Математические основы информатики

Элементы комбинаторики.

Учитель информатики
МКОУ СОШ № 2 г. Нарткалы
Нагацуева Эмма Хатуевна

Комбинаторикой называют область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из

заданных объектов.

- ***Определение*** : Множество (совокупность элементов) называется **занумерованным (или счетным)**, если каждому элементу этого множества сопоставлено свое натуральное число (номер) от 1 до n. Для краткости занумерованные множества также будут называться далее **наборами**.

Число перестановок.

- *Определение:* Отличающиеся друг от друга порядком наборы, составленные из всех элементов данного конечного множества, называются **перестановками** этого множества.

- **Пример 1.** Из множества, состоящего из трех элементов {1,2,3}, можно получить следующие перестановки: (1,2,3), (1,3,2), (2,3,1), (2,1,3), (3,2,1), (3,1,2).
- Число всех перестановок множества из n элементов обозначается P_n и определяется по формуле
  - $\boldsymbol{P_n = n!,}$ ***где*** $\boldsymbol{n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.}$

- **Пример 2.** Цифры 1, 2, 3, 4 написаны на четырех карточках. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из этих карточек?
- ***Решение.*** *Число различных комбинаций из четырех цифр равно 4! =24.*
- *---*
- **Пример 3.** Цифры 0, 1, 2, 3, 4 написаны на пяти карточках. Сколько различных значимых пятизначных чисел можно составить из этих карточек?
- ***Решение.*** *Число различных комбинаций из пяти цифр равно 5! = 120. Из этого числа необходимо вычесть все комбинации, когда первое место занимает цифра «0», т.к. такие числа не имеют смысла (например, 01324). Очевидно, что число таких комбинаций равно числу перестановок чисел с 1 по 4, или 4! = 24. Таким образом, ответ задачи - 120-24 = 96.*

Число размещений.

- ***Определение:*** Упорядоченные наборы, состоящие из ***к*** различных элементов, выбранных из данных ***n*** элементов, называются ***размещениями*** из ***n*** элементов по ***к***. Размещения могут отличаться друг от друга как элементами так и порядком.

- ***Пример 4.*** *Различными размещениями множества из трех элементов {1,2,3} по два будут наборы (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2).*
- *Число всех размещений из n элементов по к обозначается* A_n^k
- *и определяется по формуле*

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

- **Пример 5.** Студентам надо сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов?

- ***Решение.*** *Занумеруем дни сдачи экзаменов цифрами 1,2,3,… ,8.*
- *Составлять различные расписания можно следующим образом. Выбираем дни для сдачи экзаменов, например, (2,4,6,7), а затем порядок сдачи экзаменов.*
- *Таким образом, нужно составить различные наборы четырех чисел из восьми, которые отличаются между собой не только элементами, но и порядком.*
- *Таких наборов = 8 • 7 • 6 • 5 = 1680.*

Число сочетаний.

- *Определение:* Неупорядоченные наборы, состоящие из ***к*** элементов, взятых из данных ***n*** элементов, называются ***сочетаниями*** из ***n*** элементов по ***k***. Сочетания отличаются друг от друга только элементами.
- **Пример 6.** Для множества {1,2,3} сочетаниями по 2 элемента являются {1,2}, {1,3}, {2,3}.
- *Число сочетаний* из *n* элементов по *k* обозначается

C_n^k *и определяется по формуле*

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

- **Пример 7.** В спортивном турнире участвует 6 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. Сколько игр сыграно в турнире?

- ***Решение.*** *Различные пары команд образуют сочетания из 6 по 2, поскольку порядок среди двух команд в одной игре безразличен. Следовательно, число игр будет равно*

$$C_6^2 = 15.$$

- **Теорема о числе комбинаций.** Число различных комбинаций элементов, составленных из различных групп, вида $(a^1, a^2, \ldots, a^r)$, где a^l - элемент l-й группы, содержащей n_l элементов, равно $n_1 \cdot n_2 \ldots \cdot n_r$.

- **Пример 8.** Из трех групп студентов необходимо составить команду, содержащую по одному человеку из каждой группы. Сколько различных команд можно составить, если в первой группе 15 человек, во второй - 16 и в третьей - 20?

- ***Решение.*** *Согласно вышеприведенному определению ответ задачи - 15 • 16 • 20 = 4800.*

- **Пример 10.** Какое количество различных символов (букв, чисел и т.д.) можно передать не более чем пятью знаками кода Морзе, использующего точку (•) и тире (—)?

- ***Решение.*** *Рассмотрим произвольную позицию в кодировке некоторого символа. Она может иметь два значения: либо точку, либо тире. То же самое относится к любой другой позиции. Тогда, если таких позиций в коде n, то число возможных различных вариантов согласно теореме о числе комбинаций равно* 2^n*. В условии задачи говорится, что в коде может быть не более пяти позиций, что означает возможность кодирования одно-, двухпозиционным кодом и т.д., вплоть до пятипозиционного кода. Тогда ответ задачи*

  $2^1+2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62$.

НЬЮТОНА БИНОМ

- разложение алгебраической суммы двух слагаемых произвольной степени. Впервые была предложена Ньютоном в 1664–1665:

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots$$

$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot r}a^{n-r}b^r + \ldots + b^n.$$

•Коэффициенты формулы называются ***биномиальными коэффициентами***.

•Если n – положительное целое число, то коэффициенты обращаются в нуль при любом $r > n$, поэтому разложение содержит лишь конечное число членов.

• Во всех остальных случаях разложение представляет собой бесконечный (биномиальный) ряд. (Условия сходимости биномиального ряда впервые были установлены в начале 19 в. Н.Абелем.)

•Такие частные случаи, как $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ были известны задолго до Ньютона.

•Если n – положительное целое число, то биномиальный коэффициент при $a^{n-r}b^r$ в формуле бинома есть число комбинаций из n по r, обозначаемое C^r_n или $\binom{n}{r}$.

•При небольших значениях n коэффициенты можно найти из треугольника Паскаля.

Д/з: выучить формулы

- **№ 1**.Азбука Морзе позволяет кодировать символы для радиосвязи, задавая комбинацию точек и тире. Сколько различных символов (цифр, букв, знаков пунктуации и т.д.) можно закодировать, используя код Морзе длиной не менее трех и не более пяти сигналов (точек и тире)?

- **№ 2**. Одна ячейка памяти «троичной ЭВМ»(компьютера, основанного на использовании троичной системы счисления) может принимать одно из трех возможных состояний. Для хранения некоторой величины отвели 6 ячеек памяти. Сколько различных значений может принимать эта величина?

- **№ 3.** Напишите разложение алгебраической суммы двух слагаемых для седьмой степени.