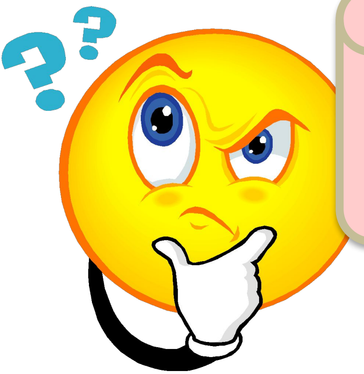
Вычисление неопределенного интеграла



Установить соответствие.

1.$f(x) = x^n$

2.$f(x) = C$

3.$f(x)=\sin x$

4.$f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

5.$f(x) = \cos x$

6.$f(x)= -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

1. $F(x) = kx+C$
2. $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
3. $F(x) = \operatorname{tg} x+C$
4. $F(x) = \sin x+C$
5. $F(x) = \operatorname{ctg} x+C$
6. $F(x) = - \cos x+C$

Найти первообразные для функций:

1) $f(x) = 10x$ — $F(x) = 5x^2 + C$

2) $f(x) = 3x^2$ — $F(x) = x^3 + C$

3) $f(x) = \sin x + 5$ — $F(x) = -\cos x + 5x + C$

4) $f(x) = 5\cos x$ — $F(x) = 5\sin x + C$

5) $f(x) = 6x^2$ — $F(x) = 2x^3 + C$

6) $f(x) = 3-2x$ — $F(x) = 3x - x^2 + C$

Задание

Установить соответствие. Найти такой общий вид первообразной, которая соответствует заданной функции.

$1.\ f(x)=x+x^3$

$2.\ f(x)=2\cdot\cos x$

$3.\ f(x)=8-5x+10x^2$

$4.\ f(x)=(4-3x)^9$

$1.\ F(x)=\dfrac{x}{2}+\cos x+C$

$2.\ F(x)=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{4}+C$

$3.\ F(x)=8x-\dfrac{5x^2}{2}+\dfrac{10x^3}{3}+C$

$4.\ F(x)=2\sin x+C$

$5.\ F(x)=8x+\sin x+\dfrac{10x^2}{3}+C$

$6.\ F(x)=-\dfrac{1}{30}(4-3x)^{10}+C$

$7.\ F(x)=-\dfrac{1}{3}(4-3x)^{10}+C$

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Неопределенным интегралом от непрерывной функции f(x) на интервале (a; b) называют совокупность первообразных функции.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Где С – произвольная постоянная (const).

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \quad \text{где } C = const$$

$f(x)$ – подынтегральная функция,

$f(x)dx$ – подынтегральное выражение,

x – переменная интегрирования.

Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется *интегрированием* этой функции

.

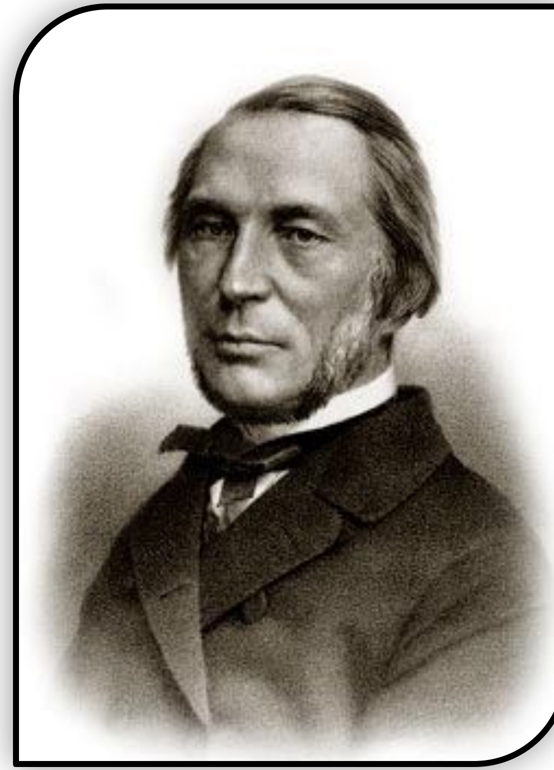
Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646-1716)

Символ $\int$ введен Лейбницем (1675 г.). Этот знак является изменением латинской буквы S (первой буквы слова summa).

В развитии интегрального исчисления приняли участие **русские математики**:

В.Я. Буняковский
(1804 – 1889)

М.В. Остроградский
(1801 – 1862)



П.Л. Чебышев
(1821 – 1894)

Примеры

$$1.\ \int A\,dx = Ax + C; \quad (Ax + C)' = A$$

$$2.\ \int e^x dx = e^x + C; \quad \left(e^x + C\right)' = e^x$$

$$3.\ \int \sin x\,dx = -\cos x + C; \quad (-\cos x + C)' = \sin x$$

$$4.\ \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C; \quad \left(\frac{x^4}{4} + C\right)' = \frac{1}{4} \cdot 4x^3 = x^3$$

$$5.\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C; \quad (\operatorname{tg} x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Таблица основных формул интегрирования.

1.	$\int 0 \cdot dx = C$	9.	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
2.	$\int dx = x + C$	10.	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
3.	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$	11.	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
4.	$\int \frac{dx}{x} = \ln\|x\| + C$	12.	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$
5.	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	13.	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C$
6.	$\int e^x dx = e^x + C$	14.	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
7.	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	15.	$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln\|\cos x\| + C$
8.	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$	16.	$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln\|\sin x\|$

Свойства интеграла

Свойства интеграла

Верно ли что:

а)

$$\int x^5 dx = 5x^4 + C$$

в)

$$\int 3x^2 dx = x^3 + C$$

б)

$$\int 3x^2 dx = 6x + C$$

г)

$$\int x^6 dx = \frac{1}{7} x^7 + C$$

Пример. Вычислить $\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx$.

Решение. Так как под знаком интеграла находится сумма четырех слагаемых, то раскладываем интеграл на сумму четырех интегралов:

$$\int\left(x^2+3x^3+x+1\right)dx=\int x^2dx+3\int x^3dx+\int xdx+\int dx=.$$

$$=\frac{x^3}{3}+3\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}+x+C$$

Пример №2

$$\int \left(6x^3 + x - 1\right)dx = 6\int x^3 dx + \int x dx - \int 1 dx =$$

$$= 6 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^2}{2} - x + C \;= \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

Пример №3

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C$$

(формула 4 таблицы интегралов)

Пример №4

$$\int (3x-1)^{24}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\frac{(3x-1)^{25}}{25} + C$$

(формула 3)

Пример №5

$$\int (2+3x)^5 dx = \frac{1}{3\cdot 6}(2+3x)^6 + C.$$

Пример №1

$$\int (3x^5 + 4cosx - 2x + 1)dx =$$

Интеграл суммы выражений равен сумме интегралов этих выражений

Постоянный множитель можно вынести за знак интеграла

$$\int 3x^5 dx + \int 4cosxdx - \int 2xdx + \int 1dx =$$

$$3\int x^5 dx + 4\int cosxdx - 2\int xdx + 1\int dx =$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$\int cosxdx = sinx +$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} +$$

$$\int dx = x + c$$

$$\frac{3x^{5+1}}{5+1} + 4sinx - \frac{2x^2}{2} + x + C \Rightarrow \frac{1}{2}x^6 + 4sinx - x^2 + x + C$$

Пример №2

$$\int \left(\frac{3}{x^5} - x^4 + 7e^x - \frac{2}{x}\right) dx$$

Проверить решение

!

$$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$$

Записать решение:

$$\int \left(3x^{-5} - x^4 + 7e^x - \frac{2}{x}\right) dx$$

?

$$3\int x^{-5}dx - \int x^4dx + 7\int e^x dx - 2\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{3x^{-4}}{-4} - \frac{x^5}{5} + 7e^x - 2\ln x + c$$

$$-\frac{3}{4x^4} - \frac{1}{5}x^5 + 7e^x - 2\ln x + c$$

Пример №3

$$\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + x^3 - 3\sqrt{x}\right)dx$$

Проверить решение

! $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

Записать решение:

$$\int \left(\frac{4}{\cos^2 x} + x^3 - 3x^{\frac{1}{2}}\right)dx$$

?

$$4\int \frac{1}{\cos^2 x}dx + \int x^3 dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}dx$$

$$4tgx + \frac{x^4}{4} - 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$4tgx + \frac{1}{4}x^4 - 2x\sqrt{x} + C$$

Проверить решение

Найти неопределенный интеграл

Проверить решение

$$\int (x^5 + 3x - 4)\,dx$$
$$\frac{1}{6}x^6 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + C$$

$$\int \cos(5x-4)\,dx$$
$$\frac{1}{5}\sin(5x-4) + C$$

$$\int \left(25x^4 + 3e^x - \frac{4}{x}\right)dx$$
$$5x^5 + 3e^x - 4\ln x + C$$

$$\int (3+4x)^4\,dx$$
$$\frac{1}{20}(3+4x)^5 + C$$

$$\int \left(\frac{2}{\cos^2 x} + \sqrt{x} - \frac{3}{x^6}\right)dx$$
$$2\,tg\,x + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + \frac{3}{5x^5} + C$$

$$\int e^{6x-3}\,dx$$
$$\frac{1}{6}e^{6x-3} + C$$

Следует отметить, что для функции вида *f(kx+b)* можно применять упрощенную формулу

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C$$

$$\int \cos(6-2x)\,dx = -\frac{1}{2}\sin(6-2x) + C$$

$$\int \frac{1}{5x-4}\,dx = \frac{1}{5}\ln(5x-4) + C$$

$$\int e^{2x+1}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x+1} + C$$

$$\int (t^2+3)\cdot t\cdot 2t\cdot dt \quad = 2\int t^2(t^2+3)dt =$$

$$= 2\int (t^4+3t^2)dt \; = 2\left(\frac{t^5}{5}+t^3\right)+C$$

Самостоятельная работа
Найти неопределенный интеграл

Проверить решение

Уровень «А» (на «3»)

$1).\int\left(x^5+\frac{3}{2}x^2-4\right)dx$

$2).\int\left(5x^4+3e^x-\frac{4}{x}\right)dx$

Уровень «В» (на «4»)

$3).\int(3+4x)^4\,dx$

$4).\int e^{6x-3}\,dx$

Уровень «С» (на «5»)

$5).\int\cos(5x-4)\,dx$

$6).\int\left(\frac{2}{\sin^2 3x}+\sqrt{x}-\frac{3}{5x^5}\right)dx$