

# Классификация связей. Принцип возможных перемещений.

*ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ.  
ДИНАМИКА*



# ЦЕЛЬ ЛЕКЦИИ

- Рассмотреть классификацию связей в динамике, познакомиться с принципом возможных перемещений и научиться с помощью этого принципа решать задачи статики.

# ПЛАН ЛЕКЦИИ

- Классификация связей;
- Принцип возможных перемещений;
- Решение задач;
- Заключение.

# СВЯЗИ

## ▣ В статике:

Связи - то, что не даёт перемещаться

- Действие связей описывается реакциями.

## ▣ В аналитической механике:

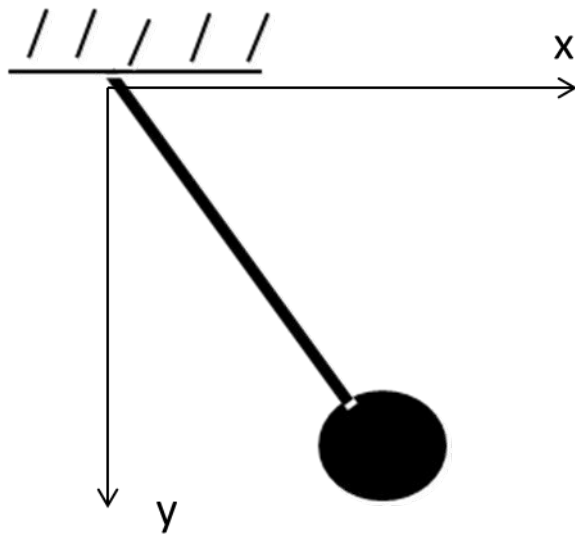
Связи - любого вида ограничения, которые налагаются на положение и скорость движущихся тел (точек).

- Действие связи описывается уравнениями (или неравенствами), которые определяют ограничения на движение тел.

# КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

- **Односторонние** (неудерживающие, освобождающие) - связи, которые задаются неравенством:

$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \leq 0$$

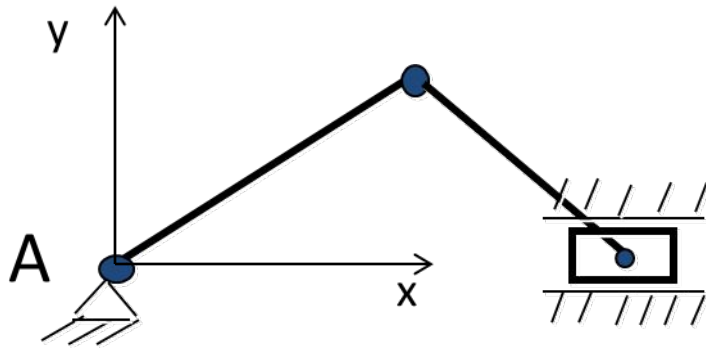


$$y^2 + x^2 - R^2 \leq 0$$

# КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

- ▣ **Двусторонние** (удерживающие, неосвобождающие) – связи, которые задаются уравнением:

$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$$



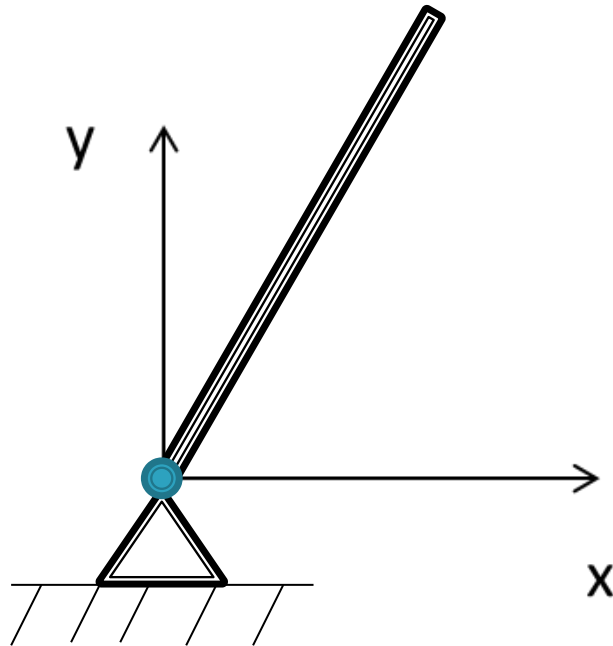
$$y_A = 0$$

$$x_A = 0$$

# КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

- **Стационарные связи** - связи, уравнения которых не содержат времени в явном виде:

$$f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$$



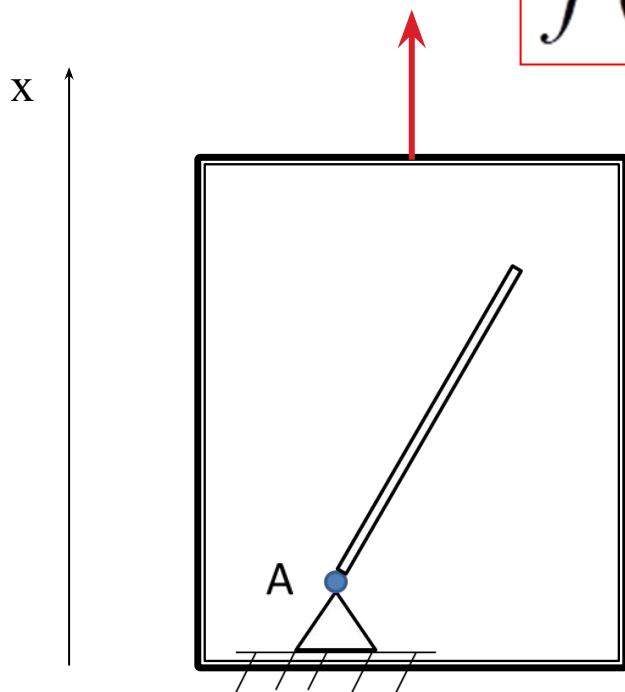
$$y_A = 0$$

$$x_A = 0$$

# КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

- **Нестационарные** связи - связи, уравнения которых содержат время в явном виде:

$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$$

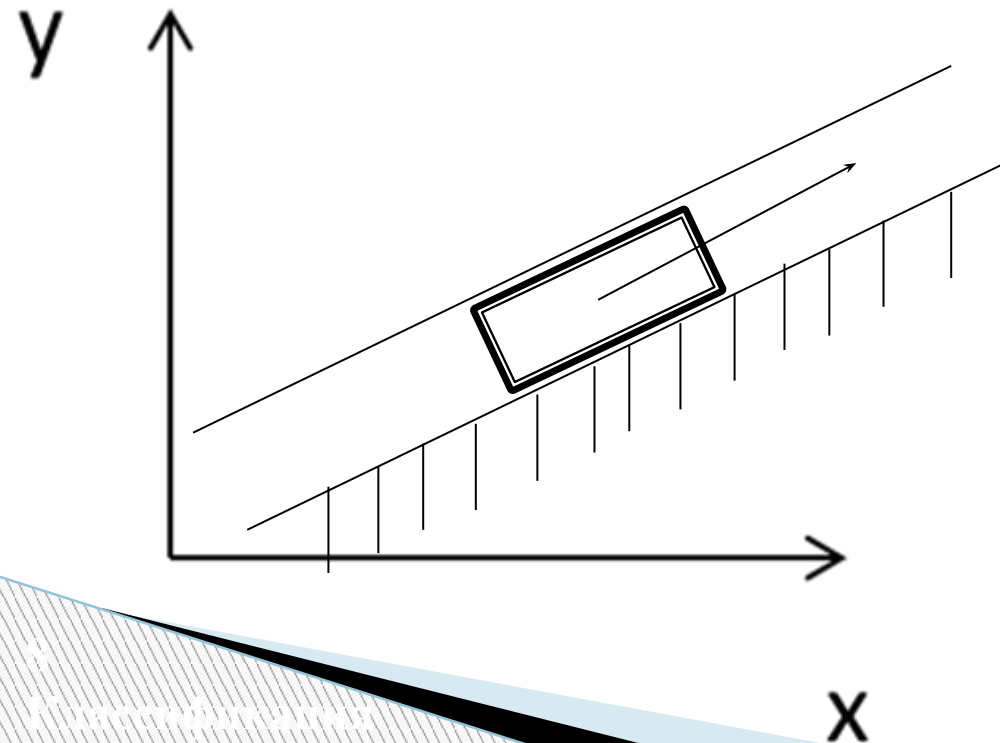


$$x = A \sin pt$$

# КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

- Если уравнение связи не содержит в явном виде скорости, то связь называют **ГОЛОНОМНОЙ (геометрической)**:

$$f(t, x, y, z) = 0$$

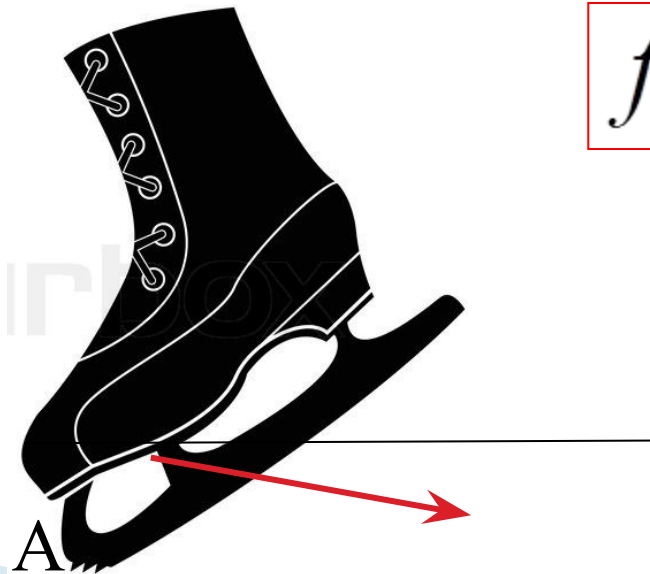


$$y = ax + b$$



# КЛАССИФИКАЦИЯ СВЯЗЕЙ

- Если уравнение связи содержит в явном виде скорость, то связь называют **неголономной**:



$$f(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0$$

# ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

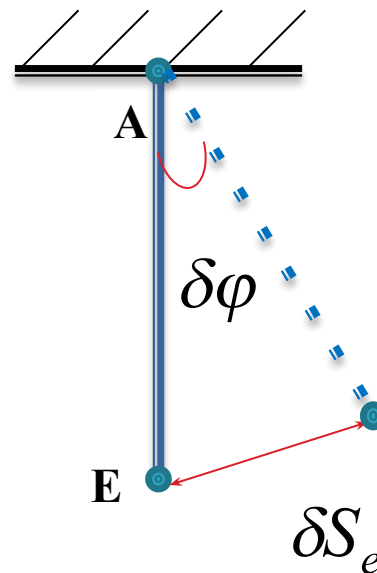
Далее будем рассматривать

*двусторонние, голономные, стационарные связи*

$$f(x, y, z) = 0$$

# ВОЗМОЖНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ

- **Возможное перемещение механической системы  $(\delta s, \delta x)$**  – любая совокупность элементарных перемещений точек этой системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.



# ВОЗМОЖНОЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЕ

- **Возможные перемещения характеризуются тем, что они:**
  - могут и не происходить (они воображаемые);
  - бесконечно малые;
  - происходят с сохранением всех наложенных на систему связей;
  - не связаны с реальным временем ( $\delta t = 0$ ).

**Для стационарных связей действительное перемещение  $dr$  можно представить как набор ВОЗМОЖНЫХ**

# ВОЗМОЖНАЯ РАБОТА

- ▣ **Возможная работа** – это элементарная работа, которую действующая на материальную точку сила могла бы совершить на перемещении, совпадающем с возможным перемещением этой точки:

$$\delta A^r = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

- ▣ Связи, сумма возможных работ реакций которых на любом возможном перемещении равна нулю, называются **идеальными связями** :

$$\sum_k \delta A^r_k = 0$$

# ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

- Устанавливает общее условие равновесия механической системы в целом
- При идеальных связях позволяет исключить из рассмотрения все неизвестные реакции связей
- Выполняется в инерциальных системах отсчета

# ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на неё активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.

$$\sum_k \delta A_k^a = 0$$

□  $\delta A^a = \vec{F}^a \cdot \delta \vec{r}$  - возможная работа активной силы  $\vec{F}^a$ .

## Необходимость:

Пусть механическая система находится под действием внешних активных сил,

главный вектор которых:

$$\vec{\mathbf{F}}^a = \sum \vec{\mathbf{F}}_k^a$$

На неё наложены голономные, стационарные связи:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_k \vec{\mathbf{R}}_k$$

Тогда, поскольку каждая из точек системы находится в равновесии:

$$\vec{\mathbf{F}}_k + \vec{\mathbf{R}}_k = \mathbf{0} \implies \vec{\mathbf{F}}_k \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_k + \vec{\mathbf{R}}_k \cdot \delta \vec{\mathbf{r}}_k = 0 \implies \delta A_k^a + \delta A_k^r = 0$$

Просуммируем по всем точкам системы:

$$\sum_k \delta A_k^a + \sum_k \delta A_k^r = 0$$

По определению идеальных связей:

$$\sum_k \delta A_k^r = 0$$

$$\sum_k \delta A_k^a = 0$$



## Достаточность:

Пусть механическая система с идеальными связями, удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{\mathbf{k}} \delta A_{\mathbf{k}}^a = 0 \quad \text{совершает действительное перемещение } \underline{d\mathbf{r}}_{\mathbf{k}}$$

$$\text{Тогда: } dT = \sum_{\mathbf{k}} dA_{\mathbf{k}}^a = \overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}^a \cdot d\mathbf{r}_{\mathbf{k}} \quad \sum_{\mathbf{k}} dA_{\mathbf{k}}^a > 0 \quad dT > 0$$

При стационарных связях действительные перемещения совпадают с какими-либо возможными перемещениями:

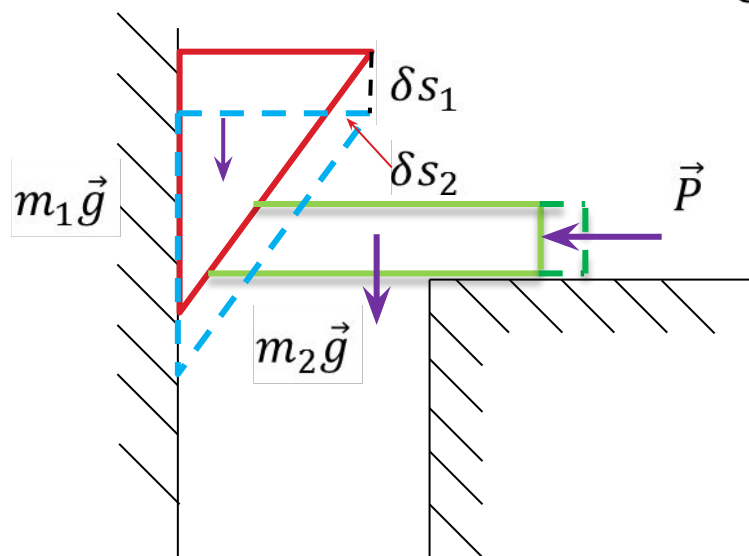
$$\sum_{\mathbf{k}} \delta A_{\mathbf{k}}^a = \sum_{\mathbf{k}} dA_{\mathbf{k}}^a \neq 0$$

Но это противоречит условию:  $\sum_{\mathbf{k}} \delta A_{\mathbf{k}}^a = 0$

Когда приложенные силы к системе удовлетворяют этому условию, система из состояния покоя выйти не может, следовательно, это условие является достаточным условием равновесия системы.

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

- ▣ **Пример:** Найти величину силы  $P$ , удерживающей тяжелые гладкие призмы с массами  $m_1$   $m_2$  в состоянии равновесия. Угол скоса призм равен  $\alpha$  .



$$\delta A^a = \delta A(m_1 \vec{g}) + \delta A(m_2 \vec{g}) + \delta A(\vec{P})$$

$$\delta A^a = m_1 g \delta s_1 - P \delta s_2$$

$$\delta s_2 = \delta s_1 \operatorname{tg} \alpha$$

$$(m_1 g - P \operatorname{tg} \alpha) \delta s_1 = 0$$

$$m_1 g - P \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$P = \frac{m_1 g}{\operatorname{tg} \alpha}$$

- Принцип возможных перемещений позволяет решать самые разнообразные задачи на равновесие механических систем – находить неизвестные **активные силы**, определять **реакции связей**, находить положения равновесия механической системы под действием приложенной системы сил.

- **Пример:** Найти реакции, действующие на составную конструкцию

