

Действительный анализ

*Основной источник : Смагин В.В.
Действительный анализ. Учебное пособие.
2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

- 1. Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
- 2. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
- 3. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 1. Интеграл Лебега

(продолжение)

2. Ступенчатые функции. Измеримые функции

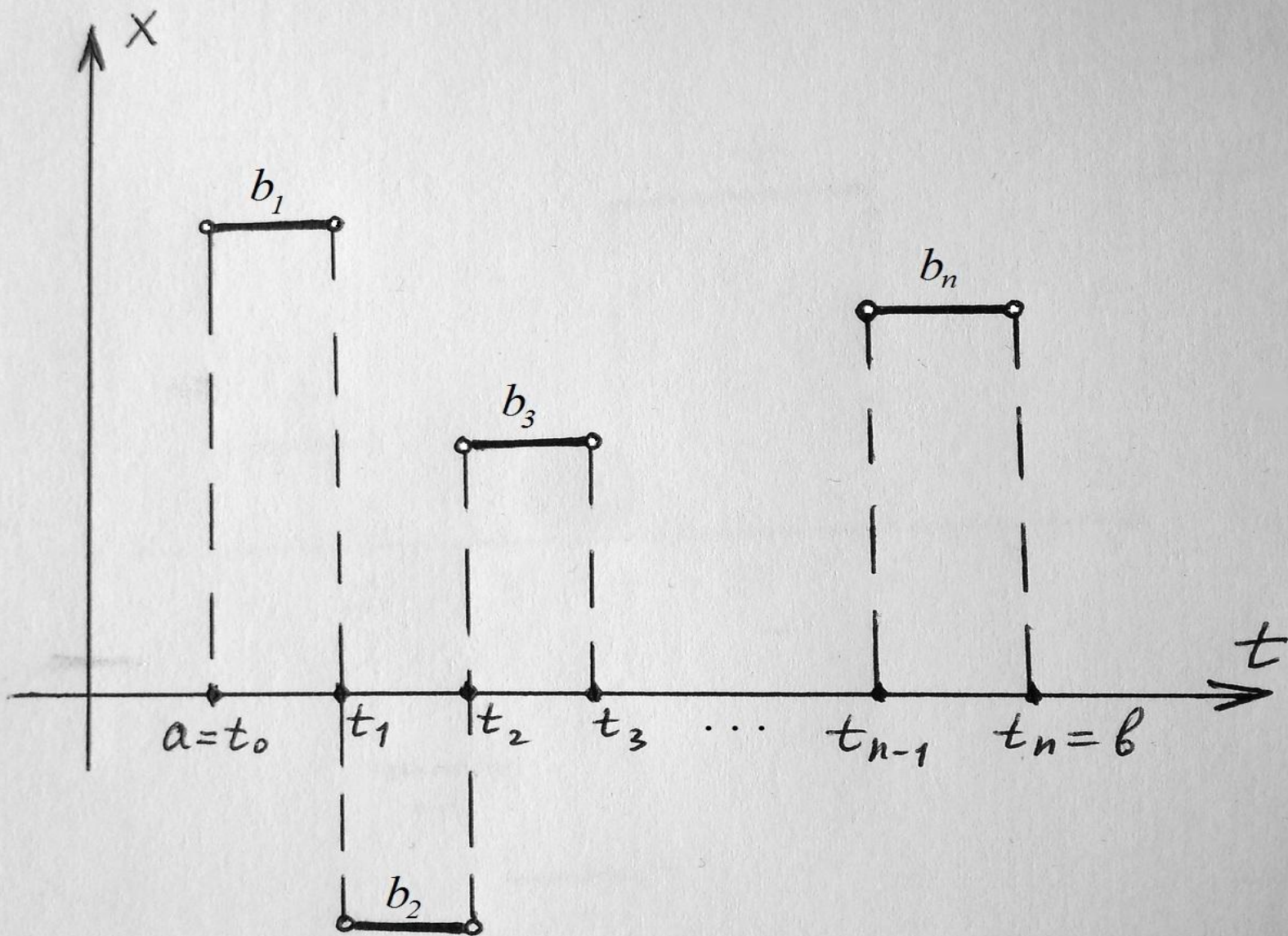
2.1. Ступенчатые функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Разбиением* отрезка $[a, b]$ называется конечное множество точек вида

$$\{t_i \mid i = \overline{0, n}; a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция $h(t)$ называется *ступенчатой* на отрезке $[a, b]$, если существует разбиение $P = \{t_i \mid i = \overline{0, n}; a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ отрезка, такое, что в каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i) функция $h(t)$ принимает некоторое постоянное значение $b_i \in \mathbb{R}^1$ ($i = \overline{1, n}$).

Значения функции $h(t)$ в точках деления t_i нас интересовать не будут, поскольку множество $P = \{t_i\}_{i=0}^n$ — ММН.



ЛЕММА 2. Пусть функция $\varphi(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных $x, y \in \mathbb{R}^1$. Пусть $h(t), k(t)$ — ступенчатые на $[a, b]$ функции. Тогда функция $\tilde{\varphi}(t) = \varphi[h(t), k(t)]$ — ступенчатая на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть $P = \{t_i \mid i = \overline{0, n}; a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b\}$ объединение разбиений отрезка $[a, b]$, соответствующих функциям $h(t)$ и $k(t)$. Тогда в каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i) функция $h(t)$ принимает некоторое постоянное значение $b_i \in \mathbb{R}^1$, а функция $k(t)$ — некоторое постоянное значение $c_i \in \mathbb{R}^1$ ($i = \overline{1, n}$).

Следовательно, в каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i)
 $\tilde{\varphi}(t) = \varphi[h(t), k(t)] = \varphi(b_i, c_i) = \text{const.}$

Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $h(t), k(t)$ — ступенчатые на $[a, b]$ функции. Тогда ступенчатыми являются и следующие функции: $\alpha h(t)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^1$), $|h(t)|$, $h(t) + k(t)$, $h(t)k(t)$, $\max\{h(t), k(t)\}$, $\min\{h(t), k(t)\}$.

Доказательство. Очевидно, что функции αx ($\alpha \in \mathbb{R}^1$), $|x|$, $x + y$, xy непрерывны по совокупности переменных $x, y \in \mathbb{R}^1$. Непрерывность функций $\max\{x, y\}$ и $\min\{x, y\}$ следует, например, из представлений:

$$\max\{x, y\} = 2^{-1}(x + y + |x - y|),$$

$$\min\{x, y\} = 2^{-1}(x + y - |x - y|).$$

Следствие доказано.

ЛЕММА 3. Пусть $h(t)$, $k(t)$ — ступенчатые на $[a, b]$ функции и $k(t) \neq 0$ п.в. на $[a, b]$. Тогда частное $h(t)/k(t)$ ступенчатая на $[a, b]$ функция.

Для доказательства леммы 3, как и в лемме 2, достаточно объединить разбиения отрезка $[a, b]$, соответствующие функциям $h(t)$ и $k(t)$.

2.2. Измеримые функции

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вещественная функция $x(t)$, для которой допускаются и бесконечные значения, называется *измеримой* на $[a, b]$, если:

- 1) $x(t)$ определена п.в. на $[a, b]$;
- 2) $x(t)$ конечна п.в. на $[a, b]$;
- 3) существует последовательность $\{h_n(t)\}$ ступенчатых на $[a, b]$ функций, что $h_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)$ при $n \rightarrow \infty$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Первое условие из определения означает, что множество

$$A_1 = \{t \in [a, b] \mid x(t) \text{ — не определена}\} \text{ — ММН.}$$

Второе условие означает, что множество

$$A_2 = \{t \in [a, b] \mid |x(t)| = \infty\} \text{ — ММН.}$$

Третье условие означает, что множество

$$A_3 = \{t \in [a, b] \mid h_n(t) \not\rightarrow x(t)\} \text{ — ММН.}$$

СВОЙСТВО. Если $x(t) \stackrel{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x(t)$ измерима на $[a, b]$, то и функция $y(t)$ измерима на $[a, b]$.

(Доказать самостоятельно.)

Примеры измеримых функций

1. Всякая ступенчатая функция $h(t)$ измерима:

$h(t)$ определена и конечна п.в. на $[a, b]$

(кроме, может быть, точек разбиения);

$\{h_n(t) \equiv h(t)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится п.в. к $h(t)$.

2. Всякая непрерывная функция измерима
(доказать самостоятельно).

3. Функция Дирихле на отрезке $[0,1]$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \cap \mathbf{Q}, \\ 0, & t \in [0,1] \setminus \mathbf{Q}. \end{cases}$$

$x(t) \stackrel{\text{почти}}{\text{всюду}} = 0 \Rightarrow \{h_n(t) \equiv 0\}_{n=1}^{\infty}$ СХОДИТСЯ П.В. К $x(t)$.

ЛЕММА 4. Пусть $x(t)$, $y(t)$ — измеримые на $[a, b]$ функции. Пусть функция $\varphi(x, y)$ непрерывна по совокупности переменных $x, y \in \mathbb{R}^1$. Тогда функция $\tilde{\varphi}(t) = \varphi[x(t), y(t)]$ — измеримая на $[a, b]$.

Доказательство. Определим на отрезке $[a, b]$ множества:

$$A_1 = \{t \in [a, b] \mid x(t) \text{ — не определена}\},$$

$$B_1 = \{t \in [a, b] \mid y(t) \text{ — не определена}\},$$

$$A_2 = \{t \in [a, b] \mid |x(t)| = \infty\},$$

$$B_2 = \{t \in [a, b] \mid |y(t)| = \infty\},$$

$$A_3 = \{t \in [a, b] \mid h_n(t) \not\rightarrow x(t)\},$$

$$B_3 = \{t \in [a, b] \mid k_n(t) \not\rightarrow y(t)\}.$$

Здесь $\{h_n(t)\}$ и $\{k_n(t)\}$ ступенчатые функции такие, что $h_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} x(t)$ и $k_n(t) \xrightarrow{\text{п.в.}} y(t)$ при $n \rightarrow \infty$. На множестве $C = [a, b] \setminus (A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2 \cup A_3 \cup B_3)$, которое является множеством полной меры, функция $\tilde{\varphi}(t)$ определена и конечна; кроме того, в силу непрерывности функции $\varphi(x, y)$, ступенчатые функции $l_n(t) = \varphi[h_n(t), k_n(t)] \rightarrow \varphi[x(t), y(t)]$ при $n \rightarrow \infty$ ($\forall t \in C$, то есть почти всюду).

Следовательно, $\tilde{\varphi}(t)$ – измеримая на $[a, b]$ функция.
Лемма доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $x(t), y(t)$ – измеримые на $[a, b]$ функции. Тогда измеримыми являются и следующие функции: $\alpha x(t)$ ($\alpha \in \mathbb{R}^1$), $|x(t)|$, $x(t) + y(t)$, $x(t)y(t)$, $\max\{x(t), y(t)\}$, $\min\{x(t), y(t)\}$.

(Доказать самостоятельно.)

ЛЕММА 5. Пусть $x(t), y(t)$ – измеримые на $[a, b]$ функции и $y(t) \neq 0$ п.в. на $[a, b]$. Тогда функция $x(t)/y(t)$ – измеримая на $[a, b]$.

(Без доказательства.)

3. Интегрирование ступенчатых функций

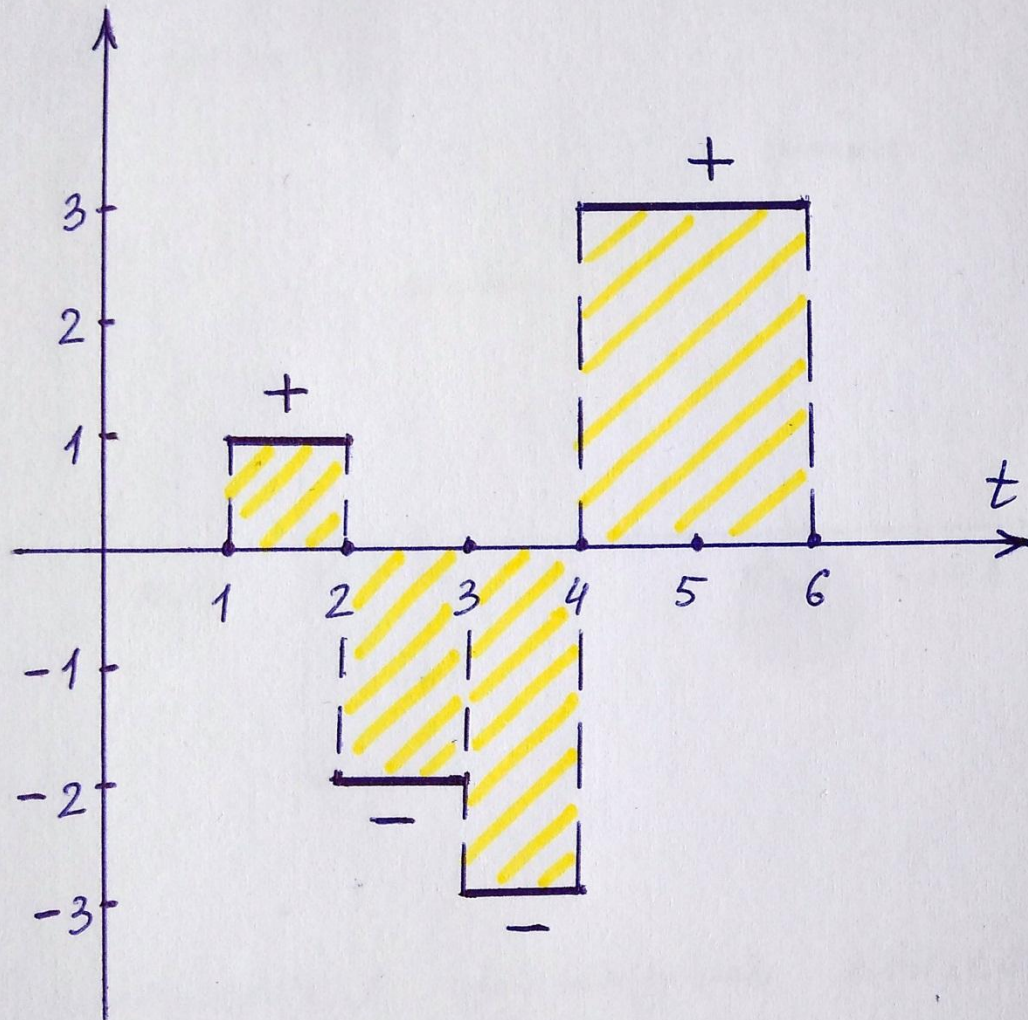
Пусть ступенчатая на $[a, b]$ функция $h(t)$ принимает в соответствующих интервалах $\Delta_i = (t_{i-1}, t_i)$ значения b_i , где $i = \overline{1, n}$. Определим интеграл от $h(t)$ формулой

$$Ih = \sum_{i=1}^n b_i |\Delta_i|. \quad (2)$$

Нетрудно видеть, что всякая ступенчатая функция интегрируема по Риману, а определенный в (2) интеграл Ih совпадает с интегралом Римана от этой функции, то есть

$$Ih = (R) \int_a^b h(t) dt.$$

Пример



$$I_h = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2$$

Из известных свойств интеграла Римана следует

ЛЕММА 6. Пусть h, h_1, h_2 — ступенчатые на $[a, b]$ функции. Тогда:

1) $(\forall \alpha \in \mathbb{R}^1)[I(\alpha h) = \alpha I h]$;

2) $I(h_1 + h_2) = I h_1 + I h_2$;

3) если $h_1(t) \leq h_2(t)$ п.в. на $[a, b]$, то $I h_1 \leq I h_2$.

В частности, если $h(t) \geq 0$ п.в. на $[a, b]$, то $I h \geq 0$.

Далее тот факт, что последовательность функций $\{x_n(t)\}$ п.в. на $[a, b]$ монотонно убывающая (соответственно возрастающая) при $n \rightarrow \infty$ стремится к функции $x(t)$, будем обозначать $x_n(t) \searrow x(t)$ (соответственно $x_n(t) \nearrow x(t)$).

ЛЕММА 7. Пусть $\{h_n(t)\}$ — последовательность неотрицательных ступенчатых функций и $h_n(t) \searrow 0$. Тогда $\int h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

(Без доказательства.)

ЛЕММА 8. Пусть $\{h_n(t)\}$ — последовательность неотрицательных ступенчатых функций и эта последовательность п.в. на $[a, b]$ монотонно убывает. Пусть также $\int h_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда $h_n(t) \searrow 0$.

(Без доказательства.)