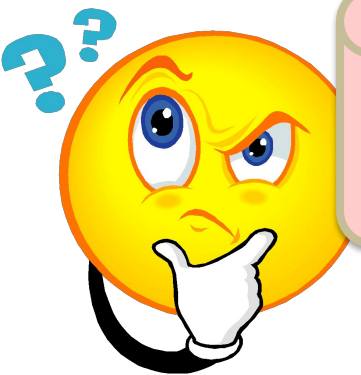




Вычисление неопределенного интеграла



УСТАНОВИТЬ СООТВЕТСТВИЕ.

1. $f(x) = x^n$

2. $f(x) = C$

3. $f(x) = \sin x$

4. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

5. $f(x) = \cos x$

6. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$

1. $F(x) = kx + C$

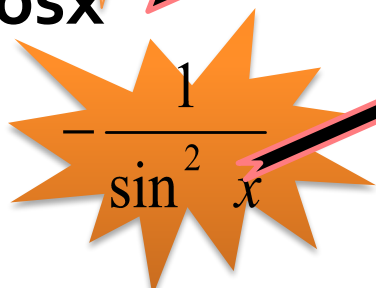
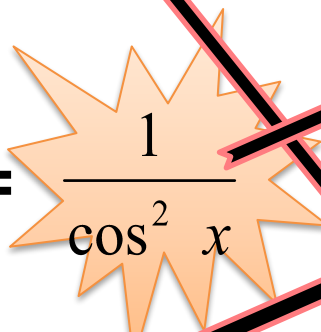
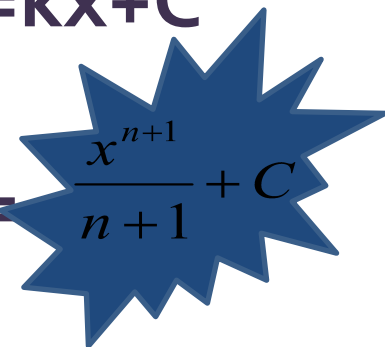
2. $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

3. $F(x) = \operatorname{tg} x + C$

4. $F(x) = \sin x + C$

5. $F(x) = \operatorname{ctg} x + C$

6. $F(x) = -\cos x + C$



Найти первообразные для функций:

1) $f(x) = 10x$

$F(x) = 5x^2 + C$

2) $f(x) = 3x^2$

$F(x) = x^3 + C$

3) $f(x) = \sin x + 5$

$F(x) = -\cos x + 5x + C$

4) $f(x) = 5\cos x$

$F(x) = 5\sin x + C$

5) $f(x) = 6x^2$

$F(x) = 2x^3 + C$

6) $f(x) = 3 - 2x$

$F(x) = 3x - x^2 + C$

Задание

Установить соответствие. Найти такой общий вид первообразной, которая соответствует заданной функции.

$$1. f(x) = x + x^3$$

$$1. F(x) = \frac{x}{2} + \cos x + C$$

$$2. f(x) = 2 \cdot \cos x$$

$$2. F(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + C$$

$$3. f(x) = 8 - 5x + 10x^2$$

$$3. F(x) = 8x - \frac{5x^2}{2} + \frac{10x^3}{3} + C$$

$$4. f(x) = (4 - 3x)^9$$

$$4. F(x) = 2 \sin x + C$$

$$5. F(x) = 8x + \sin x + \frac{10x^2}{3} + C$$

$$6. F(x) = -\frac{1}{30} (4 - 3x)^{10} + C$$

$$7. F(x) = -\frac{1}{3} (4 - 3x)^{10} + C$$

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Неопределенным интегралом от непрерывной функции $f(x)$ на интервале $(a; b)$ называют совокупность первообразных функции.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Где C – произвольная постоянная (*const*).

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{где } C = \text{const}$$

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение,

x – переменная интегрирования.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется **интегрированием** этой функции



**Лейбниц
Готфрид
Вильгельм
(1646-1716)**

**Символ \int
введен
Лейбницем (1675
г.). Этот знак
является
изменением
латинской
буквы S (первой
буквы слова
summa).**

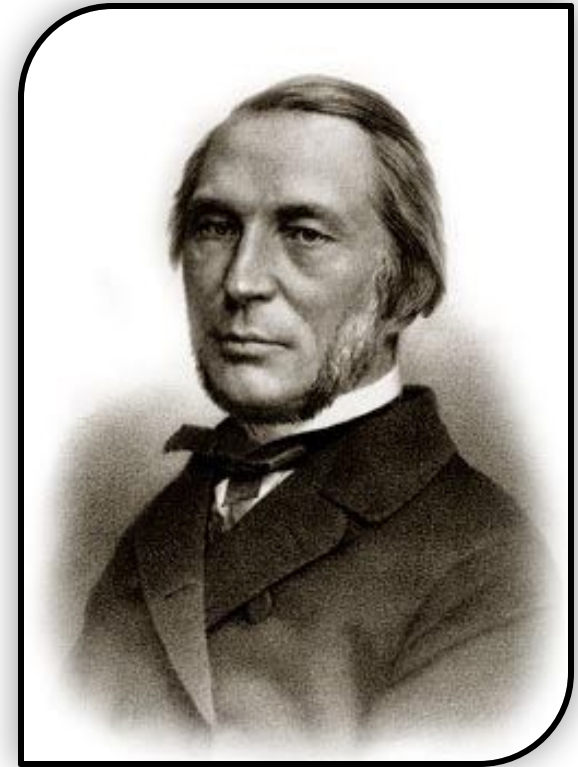
В развитии интегрального исчисления приняли участие **русские математики**:



В.Я. Буняковский
(1804 – 1889)



М.В. Остроградский
(1801 – 1862)



П.Л. Чебышев
(1821 – 1894)

Примеры

$$1. \int A dx = Ax + C; \quad (Ax + C)' = A$$

$$2. \int e^x dx = e^x + C; \quad (e^x + C)' = e^x$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad (-\cos x + C)' = \sin x$$

$$4. \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C; \quad \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$$

$$5. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C; \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Таблица основных формул интегрирования.

1. $\int 0 \cdot dx = C$

2. $\int dx = x + C$

3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$

4. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

6. $\int e^x dx = e^x + C$

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$

13. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$

15. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$

16. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x|$

Свойства интеграла

Свойства интеграла

Верно ли что:

а)

$$\int x^5 dx = 5x^4 + C$$

в)

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

б)

$$\int 3x^2 dx = 6x + C$$

г)

$$\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + C$$

Пример. Вычислить $\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int (x^2 + 3x^3 + x + 1) dx = \int x^2 dx + 3 \int x^3 dx + \int x dx + \int dx =$$

$$= \frac{x^3}{3} + 3 \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} + x + C$$

Пример №2

$$\int (6x^3 + x - 1)dx = 6 \int x^3 dx + \int x dx - \int 1 dx =$$

$$= 6 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x + C = \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

Пример №3

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C$$

(формула 4 таблицы интегралов)

Пример №4

$$\int (3x - 1)^{24} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3x - 1)^{25}}{25} + C$$

(формула 3)

Пример №5

$$\int (2 + 3x)^5 dx = \frac{1}{3 \cdot 6} (2 + 3x)^6 + C.$$

Пример №1

$$\int (3x^5 + 4\cos x - 2x + 1) dx =$$

⊗ Интеграл суммы выражений равен сумме интегралов этих выражений

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла ⊗

$$\int 3x^5 dx + \int 4\cos x dx - \int 2x dx + \int 1 dx =$$

$$3 \int x^5 dx + 4 \int \cos x dx - 2 \int x dx + 1 \int dx =$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$\int \cos x dx = \sin x +$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$\int dx = x + c$$

$$\frac{3x^{5+1}}{5+1} + 4\sin x - \frac{2x^2}{2} + x + C \rightarrow \frac{1}{2}x^6 + 4\sin x - x^2 + x + C$$



Пример №2

$$\int \left(\frac{3}{x^5} - x^4 + 7e^x - \frac{2}{x} \right) dx$$

Проверить
решение



$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Записать решение:

$$\int \left(3x^{-5} - x^4 + 7e^x - \frac{2}{x} \right) dx$$



$$3 \int x^{-5} dx - \int x^4 dx + 7 \int e^x dx - 2 \int \frac{dx}{x}$$



$$\frac{3x^{-4}}{-4} - \frac{x^5}{5} + 7e^x - 2 \ln x + c$$



$$-\frac{3}{4x^4} - \frac{1}{5}x^5 + 7e^x - 2 \ln x + c$$



Пример №3

$$\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + x^3 - 3\sqrt{x} \right) dx$$

Проверить
решение

! $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

Записать решение:

$$\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + x^3 - 3x^{\overset{?}{1}\frac{1}{2}} \right) dx$$



$$4 \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \int x^3 dx - 3 \int x^{\frac{1}{2}} dx$$



$$4 \operatorname{tg} x + \frac{x^4}{4} - 3 \cdot \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$



$$4 \operatorname{tg} x + \frac{1}{4} x^4 - 2x\sqrt{x} + C$$



Проверить
решение

Найти неопределенный интеграл

Проверить
решение

$$\frac{1}{6} \int x(6x^5 + \frac{3}{2} 3x - 4) dx + C$$

$$\frac{1}{5} \int \sin(5x - 4) dx$$

$$\int x(25x^4 + 3e^x - 4 \ln x) dx + C$$

$$\frac{1}{20} \int (3 + 4x)^5 dx + C$$

$$2 \int (\frac{2}{\cos^2 x} + \frac{2}{3} x + \sqrt{x} - \frac{3}{5x^5}) dx + C$$

$$\frac{1}{6} \int e^{6x-3} dx$$



Следует отметить, что для функции вида $f(kx+b)$ можно применять упрощенную формулу

$$\int f(kx + b) dx = \frac{1}{k} F(kx + b) + C$$



$$\int \cos(6 - 2x) dx = -\frac{1}{2} \sin(6 - 2x) + C$$

$$\int \frac{1}{5x - 4} dx = \frac{1}{5} \ln(5x - 4) + C$$

$$\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C$$



$$\begin{aligned} \int (t^2 + 3) \cdot t \cdot 2t \cdot dt &= 2 \int t^2 (t^2 + 3) dt = \\ &= 2 \int (t^4 + 3t^2) dt = 2 \left(\frac{t^5}{5} + t^3 \right) + C \end{aligned}$$



Самостоятельная работа
Найти неопределенный интеграл

Проверить
решение

Уровень «А» (на «3»)

$$1) \int_6 (x^5 + \frac{3}{2} 3x - 4) dx$$

$$2) \int (x^2 + 3e^x + 4 \ln \frac{4}{x}) dx$$

Уровень «В» (на «4»)

$$3) \int_0^1 (3x + 4) dx$$

$$4) \int_6 e^{8x-3} dx$$

Уровень «С» (на «5»)

$$5) \int_5 \cos(5x - 4) dx$$

$$6) \int (\operatorname{ctg} x + \frac{2}{\sin^2 3x} + \sqrt{x} + \frac{3}{5x^5}) dx$$