

ДИСКРЕТНАЯ
МАТЕМАТИКА С
ЭЛЕМЕНТАМИ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ
ЛОГИКИ

Вид учебной работы	Объем часов
Максимальная учебная нагрузка	54
Обязательная учебная нагрузка	36
в том числе:	
теоретическое обучение	26
практические занятия (если предусмотрено)	10
Самостоятельная работа	18
Итоговая аттестация проводится в форме дифференцированного зачета	

Основы теории множеств

Базовые обозначения

Введем некоторые общие обозначения, которые будут встречаться нам в процессе изучения всего материала курса.

Под записью $i = \overline{k, l}$ будем понимать, что величина i пробегает все целые значения от k до l .

$\lceil x \rceil$ - наименьшее большее целое для числа x .

$\lfloor x \rfloor$ - наибольшее меньшее целое для числа x .

Наряду со стандартными обозначениями для множеств чисел

\mathbb{N} — множество натуральных чисел,

\mathbb{Z} — множество целых чисел,

\mathbb{R} — множество вещественных чисел,

будем использовать \mathbb{N}_0 для обозначения множества неотрицательных целых чисел:

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Понятие множества

Определение *Множество — любая совокупность определенных и различных между собой объектов, мыслимая как единое целое. Эти объекты называются элементами множества.*

Символ \in обозначает отношение принадлежности. Запись $x \in S$ значит, что элемент x принадлежит множеству S (x является элементом S). Запись $x \notin S$ означает, что в множестве S нет элемента x .

Множество не содержащее элементов обозначают \emptyset . Такое множество называют *пустым множеством*

Обозначают $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$ — множество, элементами которого являются a_1, a_2, \dots, a_k и только они.

Пусть $P(x)$ некоторая последовательность символов, задающая высказывание о x , которое будет принимать истинное или ложное значение при подстановке везде в нем вместо символа x одного и того же элемента.

Будем обозначать $\{x \mid P(x)\}$ — множество всех элементов, для которых высказывание $P(x)$ принимает истинное значение.

Понятие множества

Пример 1 1) $\{x \mid x \text{ — положительное число меньше } 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;
2) $\{x \mid x = 2y, y \in \mathbb{N}\} = \{x \mid x \text{ — четное число}\}$.

Множества считаются равными, если состоят из одних и тех же элементов. Записывают $A = B$, если множества A и B равны, и $A \neq B$ — иначе.

Пример 2 1) $\{2, 4, 6\} = \{4, 2, 6\}$.
2) $\{x \mid x^2 + 2x = 0\} = \{0, -2\}$.
3) $\{a, b\} \neq \{\{a, b\}\}$.

Мощностью множества называется число его элементов. Мощность множества A обозначают $|A|$.

Пример 3 1) $|\{1, 2, 3, 4, 5\}| = 5$;
2) $|\{1, 2, 3, 2\}| = 3$;
3) $|\mathbb{N}| = \infty$.

Подмножества

Обозначают $A \subseteq B$ и говорят, что множество A является подмножеством множества B , если каждый элемент множества A является элементом множества B . Если также известно, что $A \neq B$, говорят, что A является собственным подмножеством множества B и пишут $A \subset B$.

- Пример 4**
- 1) $\{1, 3\} \subset \{5, 3, 1\}$;
 - 2) $X \subseteq X$ для любого множества X (рефлексивность);
 - 3) $X \subseteq Y, Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$ (транзитивность);
 - 4) $\emptyset \subseteq X$ для любого множества X .

Множество всех подмножеств множества A будем обозначать 2^A .
Мощность множества всех подмножеств множества с n элементами равна 2^n : $|2^A| = 2^{|A|}$.

Пример 5 Пусть $A = \{a, b, c\}$. Тогда $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$. Видно, что в этом множестве $2^{|A|} = 2^3 = 8$ элементов.

Операции над множествами

Пусть U — универсальное множество — множество всех элементов рассматриваемой предметной области.

Объединение

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечение

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Дополнение (абсолютное дополнение)

$$\bar{A} = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}.$$

Разность (относительное дополнение)

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Очевидными свойствами объединения, пересечения и разности множеств являются то, что для любых двух множеств A и B выполняются включения:

$$(A \cap B) \subseteq A \subseteq (A \cup B),$$

$$A \setminus B = A \cap \bar{B} \subseteq A.$$

Симметрическая разность

$$A \dot{\cup} B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Основные тождества алгебры множеств

Для любых подмножеств A , B и C универсального множества U выполняются следующие тождества:

1) Коммутативность: a) $A \cup B = B \cup A$; b) $A \cap B = B \cap A$;

2) Ассоциативность:

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$; b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$;

3) a) Дистрибутивность \cup относительно \cap :

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$

b) Дистрибутивность \cap относительно \cup :

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C);$$

4) a) $A \cup \emptyset = A$; b) $A \cap \emptyset = \emptyset$;

5) a) $A \cup U = U$; b) $A \cap U = A$;

6) a) $A \cup \bar{A} = U$; b) $A \cap \bar{A} = \emptyset$;

7) Идемпотентность: a) $A \cup A = A$; b) $A \cap A = A$;

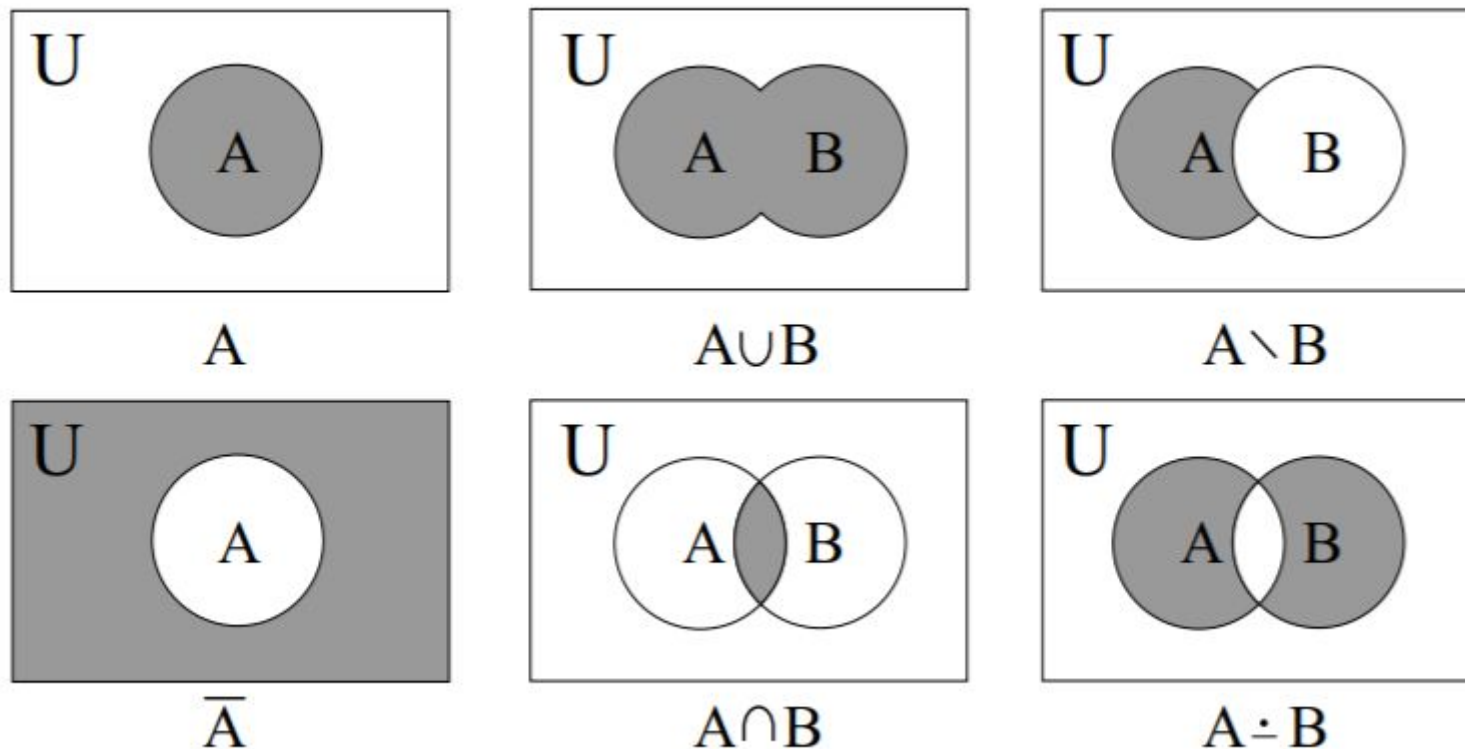
8) Законы де Моргана: a) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$; b) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;

9) Законы поглощения: a) $A \cup (A \cap B) = A$; b) $A \cap (A \cup B) = A$.

10) Инволютивный закон: $\overline{\bar{A}} = A$.

Диаграммы Эйлера-Венна

Диаграммы Эйлера-Венна помогают наглядно проиллюстрировать многие соотношения между множествами. На рисунке 32 показано применение диаграмм Эйлера-Венна для наглядного изображения основных операций над множествами.



Прямое произведение множеств

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \dots, b_l\}$

$$\begin{aligned} A \times B &= \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), \dots, (a_1, b_l), (a_2, b_1), \dots, (a_k, b_l)\} = \\ &= \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \end{aligned}$$

— прямое (декартово) произведение множеств A и B .

Во многих случаях порядок проведения операций произведения не важен. Тогда считают, что

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Аналогично определяется прямое произведение любого конечного числа множеств.

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_t = \{(a_1, a_2, \dots, a_t) \mid a_i \in A_i, i = \overline{1, t}\}$$

Если речь будет идти о прямом произведении множества на себя, то будем заменять запись нескольких множеств, на знак степени:

$$\underbrace{A \times A \times \dots \times A}_t = A^t.$$

Пример 6 Пусть $A = \{1, 2, 3\}$ и $B = \{2, 3, 4\}$. Тогда множество $A \times B$ состоит из следующих девяти элементов: $(1, 4)$, $(2, 4)$, $(3, 4)$, $(1, 3)$, $(2, 3)$, $(3, 3)$, $(1, 2)$, $(2, 2)$, $(3, 2)$. Графически элементы произведения множеств $A \times B$ удобно помещать на «координатной плоскости», или в клетках прямоугольной таблицы:

$(1, 4)$	$(2, 4)$	$(3, 4)$
$(1, 3)$	$(2, 3)$	$(3, 3)$
$(1, 2)$	$(2, 2)$	$(3, 2)$

Практикум

1.1. Пусть универсальное множество U — множество всех сотрудников некоторой организации; A — множество всех сотрудников старше 35 лет; B — множество сотрудников, имеющих стаж работы более 10 лет; C — множество менеджеров фирмы. Определим, каковы характеристические свойства элементов следующих множеств: а) \overline{B} ; б) $\overline{A} \cap B \cap C$; в) $A \cup (B \cap \overline{C})$; г) $B \setminus C$; д) $C \setminus B$.

Решение. а) \overline{B} — множество сотрудников организации, стаж работы которых не превышает 10 лет.

б) $\overline{A} \cap B \cap C$ — множество менеджеров фирмы не старше 35 лет, имеющих стаж работы более 10 лет.

в) $A \cup (B \cap \overline{C})$ — множество всех сотрудников фирмы старше 35 лет, а также сотрудников, не являющихся менеджерами, стаж работы которых более 10 лет.

г) $B \setminus C$ — множество сотрудников организации со стажем работы более 10 лет, не работающих менеджерами.

д) $C \setminus B$ — множество менеджеров со стажем работы не более 10 лет.

Практикум

1.2. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4\}$, $A = \{1, 3, 4\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{2, 4\}$. Найдем: а) $\overline{A} \cup \overline{B}$; б) $\overline{A \cap B}$; в) $A \cap \overline{B}$; г) $(B \setminus A) \cup \overline{C}$; д) $A \Delta (B \cup C)$.

Решение. а) $\overline{A} \cup \overline{B} = (U \setminus A) \cup (U \setminus B) = \{2\} \cup \{1, 4\} = \{1, 2, 4\}$.

б) $\overline{A \cap B} = U \setminus (A \cap B) = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3\} = \{1, 2, 4\}$.

в) $A \cap \overline{B} = A \cap (U \setminus B) = \{1, 3, 4\} \cap \{1, 4\} = \{1, 4\}$.

г) $(B \setminus A) \cup \overline{C} = \{2\} \cup \{1, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

д) $A \Delta (B \cup C) = \{1, 3, 4\} \Delta \{2, 3, 4\} = \{1, 2\}$.

Практикум

1.3 Пусть $X = \{0, 1\}$, $Y = \{a, b\}$. Найдем $X \times Y$, $Y \times X$, X^2 , $X \times Y \times X$.

Решение. Имеем:

$$X \times Y = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\};$$

$$Y \times X = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1)\};$$

$$X^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\};$$

$$X \times Y \times X = \{(0, a, 0), (0, b, 0), (1, a, 0), (1, b, 0), (0, a, 1), (0, b, 1), (1, a, 1), (1, b, 1)\}.$$

Самостоятельно 1.7, 1.8, 1.12

Задания для самостоятельной работы

1.6. Пусть универсальное множество U — множество всех студентов университета; A — множество всех студентов первого курса; B — множество студентов, получающих стипендию; C — множество студентов, не имеющих академических задолженностей. Укажите характеристические свойства элементов следующих множеств: а) $\overline{A} \cap B$; б) $A \cup (B \cap \overline{C})$. Изобразите множества A, B, C на диаграмме Эйлера — Венна.

1.7. Пусть $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3\}$. Найдите: а) $A \cup B \cup C$; б) $A \cap B \cap C$; в) $A \setminus (B \cup C)$; г) $(A \setminus B) \cup C$; д) $A \Delta (B \cup C)$.

1.8. Пусть $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5, 6\}$, $C = \{2, 5, 6\}$. Найдите: а) $A \setminus C$; б) $B \Delta C$; в) $C \setminus B$; г) $\overline{A} \cup B$; д) $A \cap \overline{C}$; е) $(C \cup A) \setminus B$.

1.9. Пусть $U = \mathbb{R}$ — универсальное множество, A — множество решений неравенства $x^2 - 5x + 4 \leq 0$, B — множество решений неравенства $x^2 > 2$. Найдите: а) $A \cap B$; б) $A \cap \overline{B}$; в) $\overline{A} \cap \overline{B}$; г) $A \Delta B$; д) $\overline{A} \Delta \overline{B}$.

1.10. а) Даны два непересекающихся множества A и B . Что представляют собой множества $A \setminus B$ и $A \Delta B$?

б) Пусть A и B — такие множества, что $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Что представляют собой множества $A \cap B$ и $A \cup B$?

1.11. Докажите справедливость следующих тождеств:

а) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$; б) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;

в) $(A \setminus (A \setminus B)) = A \cap B$; г) $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$.

1.12. Пусть $X = \{a, b\}$, $Y = \{b, c, d\}$. Найдите $X \times Y$, $Y \times X$, Y^2 , $X \times Y \times X$.

1.13. Относительно каждого из приведенных ниже отображений установите, является ли оно инъективным, сюръективным, биективным:

а) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — отображение множества действительных чисел в себя, заданное формулой $f(x) = 3x$;