МОНОТОННОСТЬ. ЭКСТРЕМУМЫ

Монотонность, экстремумы.

Говорят, что функция $f(x)$ *возрастает (убывает) на интервале* (a, b), если для всех точек $x_1, x_2 \in (a, b)$ из того, что $x_2 > x_1$, следует, что $f(x_2) \geqslant f(x_1)$ $(f(x_2) \leqslant f(x_1))$. В случае выполнения строгих неравенств говорят, что функция *строго возрастает (убывает)*. Возрастающая либо убывающая на интервале функция называется *монотонной* на этом интервале.

Необходимое и достаточное условие монотонности дифференцируемой функции. Дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) на интервале (a, b) тогда, и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ $(f'(x) \leqslant 0)$ для всех $x \in (a, b)$.

Точка x_0 называется *точкой локального максимума (минимума)* функциии $f(x)$, если существует окрестность $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ точки x_0 такая, что для всех x из этой окрестности выполнено неравенство $f(x_0) > f(x)$ $(f(x_0) < f(x))$. Точки локального минимума и максимума называются *точками локального экстремума* функции.

Необходимое условие локального экстремума (теорема Ферма). Если x_0 - точка локального экстремума функции и существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

Таким образом, точки локального экстремума следует искать среди тех внутренних точек области определения функции, где производная равна нулю либо не существует. Такие точки называют *критическими*.

Достаточное условие локального экстремума. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на некотором интервале $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, причем $f'(x_0)=0$ или не определена, а слева от x_0 и справа от x_0 производная сохраняет определенный знак. Тогда, если $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус при переходе через точку x_0, то x_0 - точка локального максимума. Если же знак производной меняется с минуса на плюс, то x_0 - точка локального минимума. В остальных случаях (т.е. когда знак производной не меняется) x_0 не является точкой экстремума.

Пример 1. Найдем точки локального экстремума функции $y = \sqrt{x^2}$ (или, что то же самое, $y = |x|$).

Функция определена при всех значениях x. Чтобы найти ее критические точки, вычислим производную:

$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \begin{cases} \ \ 1 \text{ при } \ x > 0\,, \\ -1 \text{ при } \ x < 0\,, \\ \text{не существует при } \ \ x = 0\,. \end{cases}$$

Производная нигде не обращается в 0, не существует при $x = 0$. Критическая точка: $x = 0$. При $x < 0$ производная отрицательна, при $x > 0$ - положительна. При переходе через критическую точку знак производной меняется с минуса на плюс, следовательно, $x = 0$ - точка минимума. ■

Пример 2. Найдем промежутки монотонности и точки локального экстремума функции $y = \dfrac{x^2+6x+9}{x-1}$.

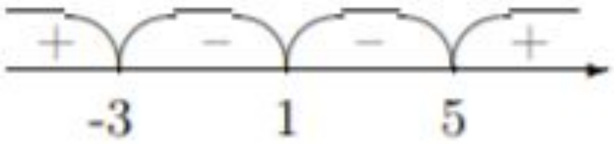
Область определения этой функции: $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$.
Вычислим производную:

$$y' = \frac{(2x+6)(x-1)-(x^2+6x+9)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-15}{(x-1)^2}.$$

Переходим к исследованию знака производной. Заметим, что знак производной может измениться лишь при переходе через через критические точки (где производная равна нулю либо не определена). Найдем эти точки.

Производная существует во всей области определения функции. Она равна нулю, если $x^2-2x-15=0$, а это выполнено при $x=-3$ и $x=5$. Это и есть критические точки.

Отметим на числовой прямой критические точки и определим знаки производной на полученных интервалах (см. рис. 2).



Р и с. 2

Видим, что функция возрастает на промежутках $(-\infty, -3)$ и $(5, +\infty)$ и убывает на промежутках $(-3, 1)$ и $(1, 5)$.

Точки локального экстремума: $x = -3$ - точка максимума, $x = 5$ - точка минимума. ■

Пример 3. Исследуем на монотонность и локальные экстремумы функцию $y = \ln(x^2 - 2x - 3)$.

Область определения функции - множество решений неравенства $x^2 - 2x - 3 > 0$. Нетрудно убедиться, что это будет объединение интервалов: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

Вычислим производную:

$$y' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x - 3}.$$

Производная существует во всей области определения функции. Она равна нулю при $x = 1$, но эта точка не входит в область определения функции. Таким образом, критических точек внутри области определения нет. Непосредственно определяем знак производной на двух интервалах, составляющих область определения: $y' > 0$, если $x \in (3, +\infty)$, и $y' < 0$, если $x \in (-\infty, -1)$. Получается, что функция возрастает на интервале $(3, +\infty)$ и убывает на интервале $(-\infty, -1)$. Точек локального экстремума нет.

$\blacksquare$

Достаточное условие локального экстремума в терминах производных высших порядков. Пусть функция $f(x)$ n раз дифференцируема на некотором интервале, содержащеи точку x_0, причем $f'(x_0) = 0, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тогда:

1. Если n - четное число, то x_0 является точкой экстремума, причем точкой максимума, если $f^{(n)}(x_0) < 0$, и минимума, если $f^{(n)}(x_0) > 0$.

2. 1. Если n - нечетное число, то x_0 не является точкой экстремума; если $f^{(n)}(x_0) < 0$, то функция убывает в некоторой окрестности этой точки, если же $f^{(n)}(x_0) > 0$, то возрастает.

Пример 4. Найдем точки экстремума функции

$$f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 .$$

Вычислим производную:

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(x-1)^2 .$$

$f'(x) = 0$ при $x = 0$ и $x = 1$ (критические точки).
Найдем производные высших порядков:
$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 , \ f'''(x) = 72x - 48 , \ \ldots$
Вычислим значения производных в критических точках.

$$f'(0) = 0 , \ f''(0) = 12 \neq 0 .$$

Порядок отличной от нуля производной равен 2 - четное число. Следовательно, $x = 0$ - точка экстремума, а именно - минимума, так как значение производной больше нуля.

$$f'(1) = 0 , \ f''(1) = 0 , \ f'''(1) = 24 \neq 0 .$$

Порядок отличной от нуля производной равен 3 - нечетное число. Следовательно, $x = 1$ не является точкой экстремума. В окрестности этой точки функция возрастает, так как значение этой производной положительно. ■

Найти промежутки монотонности и точки локального экстремума следующих функций:

1. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4.$ 2. $y = x(x-1)^2(x-2)^3.$

3. $y = \dfrac{\ln^2 x}{x}.$ 4. $y = x + \dfrac{1}{x}.$

5. $y = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}.$ 6. $y = \sqrt{2x - x^2}$

7. $y = x^2 e^{-x}.$ 8. $y = (x^2 - 2x)\ln x - \frac{3}{2}x^2 + 4x.$

Найти наименьшее и наибольшее значения функций:

9. $y = x^2 - 4x + 6$ на отрезке $[-3, 10]$.

10. $y = |x^2 - 3x + 2|$ на отрезке $[-10, 10]$.

11. $y = \sqrt{100 - x^2}$ на отрезке $[-6, 8]$.

12. $y = \dfrac{x-1}{x+1}$ на отрезке $[0, 4]$.

ДОМАШНЕЕ ЗАДАНИЕ

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ;
2. ЗАДАНИЕ 1, ЗАДАНИЕ 2 ИЗ П. 2.2 «ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ С ПОМОЩЬЮ ПРОИЗВОДНЫХ» (ИЗ СБОРИНИКА ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ЗАДАНИЙ, СТР. 69…)