

Преобразования буквенных логарифмических выражений

1

Найдите значение выражения $\log_a(ab^3)$, если $\log_b a = \frac{1}{7}$.

Пояснение.

Выполним преобразования:

$$\log_a(ab^3) = \log_a a + 3\log_a b = 1 + \frac{3}{\log_b a} = 1 + 21 = 22.$$

2

Найдите $\log_a \frac{a}{b^3}$, если $\log_a b = 5$.

Пояснение.

Выполним преобразования:

$$\log_a \frac{a}{b^3} = \log_a a - 3\log_a b = 1 - 3 \cdot 5 = -14.$$

3

Найдите $\log_a(a^2b^3)$, если $\log_a b = -2$.

Пояснение.

Выполним преобразования:

$$\log_a(a^2b^3) = \log_a a^2 + \log_a b^3 = 2\log_a a + 3\log_a b = -4.$$

Ответ: 4

Выполните самостоятельно:

1

Найдите значение выражения $\log_a(a^3b^8)$, если $\log_b a = \frac{1}{3}$.

2

Найдите $\log_a \frac{a}{b^5}$, если $\log_a b = -7$.

3

Найдите $\log_a(a^2b^6)$, если $\log_a b = 8$.

Проверь решение:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \log_a(a^3 b^8) &= \log_a a^3 + \log_a b^8 = \\ &= 3 \log_a a + 8 \log_a b = 3 + \frac{8}{\log_a b} = \\ &= 3 + 24 = 27 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \log_a \frac{a}{b^5} &= \log_a a - \log_a b^5 = \\ &= 1 - 5 \log_a b = 1 + 35 = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} \log_a (a^2/b) &= \log_a a^2 + \log_a b^{-1} = \\ &= 2 \log_a a + \log_a b = 2 + 6 \cdot 8 = 50 \end{aligned}$$

*Логарифмические
уравнения*

Логарифмические уравнения

✓ **Определение:**

✓ **Методы решения**

логарифмических уравнений:

▪ *Метод потенцирования;*

▪ *Метод введения новой переменной;*

Определение

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, где $a > 0$, $a \neq 1$, и уравнения, сводящиеся к этому виду.



1) Простейшее логарифмическое уравнение

$$\log_a x = b \Rightarrow x = a^b, \quad x > 0$$

Например: $\log_3 x = 2$

$$\text{одз: } x > 0$$

$$x = 3^2$$

$$x = 9; 9 \in \text{одз}$$

Ответ: 9

№1. Решить уравнения

$$a) \log_2(x+1) = 3$$

одз :

$$\log_2(x+1) = \log_2 2^3$$

$$x+1 > 0$$

$$x+1 = 8$$

$$x > -1$$

$$x = 7; 7 \in \text{одз}$$

Ответ : 7

2) Метод потенцирования.

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_3 (x^2 - 3x - 5) = \log_3 (7 - 2x).$$

Решение. 1) Потенцируя (т. е. освободившись от знаков логарифмов), получаем:

$$x^2 - 3x - 5 = 7 - 2x;$$

$$x^2 - x - 12 = 0;$$

$$x_1 = 4, \quad x_2 = -3.$$

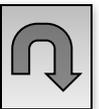
2) Проверим найденные корни по условиям

$$\begin{cases} x^2 - 3x - 5 > 0, \\ 7 - 2x > 0. \end{cases}$$



Значение $x = 4$ не удовлетворяет этой системе неравенств (достаточно заметить, что $x = 4$ не удовлетворяет второму неравенству системы), т. е. $x = 4$ — посторонний корень для заданного уравнения. Значение $x = -3$ удовлетворяет обоим неравенствам системы, а потому $x = -3$ — корень заданного уравнения.

Ответ: -3 .



Пример 2. Решить уравнение $\log_{x+4}(x^2 - 1) = \log_{x+4}(5 - x)$.

Решение. Потенцируя, получим уравнение $x^2 - 1 = 5 - x$, корнями которого являются числа 2 и -3 . Для проверки, кроме условий $x^2 - 1 > 0$, $5 - x > 0$, придётся учесть ещё два условия: $x + 4 > 0$, $x + 4 \neq 1$. Таким образом, область допустимых значений переменной для заданного уравнения определяется системой неравенств



$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ x + 4 > 0, \\ x + 4 \neq 1. \end{cases}$$

Значение $x = 2$ удовлетворяет этой системе, а значение $x = -3$ — нет, это посторонний корень.

Ответ: 2.



Пример 3. Решить уравнение

$$\log_2 (x + 4) + \log_2 (2x + 3) = \log_2 (1 - 2x).$$

Решение. 1) Сначала надо преобразовать уравнение к виду (1). Для этого воспользуемся правилом «сумма логарифмов равна

логарифму произведения». Оно позволяет заменить выражение $\log_2 (x + 4) + \log_2 (2x + 3)$ выражением $\log_2 (x + 4)(2x + 3)$. Тогда заданное уравнение можно переписать так:

$$\log_2 (x + 4)(2x + 3) = \log_2 (1 - 2x).$$

2) Потенцируя, получаем:

$$\begin{aligned}(x + 4)(2x + 3) &= 1 - 2x; \\ 2x^2 + 8x + 3x + 12 &= 1 - 2x; \\ 2x^2 + 13x + 11 &= 0; \\ x_1 &= -1, \quad x_2 = -5,5.\end{aligned}$$



3) Проверим найденные корни по условиям

$$\begin{cases} x + 4 > 0, \\ 2x + 3 > 0, \\ 1 - 2x > 0 \end{cases}$$

(обратите внимание: условия для проверки всегда составляют по исходному уравнению). Значение $x = -1$ удовлетворяет этой системе неравенств, а значение $x = -5,5$ не удовлетворяет, это посторонний корень.

Отв: -1 .

