Действительный анализ

Основной источник : *Смагин В.В. Действительный анализ. Учебное пособие. 2014 год.*

(см. https://vk.com/fd_an)

Дополнительная литература

1. *Шилов Г.Е., Гуревич Б.Л. Интеграл, мера и производная, 1967 г.*
2. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу, 1979 г.*
3. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 1976 г.*

(см. https://vk.com/fd_an и https://vk.com/func_an)

Глава 1.
Интеграл Лебега

(продолжение)

2. Ступенчатые функции. Измеримые функции

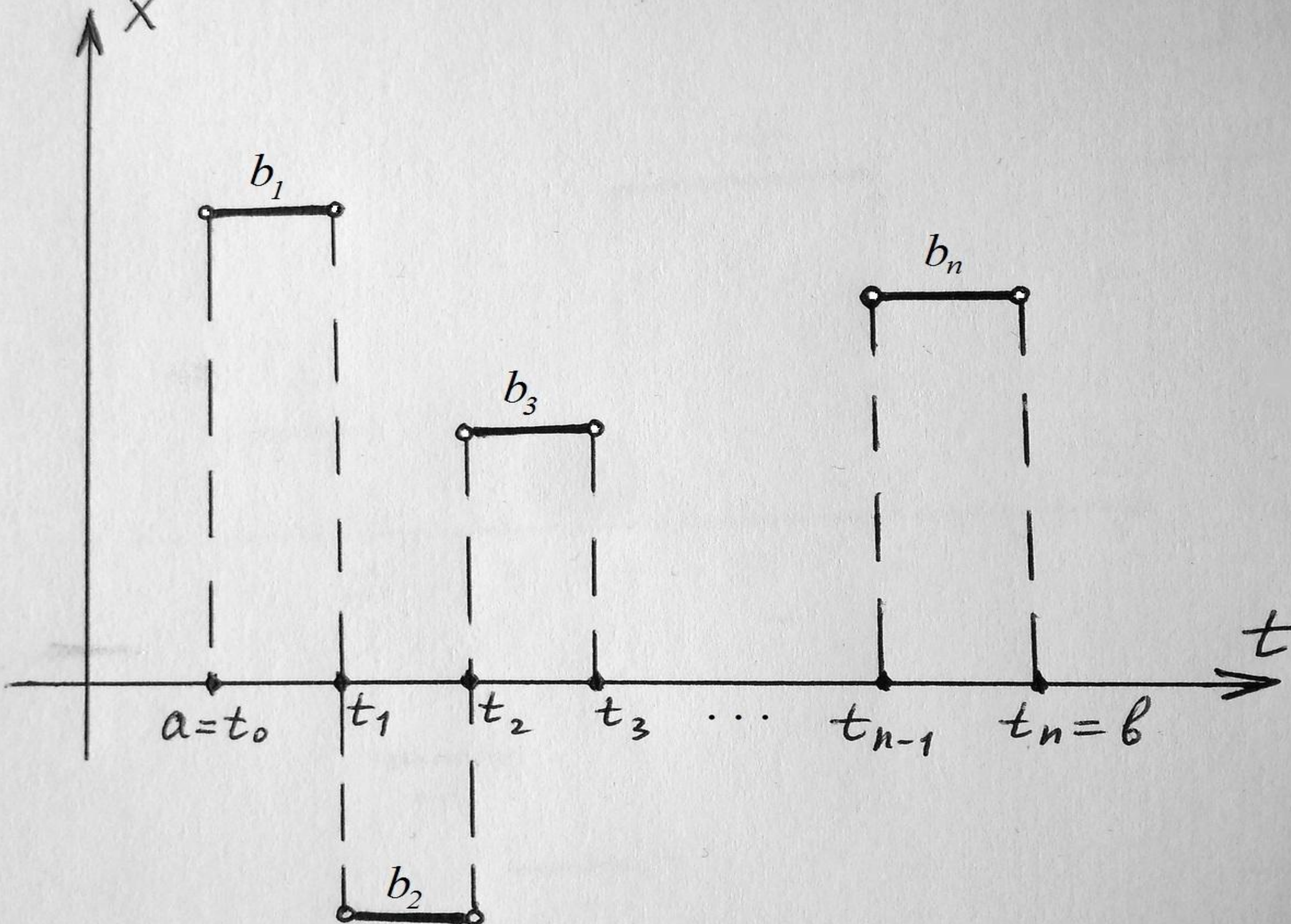
2.1. Ступенчатые функции

Определение. *Разбиением* отрезка $[a, b]$ называется конечное множество точек вида

$$\{t_i \,|\, i = \overline{0, n};\ a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}.$$

Определение. Функция $h(t)$ называется *ступенчатой* на отрезке $[a, b]$, если существует разбиение $P = \{t_i \,|\, i = \overline{0, n};\ a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$ отрезка, такое, что в каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i) функция $h(t)$ принимает некоторое постоянное значение $b_i \in \mathbb{R}^1$ $(i = \overline{1, n})$.

Значения функции $h(t)$ в точках деления t_i нас интересовать не будут, поскольку множество $P = \{t_i\}_{i=0}^{n}$ – ММН.



x
b_1
b_n
b_3
t
$a=t_0$
t_1
t_2
t_3
...
t_{n-1}
$t_n=b$
b_2

Лемма 2. *Пусть функция* $\varphi(x, y)$ *непрерывна по совокупности переменных* $x, y \in \mathbb{R}^1$. *Пусть* $h(t)$, $k(t)$ – *ступенчатые на* $[a, b]$ *функции. Тогда функция* $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi[h(t), k(t)]$ – *ступенчатая на* $[a, b]$.

Доказательство. Пусть
$P = \{t_i \,|\, i = \overline{0, n}; a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b\}$
объединение разбиений отрезка $[a, b]$, соответствующих функциям $h(t)$ и $k(t)$. Тогда в каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i) функция $h(t)$ принимает некоторое постоянное значение $b_i \in \mathbb{R}^1$, а функция $k(t)$ – некоторое постоянное значение $c_i \in \mathbb{R}^1$ $(i = \overline{1, n})$.

Следовательно, в каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i) $\widetilde{\varphi}(t) = \varphi[h(t), k(t)] = \varphi(b_i, c_i) = const$.

Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $h(t)$, $k(t)$ *– ступенчатые на* $[a,b]$ *функции. Тогда ступенчатыми являются и следующие функции:* $\alpha h(t)$ $(\alpha \in \mathbb{R}^1)$, $|h(t)|$, $h(t)+k(t)$, $h(t)k(t)$, $\max\{h(t),k(t)\}$, $\min\{h(t),k(t)\}$.

Доказательство. Очевидно, что функции αx $(\alpha \in \mathbb{R}^1)$, $|x|$, $x+y$, xy непрерывны по совокупности переменных $x, y \in \mathbb{R}^1$. Непрерывность функций $\max\{x,y\}$ и $\min\{x,y\}$ следует, например, из представлений:

$$\max\{x,y\} = 2^{-1}(x+y+|x-y|) ,$$

$$\min\{x,y\} = 2^{-1}(x+y-|x-y|).$$

Следствие доказано.

Лемма 3. *Пусть* $h(t)$, $k(t)$ – *ступенчатые на* $[a, b]$ *функции и* $k(t) \neq 0$ *п.в. на* $[a, b]$. *Тогда частное* $h(t)/k(t)$ *ступенчатая на* $[a, b]$ *функция.*

Для *доказательства* леммы 3, как и в лемме 2, достаточно объединить разбиения отрезка $[a, b]$, соответствующие функциям $h(t)$ и $k(t)$.

2.2. Измеримые функции

Определение. Вещественная функция $x(t)$, для которой допускаются и бесконечные значения, называется *измеримой* на $[a, b]$, если:

1) $x(t)$ определена п.в. на $[a, b]$;

2) $x(t)$ конечна п.в. на $[a, b]$;

3) существует последовательность $\{h_n(t)\}$ ступенчатых на $[a, b]$ функций, что $h_n(t) \overset{\text{п.в.}}{\to} x(t)$ при $n \to \infty$.

Замечание. Первое условие из определения означает, что множество
$A_1 = \{t \in [a,b] \mid x(t)$ – не определена$\}$ – ММН.

Второе условие означает, что множество
$A_2 = \{t \in [a,b] \mid |x(t)| = \infty\}$ – ММН.

Третье условие означает, что множество
$A_3 = \{t \in [a,b] \mid h_n(t) \not\to x(t)\}$ – ММН.

Свойство. Если $x(t) \overset{\text{п.в.}}{=} y(t)$ и функция $x(t)$ измерима на $[a,b]$, то и функция $y(t)$ измерима на $[a,b]$.

(Доказать самостоятельно.)

Примеры измеримых функций

1. Всякая ступенчатая функция $h(t)$ измерима:

$h(t)$ определена и конечна п.в. на $[a,b]$ (кроме, может быть, точек разбиения);

$\{h_n(t) \equiv h(t)\}_{n-1}^{\infty}$ сходится п.в. к $h(t)$.

2. Всякая непрерывная функция измерима (доказать самостоятельно).

3. Функция Дирихле на отрезке $[0,1]$

$$x(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1] \cap \mathrm{Q}, \\ 0, & t \in [0,1] \setminus \mathrm{Q}. \end{cases}$$

$x(t) \overset{\substack{\text{почти} \\ \text{всюду}}}{=} 0 \Rightarrow \{h_n(t) \equiv 0\}_{n-1}^{\infty}$ сходится п.в. к $x(t)$.

Лемма 4. *Пусть* $x(t)$, $y(t)$ — *измеримые на* $[a,b]$ *функции. Пусть функция* $\varphi(x,y)$ *непрерывна по совокупности переменных* $x,y\in\mathbb{R}^1$. *Тогда функция* $\widetilde{\varphi}(t)=\varphi[x(t),y(t)]$ – *измеримая на* $[a,b]$.

Доказательство. Определим на отрезке $[a,b]$ множества:

$A_1=\{t\in[a,b]\,|\,x(t)$ – не определена$\}$,
$B_1=\{t\in[a,b]\,|\,y(t)$ – не определена$\}$,
$A_2=\{t\in[a,b]\,|\,|x(t)|=\infty\}$,
$B_2=\{t\in[a,b]\,|\,|y(t)|=\infty\}$,
$A_3=\{t\in[a,b]\,|\,h_n(t)\not\to x(t)\}$,
$B_3=\{t\in[a,b]\,|\,k_n(t)\not\to y(t)\}$.

Здесь $\{h_n(t)\}$ и $\{k_n(t)\}$ ступенчатые функции такие, что $h_n(t) \overset{\text{п.в.}}{\to} x(t)$ и $k_n(t) \overset{\text{п.в.}}{\to} y(t)$ при $n \to \infty$. На множестве $C = [a,b] \backslash (A_1 \cup B_1 \cup A_2 \cup B_2 \cup A_3 \cup B_3)$, которое является множеством полной меры, функция $\widetilde{\varphi}(t)$ определена и конечна; кроме того, в силу непрерывности функции $\varphi(x,y)$, ступенчатые функции $l_n(t) = \varphi[h_n(t), k_n(t)] \to \varphi[x(t), y(t)]$ при $n \to \infty$ ($\forall t \in C$, то есть почти всюду).

Следовательно, $\widetilde{\varphi}(t)$ – измеримая на $[a,b]$ функция. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть* $x(t)$, $y(t)$ – *измеримые на* $[a, b]$ *функции. Тогда измеримыми являются и следующие функции:* $\alpha x(t)$ $(\alpha \in \mathbb{R}^1)$, $|x(t)|$, $x(t)+y(t)$, $x(t)y(t)$, $\max\{x(t), y(t)\}$, $\min\{x(t), y(t)\}$.

(Доказать самостоятельно.)

Лемма 5. *Пусть* $x(t)$, $y(t)$ – *измеримые на* $[a, b]$ *функции и* $y(t) \neq 0$ *п.в. на* $[a, b]$. *Тогда функция* $x(t)/y(t)$ – *измеримая на* $[a, b]$.

(Без доказательства.)

3. Интегрирование ступенчатых функций

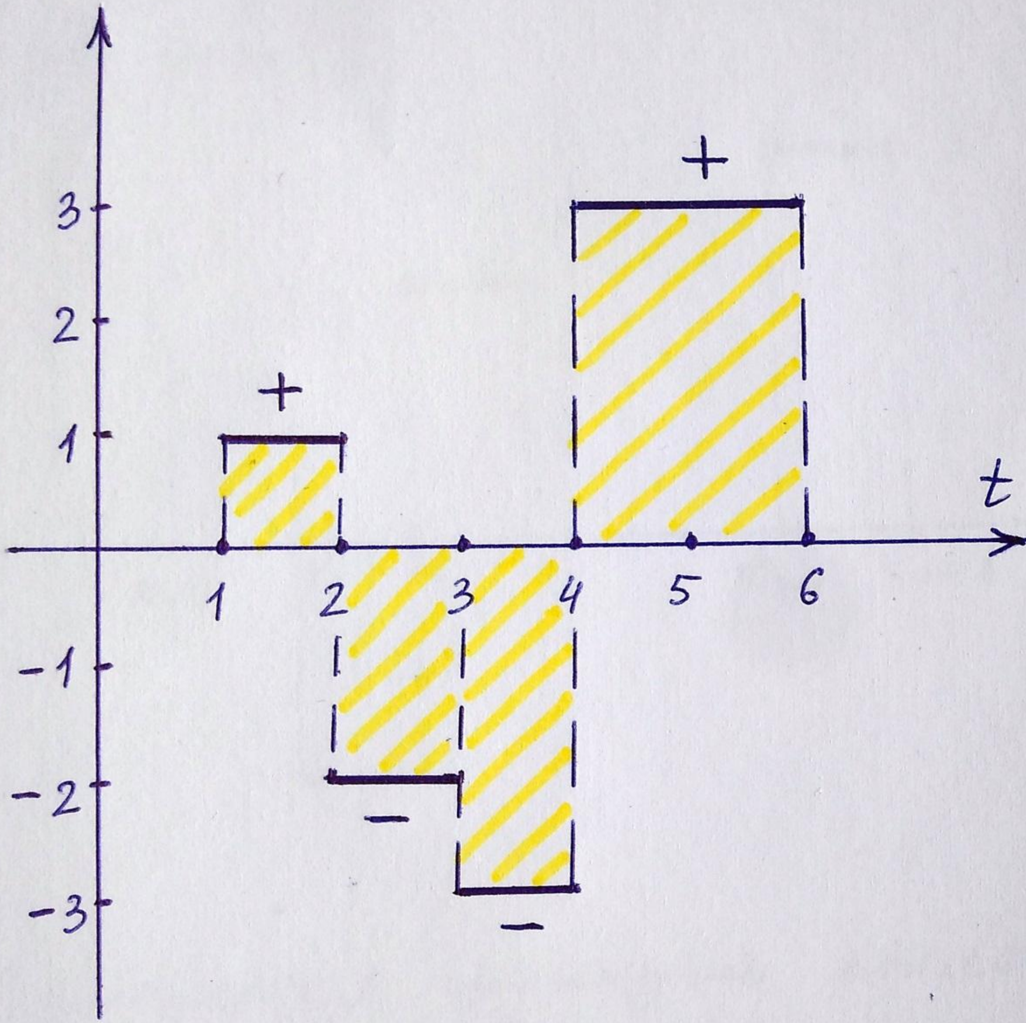
Пусть ступенчатая на $[a, b]$ функция $h(t)$ принимает в соответствующих интервалах $\triangle_i = (t_{i-1}, t_i)$ значения b_i, где $i = \overline{1, n}$. Определим интеграл от $h(t)$ формулой

$$Ih = \sum_{i=1}^{n} b_i \, |\triangle_i|. \qquad (2)$$

Нетрудно видеть, что всякая ступенчатая функция интегрируема по Риману, а определенный в (2) интеграл Ih совпадает с интегралом Римана от этой функции, то есть

$$Ih = (R) \int_a^b h(t) \, dt.$$

Пример



$$Ih = 1\cdot 1 + (-2)\cdot 1 +$$
$$+ (-3)\cdot 1 + 3\cdot 2 = 2$$

Из известных свойств интеграла Римана следует

Лемма 6. *Пусть h, h_1, h_2 – ступенчатые на $[a,b]$ функции. Тогда:*

1) $(\forall\alpha \in \mathbb{R}^1)[\,I(\alpha h) = \alpha Ih\,]$;

2) $I(h_1 + h_2) = Ih_1 + Ih_2$;

3) *если* $h_1(t) \leq h_2(t)$ *п.в. на* $[a,b]$, *то* $Ih_1 \leq Ih_2$.

В частности, если $h(t) \geq 0$ *п.в. на* $[a,b]$, *то* $Ih \geq 0$.

Далее тот факт, что последовательность функций $\{x_n(t)\}$ п.в. на $[a,b]$ *монотонно убывая* (соответственно *возрастая*) при $n \to \infty$ стремится к функции $x(t)$, будем обозначать $x_n(t) \searrow x(t)$ (соответственно $x_n(t) \nearrow x(t)$).

Лемма 7. *Пусть* $\{h_n(t)\}$ – *последовательность неотрицательных ступенчатых функций и* $h_n(t) \searrow 0$. *Тогда* $Ih_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

(Без доказательства.)

Лемма 8. *Пусть* $\{h_n(t)\}$ – *последовательность неотрицательных ступенчатых функций и эта последовательность п.в. на* $[a, b]$ *монотонно убывает. Пусть также* $Ih_n \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда* $h_n(t) \searrow 0$.

(Без доказательства.)