

Математические основы информатики

Элементы комбинаторики.

Учитель информатики
МКОУ СОШ № 2 г. Нарткалы
Нагацьева Эмма Хатуевна

Комбинаторикой называют область математики, в которой изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных объектов.

- *Определение* : Множество (совокупность элементов) называется **занумерованным (или счетным)**, если каждому элементу этого множества сопоставлено свое натуральное число (номер) от 1 до n . Для краткости занумерованные множества также будут называться далее **наборами**.

Число перестановок.

- *Определение:* Отличающиеся друг от друга порядком наборы, составленные из всех элементов данного конечного множества, называются **перестановками** этого множества.
- **Пример 1.** Из множества, состоящего из трех элементов $\{1,2,3\}$, можно получить следующие перестановки: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,3,1)$, $(2,1,3)$, $(3,2,1)$, $(3,1,2)$.
- Число всех перестановок множества из n элементов обозначается P_n и определяется по формуле
 - $P_n = n!$, где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$.

- **Пример 2.** Цифры 1, 2, 3, 4 написаны на четырех карточках. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из этих карточек?
- *Решение.* Число различных комбинаций из четырех цифр равно $4! = 24$.
- -----
- **Пример 3.** Цифры 0, 1, 2, 3, 4 написаны на пяти карточках. Сколько различных значимых пятизначных чисел можно составить из этих карточек?
- *Решение.* Число различных комбинаций из пяти цифр равно $5! = 120$. Из этого числа необходимо вычесть все комбинации, когда первое место занимает цифра «0», т.к. такие числа не имеют смысла (например, 01324). Очевидно, что число таких комбинаций равно числу перестановок чисел с 1 по 4, или $4! = 24$. Таким образом, ответ задачи - $120 - 24 = 96$.

Число размещений.

- *Определение:* Упорядоченные наборы, состоящие из k различных элементов, выбранных из данных n элементов, называются **размещениями** из n элементов по k . Размещения могут отличаться друг от друга как элементами так и порядком.
- **Пример 4.** Различными размещениями множества из трех элементов $\{1,2,3\}$ по два будут наборы $(1,2)$, $(2,1)$, $(1,3)$, $(3,1)$, $(2,3)$, $(3,2)$.
- Число всех размещений из n элементов по k обозначается A_n^k
- и определяется по формуле

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- **Пример 5.** Студентам надо сдать 4 экзамена за 8 дней. Сколькими способами можно составить расписание сдачи экзаменов?
- *Решение.* Занумеруем дни сдачи экзаменов цифрами 1,2,3,...,8.
- Составлять различные расписания можно следующим образом. Выбираем дни для сдачи экзаменов, например, (2,4,6,7), а затем порядок сдачи экзаменов.
- Таким образом, нужно составить различные наборы четырех чисел из восьми, которые отличаются между собой не только элементами, но и порядком.
- Таких наборов $= 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 1680$.

Число сочетаний.

- *Определение:* Неупорядоченные наборы, состоящие из k элементов, взятых из данных n элементов, называются **сочетаниями** из n элементов по k . Сочетания отличаются друг от друга только элементами.
- **Пример 6.** Для множества $\{1,2,3\}$ сочетаниями по 2 элемента являются $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$.
- *Число сочетаний* из n элементов по k обозначается

$$C_n^k$$

и определяется по формуле

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

- **Пример 7.** В спортивном турнире участвует 6 команд. Каждая команда должна сыграть с каждой одну игру. Сколько игр сыграно в турнире?

- *Решение.* Различные пары команд образуют сочетания из 6 по 2, поскольку порядок среди двух команд в одной игре безразличен. Следовательно, число игр будет равно

$$C_6^2 = 15.$$

- **Теорема о числе комбинаций.** Число различных комбинаций элементов, составленных из различных групп, вида (a^1, a^2, \dots, a^r) , где a^l - элемент l -й группы, содержащей n_l элементов, равно $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_r$.

- **Пример 8.** Из трех групп студентов необходимо составить команду, содержащую по одному человеку из каждой группы. Сколько различных команд можно составить, если в первой группе 15 человек, во второй - 16 и в третьей - 20?
- **Решение.** Согласно вышеприведенному определению ответ задачи - $15 \cdot 16 \cdot 20 = 4800$.

- **Пример 10.** Какое количество различных символов (букв, чисел и т.д.) можно передать не более чем пятью знаками кода Морзе, использующего точку (•) и тире (—)?
- **Решение.** Рассмотрим произвольную позицию в кодировке некоторого символа. Она может иметь два значения: либо точку, либо тире. То же самое относится к любой другой позиции. Тогда, если таких позиций в коде n , то число возможных различных вариантов согласно теореме о числе комбинаций равно 2^n . В условии задачи говорится, что в коде может быть не более пяти позиций, что означает возможность кодирования одно-, двухпозиционным кодом и т.д., вплоть до пятипозиционного кода. Тогда ответ задачи

$$2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62.$$

НЬЮТОНА БИНОМ

- разложение алгебраической суммы двух слагаемых произвольной степени. Впервые была предложена Ньютоном в 1664–1665:

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \dots \\ + \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot r}a^{n-r}b^r + \dots + b^n.$$

- Коэффициенты формулы называются **биномиальными коэффициентами**.
- Если n – положительное целое число, то коэффициенты обращаются в нуль при любом $r > n$, поэтому разложение содержит лишь конечное число членов.
- Во всех остальных случаях разложение представляет собой бесконечный (биномиальный) ряд. (Условия сходимости биномиального ряда впервые были установлены в начале 19 в. Н.Абелем.)
- Такие частные случаи, как $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ и $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ были известны задолго до Ньютона.
- Если n – положительное целое число, то биномиальный коэффициент при $a^{n-r}b^r$ в формуле бинорма есть число комбинаций из n по r , обозначаемое C_n^r или $\binom{n}{r}$.
- При небольших значениях n коэффициенты можно найти из треугольника Паскаля.

Д/З: выучить формулы

- **№ 1.** Азбука Морзе позволяет кодировать символы для радиосвязи, задавая комбинацию точек и тире. Сколько различных символов (цифр, букв, знаков пунктуации и т.д.) можно закодировать, используя код Морзе длиной не менее трех и не более пяти сигналов (точек и тире)?
- **№ 2.** Одна ячейка памяти «троичной ЭВМ» (компьютера, основанного на использовании троичной системы счисления) может принимать одно из трех возможных состояний. Для хранения некоторой величины отвели 6 ячеек памяти. Сколько различных значений может принимать эта величина?
- **№ 3.** Напишите разложение алгебраической суммы двух слагаемых для седьмой степени.