ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА С ЭЛЕМЕНТАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Вид учебной работы	**Объем часов**
Максимальная учебная нагрузка	**54**
Обязательная учебная нагрузка	**36**
в том числе:	
теоретическое обучение	26
практические занятия (если предусмотрено)	10
Самостоятельная работа	**18**
Итоговая аттестация проводится в форме *дифференцированного зачета*	

Основы теории множеств

Базовые обозначения

Введем некоторые общие обозначения, которые будут встречаться нам в процессе изучения всего материала курса.

Под записью $i = \overline{k, l}$ будем понимать, что величина i пробегает все целые значения от k до l.

$\lceil x \rceil$ - наименьшее большее целое для числа x.

$\lfloor x \rfloor$ - наибольшее меньшее целое для числа x.

Наряду со стандартными обозначениями для множеств чисел
$\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел,
$\mathbb{Z}$ — множество целых чисел,
$\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел,
будем использовать $\mathbb{N}_0$ для обозначения множества неотрицательных целых чисел:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Понятие множества

Определение *Множество — любая совокупность определенных и различных между собой объектов, мыслимая как единое целое. Эти объекты называются элементами множества.*

Символ $\in$ обозначает отношение принадлежности. Запись $x \in S$ значит, что элемент x принадлежит множеству S (x является элементом S). Запись $x \notin S$ означает, что в множестве S нет элемента x.

Множество не содержащее элементов обозначают $\varnothing$. Такое множество называют *пустым множеством*

Обозначают $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ — множество, элементами которого являются $a_1, a_2, ..., a_k$ и только они.

Пусть $P(x)$ некоторая последовательность символов, задающая высказывание о x, которое будет принимать истинное или ложное значение при подстановке везде в нем вместо символа x одного и того же элемента.

Будем обозначать $\{x \mid P(x)\}$ — множество всех элементов, для которых высказывание $P(x)$ принимает истинное значение.

Понятие множества

Пример 1 *1)* $\{x \mid x$ — *положительное число меньше 6*$\} = \{1,2,3,4,5\}$;
2) $\{x \mid x = 2y,\ y \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x$ — *четное число*$\}$.

Множества считаются равными, если состоят из одних и тех же элементов. Записывают $A = B$, если множества A и B равны, и $A \neq B$ — иначе.

Пример 2 *1)* $\{2,4,6\} = \{4,2,6\}$.
2) $\{x \mid x^2 + 2x = 0\} = \{0,-2\}$.
3) $\{a,b\} \neq \{\{a,b\}\}$.

Мощностью множества называется число его элементов. Мощность множества A обозначают $|A|$.

Пример 3 *1)* $|\{1,2,3,4,5\}| = 5$;
2) $|\{1,2,3,2\}| = 3$;
3) $|\mathbb{N}| = \infty$.

Подмножества

Обозначают $A \subseteq B$ и говорят, что множество A является подмножеством множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Если также известно, что $A \neq B$, говорят, что A является собственным подмножеством множества B и пишут $A \subset B$.

Пример 4 *1)* $\{1,3\} \subset \{5,3,1\}$*;*
2) $X \subseteq X$ *для любого множества* X *(рефлексивность);*
3) $X \subseteq Y,\, Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$ *(транзитивность);*
4) $\varnothing \subseteq X$ *для любого множества* X*.*

Множество всех подмножеств множества A будем обозначать 2^A. Мощность множества всех подмножеств множества с n элементами равна 2^n: $|2^A| = 2^{|A|}$.

Пример 5 *Пусть* $A = \{a,b,c\}$. *Тогда* $2^A = \{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},\ A\}$. *Видно, что в этом множестве* $2^{|A|} = 2^3 = 8$ *элементов.*

Операции над множествами

Пусть U — универсальное множество — множество всех элементов рассматриваемой предметной области.

Объединение

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечение

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Дополнение (абсолютное дополнение)

$$\overline{A} = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

Разность (относительное дополнение)

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Очевидными свойсвами объединения, пересечения и разности множеств являются то, что для любых двух множеств A и B выполняются включения:

$$(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B),$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} \subseteq A.$$

Симметрическая разность

$$A \dot{-} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Основные тождества алгебры множеств

Для любых подмножеств A, B и C универсального множества U выполняются следующие тождества:

1) *Коммутативность:* a) $A \cup B = B \cup A$; b) $A \cap B = B \cap A$;

2) *Ассоциативность:*

a) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$; b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;

3) a) *Дистрибутивность* $\cup$ *относительно* $\cap$:

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

b) *Дистрибутивность* $\cap$ *относительно* $\cup$:

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

4) a) $A \cup \varnothing = A$; b) $A \cap \varnothing = \varnothing$;

5) a) $A \cup U = U$; b) $A \cap U = A$;

6) a) $A \cup \overline{A} = U$; b) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;

7) *Идемпотентность:* a) $A \cup A = A$; b) $A \cap A = A$;

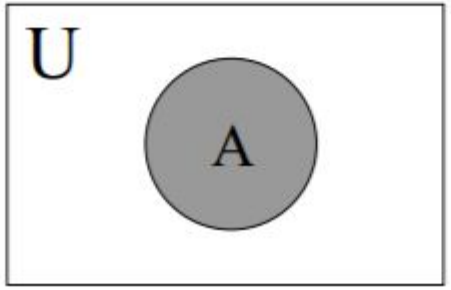
8) *Законы де Моргана:* a) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; b) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;

9) *Законы поглощения:* a) $A \cup (A \cap B) = A$; b) $A \cap (A \cup B) = A$.

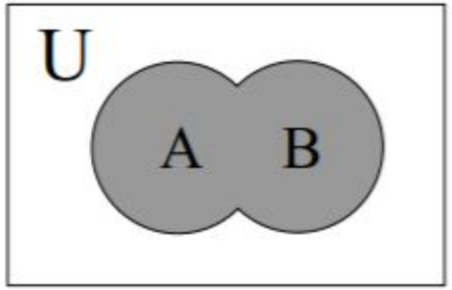
10) *Инволютивный закон:* $\overline{\overline{A}} = A$.

Диаграммы Эйлера-Венна

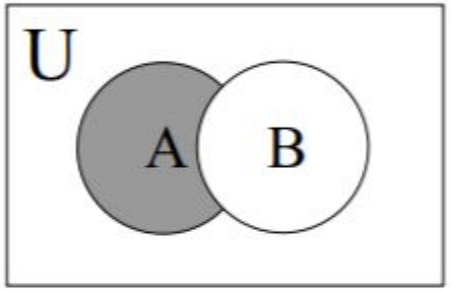
Диаграммы Эйлера-Венна помогают наглядно проиллюстрировать многие соотношения между множествами. На рисунке 32 показано применение диаграмм Эйлера-Венна для наглядного изображения основных операций над множествами.



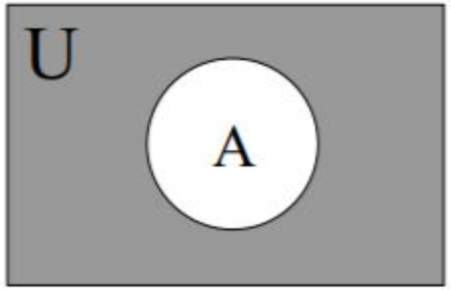
A



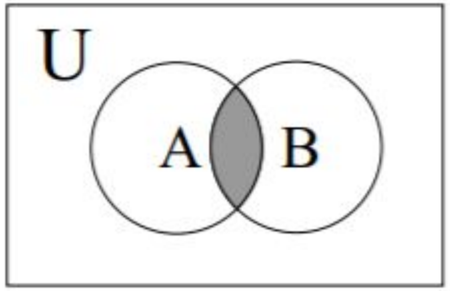
$A \cup B$



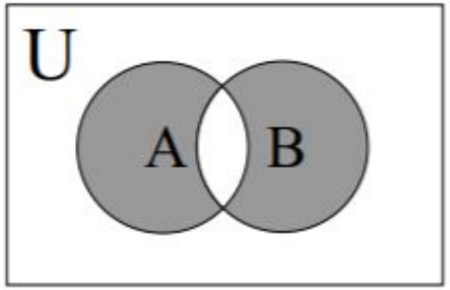
$A \setminus B$



$\overline{A}$



$A \cap B$



$A \dot{-} B$

Прямое произведение множеств

Пусть $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_l\}$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_1, b_l), (a_2, b_1), ..., (a_k, b_l)\} = \\ = \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

— прямое (декартово) произведение множеств A и B.

Во многих случаях порядок проведения операций произведения не важен. Тогда считают, что

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}.$$

Аналогично определяется прямое произведение любого конечного числа множеств.

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_t = \{(a_1, a_2, ..., a_t) \mid a_i \in A_i,\ i = \overline{1, t}\}$$

Если речь будет идти о прямом произведении множества на себя, то будем заменять запись нескольких множеств, на знак степени:

$$\underbrace{A \times A \times ... \times A}_{t} = A^t.$$

Пример 6 Пусть $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$. Тогда множество $A \times B$ состоит из следующих девяти элементов: (1, 4), (2, 4), (3, 4), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (1, 2), (2, 2), (3, 2). Графически элементы произведения множеств $A \times B$ удобно помещать на «координатной плоскости», или в клетках прямоугольной таблицы:

$$\begin{array}{ccc} (1,4) & (2,4) & (3,4) \\ (1,3) & (2,3) & (3,3) \\ (1,2) & (2,2) & (3,2) \end{array}$$

Практикум

1.1. Пусть универсальное множество U — множество всех сотрудников некоторой организации; A — множество всех сотрудников старше 35 лет; B — множество сотрудников, имеющих стаж работы более 10 лет; C — множество менеджеров фирмы. Определим, каковы характеристические свойства элементов следующих множеств: а) $\overline{B}$; б) $\overline{A} \cap B \cap C$; в) $A \cup (B \cap \overline{C})$; г) $B \backslash C$; д) $C \backslash B$.

Решение. а) $\overline{B}$ — множество сотрудников организации, стаж работы которых не превышает 10 лет.

б) $\overline{A} \cap B \cap C$ — множество менеджеров фирмы не старше 35 лет, имеющих стаж работы более 10 лет.

в) $A \cup (B \cap \overline{C})$ — множество всех сотрудников фирмы старше 35 лет, а также сотрудников, не являющихся менеджерами, стаж работы которых более 10 лет.

г) $B \backslash C$ — множество сотрудников организации со стажем работы более 10 лет, не работающих менеджерами.

д) $C \backslash B$ — множество менеджеров со стажем работы не более 10 лет.

Практикум

1.2. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, 4\}$. Найдем: а) $\overline{A} \cup \overline{B}$; б) $\overline{A \cap B}$; в) $A \cap \overline{B}$; г) $(B \setminus A) \cup \overline{C}$; д) $A \triangle (B \cup C)$.

Решение. а) $\overline{A} \cup \overline{B} = (U \setminus A) \cup (U \setminus B) = \{2\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 4\}$.

б) $\overline{A \cap B} = U \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3\} = \{1, 2, 4\}$.

в) $A \cap \overline{B} = A \cap (U \setminus B) = \{1, 3, 4\} \cap \{1, 4\} = \{1, 4\}$.

г) $(B \setminus A) \cup \overline{C} = \{2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

д) $A \triangle (B \cup C) = \{1, 3, 4\} \triangle \{2, 3, 4\} = \{1, 2\}$.

Практикум

1. 3 Пусть $X = \{0, 1\}$, $Y = \{a, b\}$. Найдем $X \times Y$, $Y \times X$, X^2, $X \times Y \times X$.

Решение. Имеем:

$X \times Y = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$;

$Y \times X = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1)\}$;

$X^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$;

$X \times Y \times X = \{(0, a, 0), (0, b, 0), (1, a, 0), (1, b, 0), (0, a, 1), (0, b, 1), (1, a, 1), (1, b, 1)\}$.

Самостоятельно 1.7, 1.8, 1.12

Задания для самостоятельной работы

1.6. Пусть универсальное множество U — множество всех студентов университета; A — множество всех студентов первого курса; B — множество студентов, получающих стипендию; C — множество студентов, не имеющих академических задолженностей. Укажите характеристические свойства элементов следующих множеств: а) $\overline{A} \cap B$; б) $A \cup (B \cap \overline{C})$. Изобразите множества A, B, C на диаграмме Эйлера — Венна.

1.7. Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$. Найдите: а) $A \cup B \cup C$; б) $A \cap B \cap C$; в) $A \setminus (B \cup C)$; г) $(A \setminus B) \cup C$; д) $A \triangle (B \cup C)$.

1.8. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 6\}$, $C = \{2, 5, 6\}$. Найдите: а) $A \setminus C$; б) $B \triangle C$; в) $C \setminus B$; г) $\overline{A} \cup B$; д) $A \cap \overline{C}$; е) $(C \cup A) \setminus B$.

1.9. Пусть $U = \mathbb{R}$ — универсальное множество, A — множество решений неравенства $x^2 - 5x + 4 \leqslant 0$, B — множество решений неравенства $x^2 > 2$. Найдите: а) $A \cap B$; б) $A \cap \overline{B}$; в) $\overline{A} \cap \overline{B}$; г) $A \triangle B$; д) $\overline{A} \triangle \overline{B}$.

1.10. а) Даны два непересекающихся множества A и B. Что представляют собой множества $A \setminus B$ и $A \triangle B$?

б) Пусть A и B — такие множества, что $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Что представляют собой множества $A \cap B$ и $A \cup B$?

1.11. Докажите справедливость следующих тождеств:

а) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$; б) $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$;

в) $(A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$; г) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$.

1.12. Пусть $X = \{a, b\}$, $Y = \{b, c, d\}$. Найдите $X \times Y$, $Y \times X$, Y^2, $X \times Y \times X$.

1.13. Относительно каждого из приведенных ниже отображений установите, является ли оно инъективным, сюръективным, биективным:

а) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — отображение множества действительных чисел в себя, заданное формулой $f(x) = 3x$;