независима) линейно зависима необходимо и достаточно чтобы была (линейно независима) линейно зависима система вектор-функций $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n(x)$

$$\text{где } \vec{\varphi}_k(x) = \begin{bmatrix} \varphi_k \\ \varphi_k' \\ \vdots \\ \varphi_k^{(n-1)} \end{bmatrix}, k = \overline{1, n}$$

Док-во.

a) \Rightarrow Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно зависима. Докажем, что $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно зависима. Так как $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно зависима, то существуют числа d_1, d_2, \dots, d_n ($\sum_{k=1}^n d_k^2 \neq 0$):

$$d_1 \varphi_1(x) + d_2 \varphi_2(x) + \dots + d_n \varphi_n(x) \equiv 0 \text{ на } [a, b]$$

Дифференцируем это равенство, получим:

$$d_1 \varphi_1'(x) + d_2 \varphi_2'(x) + \dots + d_n \varphi_n'(x) \equiv 0$$

Дифференцируем k -раз, $k = \overline{1, (n-1)}$, получим

$$\begin{cases} d_1 \varphi_1(x) + d_2 \varphi_2(x) + \dots + d_n \varphi_n(x) \equiv 0 \\ d_1 \varphi_1'(x) + d_2 \varphi_2'(x) + \dots + d_n \varphi_n'(x) \equiv 0 \\ \vdots \\ d_1 \varphi_1^{(n-1)}(x) + d_2 \varphi_2^{(n-1)}(x) + \dots + d_n \varphi_n^{(n-1)}(x) \equiv 0 \end{cases} \quad (A)$$

Систему (A) запишем в векторной форме:

$$d_1 \vec{\varphi}_1(x) + d_2 \vec{\varphi}_2(x) + \dots + d_n \vec{\varphi}_n(x) = \vec{0}$$

примем $\sum_{k=1}^n d_k^2$ скалярно, $\vec{\varphi}_1(x), \vec{\varphi}_2(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно зависимы \neq

а) \Leftarrow Дано $\vec{\varphi}_1(x), \vec{\varphi}_2(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно зависимы. Требуется доказать, что $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно зависимы. Так как $\vec{\varphi}_1, \vec{\varphi}_2, \dots, \vec{\varphi}_n$ линейно зависимы, то существуют числа

$$d_1, d_2, \dots, d_n : \sum_{k=1}^n d_k^2 \neq 0 :$$

$$d_1 \vec{\varphi}_1(x) + d_2 \vec{\varphi}_2(x) + \dots + d_n \vec{\varphi}_n(x) \equiv 0 \text{ на } [a; b]$$

Запишем 1-ую координату этого равенства

$$d_1 \varphi_1(x) + d_2 \varphi_2(x) + \dots + d_n \varphi_n(x) \equiv 0 \text{ на } [a; b]$$

примем $\sum_{k=1}^n d_k^2 \neq 0$. Скалярно, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно зависимы. \neq

б) \Rightarrow Дано $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно независимы. Надо доказать, что $\vec{\varphi}_1, \dots, \vec{\varphi}_n$ линейно независимы. Докажем это методом "от противного". Пусть

$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно независимы,

а $\vec{\varphi}_1(x), \vec{\varphi}_2(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно зависимы

Тогда из а) \Leftarrow следует, что $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$

линейно зависимы, это противоречит предположению. Полученное противоречие и доказывает утверждение.

б) \Leftarrow Дано $\vec{\varphi}_1(x), \vec{\varphi}_2(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ линейно независимы. Требуется доказать, что $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ также линейно независимы. Будем доказывать это утверждение методом "от противного".

Пусть $\vec{\varphi}_1(x), \vec{\varphi}_2(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ — линейно независимы, а $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ линейно зависимы. Тогда согласно а) \Rightarrow следует, что $\vec{\varphi}_1(x), \vec{\varphi}_2(x), \dots, \vec{\varphi}_n(x)$ также линейно зависимы, что противоречит предположению. Полученное противоречие и доказывает утверждение $\#$

Теорема (об определителе Вронского для решений уравнения (1))

- 1) Решения $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (1) линейно независимы тогда и только тогда, когда $W(x) \neq 0$ для любого $x \in [a; b]$
- 2) Решения $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (1) линейно независимы тогда и только

-11-

Тогда, когда существует $x_0 \in [a; b]$
такое что, $W(x_0) \neq 0$.

3) Если функции $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$
линейно зависимы на $[a, b]$, то
 $W(x) = 0$ для любого $x \in [a, b]$.

4) Если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — решения
уравнения (10) и существует $x_0 \in [a, b]$
такое что $W(x_0) = 0$, то $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$
линейно зависимы на $[a, b]$ и $W(x) = 0$
для любого $x \in [a, b]$.

Док-во Следует из леммы и соответствующего утверждения для системы (10), эквивалентного линейному уравнению (10)

Замечание Если $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$
не являются решениями уравнения (10),
то Теорема об определителе Вронского
может не выполняться.

Пример, Рассмотрим функции

$$y_1(x) = \begin{cases} x^2, & \text{при } x \in [-1, 0] \\ 0, & \text{при } x \in [0, 1] \end{cases}$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x \in [-1, 0] \\ x^2, & \text{при } x \in [0, 1] \end{cases}$$

-12-

1) Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на $[-1; 1]$. Действительно, пусть

$$d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x) \equiv 0 \text{ на } [-1; 1] \quad (*)$$

Тогда при $x = -1$ имеем $d_1 + d_2 \cdot 0 = 0$
Следовательно, $d_1 = 0$

при $x = 1$ имеем $d_1 \cdot 0 + d_2 = 0$

Следовательно, $d_2 = 0$

Следовательно, равенство $(*)$ выполняется только при $d_1 = d_2 = 0$. Поэтому

$y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейно независимы на $[-1; 1]$

2) Определим Вронского

$$W(x)|_{[-1, 0]} = \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix} \equiv 0, \quad W(x)|_{[0, 1]} = \begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} \equiv 0 \quad \#$$

β Формула Лиувилля

Теорема Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ — решения уравнения (1_0) . Тогда для определителя Вронского этих решений справедлива формула $W(x) = W(x_0) \cdot \exp\left(-\int_{x_0}^x a_1(\xi) d\xi\right)$

Док-во: Докажем, что справедливо соотношение уравнения $y'' + a_1(x)y' + \dots + a_n y = 0 \quad (1_0)$ и системы $y' = Ay \quad (1_1)$ где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_n & \dots & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix}.$$

и группа Ли $\text{Lie}(G)$ для системы (F_0)
и тогда, тогда $\text{Sp}A = -a_1(x) \neq$