§ 3.3. Эквивалентные преобразования формул

1) Понятие эквивалентного преобразования

Логические формулы, представляющие одну и ту же логическую функцию, называются эквивалентными или равносильными (§ 3.1)

Чтобы отличать от записи функции эквивалентности $\psi_9(x,y)$ ($x \equiv y$), а также отношения равномощности множеств ($M_1 \approx M_2$), будем обозначать эквивалентность формул как $F_1 = F_2$

Из § 3.2: Свойства логических операций $\vee$, &, ¬ («Исходные соотношения»)

Ассоциативность

$$x_1 \,\&\, (x_2 \,\&\, x_3) = (x_1 \,\&\, x_2) \,\&\, x_3 \qquad (3.2.1)$$

$$x_1 \vee (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2) \vee x_3$$

Коммутативность

$$x_1 \,\&\, x_2 = x_2 \,\&\, x_1 \qquad x_1 \vee x_2 = x_2 \vee x_1 \qquad (3.2.2)$$

Дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции

$$x_1 \,\&\, (x_2 \vee x_3) = (x_1 \,\&\, x_2) \vee (x_1 \,\&\, x_3) \qquad (3.2.3)$$

Дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции

$$x_1 \vee (x_2 \,\&\, x_3) = (x_1 \vee x_2) \,\&\, (x_1 \vee x_3) \qquad (3.2.4)$$

Идемпотентность

$$x \,\&\, x = x \qquad x \vee x = x \qquad (3.2.5)$$

Двойное отрицание

$$\neg\neg x = x \qquad (3.2.6)$$

Свойства констант

$x \,\&\, 1 = x$ $\qquad$ $x \,\&\, 0 = 0$

$x \vee 1 = 1$ $\qquad$ $x \vee 0 = x$ $\qquad$ (3.2.7)

$\neg 0 = 1$ $\qquad$ $\neg 1 = 0$

Правила де Моргана

$$\neg(x_1 \,\&\, x_2) = \neg x_1 \vee \neg x_2 \qquad (3.2.8)$$

$$\neg(x_1 \vee x_2) = \neg x_1 \,\&\, \neg x_2$$

Закон противоречия

$$\neg x \,\&\, x = 0 \qquad (3.2.9)$$

Закон исключённого третьего

$$\neg x \vee x = 1 \qquad (3.2.10)$$

Правило подстановки формулы вместо переменной

При подстановке формулы F вместо переменной x в одно из исходных соотношений (3.2.1) – (3.2.10) или в какую-либо иную логическую формулу должны быть одновременно заменены формулой F все вхождения переменной x в это соотношение (формулу)

Пример:

$$\neg(x_1 \,\&\, x_2) \vee x_1 =$$

$$= \neg((\neg x_1 \,\&\, \neg x_3) \,\&\, x_2) \vee (\neg x_1 \,\&\, \neg x_3) =$$

Замена переменной x_1 формулой $F = \neg x_1 \,\&\, \neg x_3$

Смысл одновременности: заменили оба вхождения x_1 «первого поколения». В формуле – снова два вхождения переменной x - «второго поколения». Подстановка может быть продолжена

$$= \neg((\neg(\neg x_1 \,\&\, \neg x_3) \,\&\, \neg x_3) \,\&\, x_2) \vee (\neg (\neg x_1 \,\&\, \neg x_3) \,\&\, \neg x_3) = \ldots..$$

и т.д., и т.д., ……….

Правило замены подформулы на эквивалентную

Если какая-либо формула F содержит F_1 в качестве подформулы и F_1 эквивалентна F_2, то замена F_1 на F_2 даёт формулу, эквивалентную F, при этом замена всех вхождений F_1 в F не требуется

Пример:

$$\neg(x_1 \& x_2) \vee (x_1 \& \neg(x_1 \& x_2)) \approx$$
$$\approx (\neg x_1 \vee \neg x_2) \vee (x_1 \& \neg(x_1 \& x_2))$$

Замена первого вхождения $\neg(x_1 \& x_2)$ на $(\neg x_1 \vee \neg x_2)$

Преобразования логических формул, использующие исходные соотношения (3.2.1) – (3.2.10), правило подстановки формулы вместо переменной и правило замены подформулы на эквивалентную, называются **эквивалентными преобразованиями**

Цель эквивалентных преобразований – приведение формулы к более удобному (каноническому, минимальному, …) виду

Th.3.3.1 **Для любых двух эквивалентных формул F_1 и F_2 существует эквивалентное преобразование F_1 в F_2**

Доказательство Th.3.3.1

1) Для функций, представленных формулами F_1 и F_2, существует СДНФ. Так как $F_1 \approx F_2$, их СДНФ совпадают как СДНФ одной и той же функции.

2) Цепочка действий $F_1 \Rightarrow$ СДНФ $\Rightarrow F_2$ доказывает существование искомого преобразования.

Доказано Th.3.3.1

2) Полезные соотношения для булевских формул

Поглощение

$x \vee (x \,\&\, y) = x$ (3.3.1a) $\quad x \,\&\, (x \vee y) = x$ (3.3.1b)

Склеивание $(x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, \neg y) = x$ (3.3.2)

Сопоставление $x \vee (\neg x \,\&\, y) = x \vee y$ (3.3.3)

Обобщённое склеивание

$(x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z) \vee (y \,\&\, \neg z) = (x \,\&\, z) \vee (y \,\&\, \neg z)$ (3.3.4)

Поглощение + Сопоставление

$x_1 \vee f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 \vee f(0, x_2, \dots, x_n)$ (3.3.5)

Доказательство - на примере (3.3.1а)

$$x \vee (x \,\&\, y) \overset{(3.2.7)}{=} (x \,\&\, 1) \vee (x \,\&\, y) \overset{(3.2.3)}{=} x \,\&\, (1 \vee y) \overset{(3.2.7)}{=}$$

$$\overset{(3.2.7)}{=} x \,\&\, 1 = x$$

Доказательство соотношения (3.3.5)

$$x_1 \vee f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \overset{(Th.3.1.1 \text{ по } x_1)}{=}$$

$$= x_1 \vee (\neg x_1 \,\&\, f(0,x_2,\ldots,x_n)) \vee (x_1 \,\&\, f(1,x_2,\ldots,x_n)) =$$

$$= x_1 \vee (\neg x_1 \,\&\, f(0,x_2,\ldots,x_n)) \vee (x_1 \,\&\, f(1,x_2,\ldots,x_n)) \overset{(3.3.3)}{=}$$

$$= x_1 \vee f(0,x_2,\ldots,x_n) \vee (x_1 \,\&\, f(1,x_2,\ldots,x_n)) =$$

$$= x_1 \vee f(0,x_2,\ldots,x_n) \vee (x_1 \,\&\, f(1,x_2,\ldots,x_n)) \overset{(3.3.1а)}{=}$$

$$= x_1 \vee f(0, x_2, \ldots, x_n)$$

3) Общая логика эквивалентных преобразований

$$\mathscr{A} = ((x \equiv y) \mid x) \Rightarrow y$$

Шаг 1. Если в формуле использованы небулевские операции, заменяем соответствующие подформулы на их булевский эквивалент:

(A) $x \oplus y = (\neg x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, \neg y) = (x \vee y) \,\&\, (\neg x \vee \neg y)$

(B) $x \equiv y = (x \,\&\, y) \vee (\neg x \,\&\, \neg y) = (x \vee \neg y) \,\&\, (\neg x \vee y)$

(C) $x \downarrow y = \neg x \,\&\, \neg y$ (D) $x \mid y = \neg x \vee \neg y$

(E) $0 = x \,\&\, \neg x$ (F) $x \Rightarrow y = \neg x \vee y$ (G) $1 = x \vee \neg x$

$$\mathscr{A} = ((x \equiv y) \mid x) \Rightarrow y$$

<u>Шаг 1</u>. Если в формуле использованы небулевские операции, заменяем соответствующие подформулы на их булевский эквивалент*:

[B] $x \equiv y = (x \,\&\, y) \vee (\neg x \,\&\, \neg y) = (x \vee \neg y) \,\&\, (\neg x \vee y)$

$$((x \equiv y) \mid x) \Rightarrow y \quad = \quad (((x \vee \neg y) \,\&\, (\neg x \vee y)) \mid x) \Rightarrow y \quad =$$

[D] $x \mid y = \neg x \vee \neg y$

$$= \quad (\neg((x \vee \neg y) \,\&\, (\neg x \vee y)) \vee \neg x) \Rightarrow y \quad =$$

[F] $x \Rightarrow y = \neg x \vee y$

$$= \quad \neg(\neg((x \vee \neg y) \,\&\, (\neg x \vee y)) \vee \neg x) \vee y$$

*** Порядок замены – возможны варианты**

Шаг 2. С помощью правила двойного отрицания (3.2.6) и правил де Моргана (3.2.8) все отрицания последовательно опускаем непосредственно до знаков переменных:

3.2.6 $\neg\neg x = x$

3.2.8 $\neg(x \,\&\, y) = \neg x \vee \neg y$ $\quad\quad$ $\neg(x \vee y) = \neg x \,\&\, \neg y$

$$\neg(\neg((x \vee \neg y) \,\&\, (\neg x \vee y)) \vee \neg x) \vee y =$$

$$= \neg(\neg(x \vee \neg y) \vee \neg(\neg x \vee y) \vee \neg x) \vee y =$$

$$= (\neg\neg(x \vee \neg y) \,\&\, \neg\neg(\neg x \vee y) \,\&\, \neg\neg x) \vee y =$$

$$= ((x \vee \neg y) \,\&\, (\neg x \vee y) \,\&\, x) \vee y$$

Итог – булевская формула, в которой все отрицания применены непосредственно к переменным

<u>Шаг 3</u>. С помощью дистрибутивности (3.2.3) раскрываем скобки. Используя свойства идемпотентности (3.2.5), закон противоречия (3.2.9) и закон исключённого третьего (3.2.10), удаляем повторяющиеся подформулы и переменные:

3.2.3 $x \,\&\, (y \vee z) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$

3.2.5 $x \,\&\, x = x \qquad x \vee x = x$

3.2.9, 3.2.10 $\neg x \,\&\, x = 0 \qquad \neg x \vee x = 1$

$$((x \vee \neg y) \,\&\, (\neg x \vee y) \,\&\, x) \vee y =$$

$$= \quad (((x\&\neg x)\vee(x\&y)\vee(\neg x\&\neg y)\vee(y\&\neg y)) \,\&\, x) \vee y \quad =$$

$$= \quad (x\&x\&\neg x)\vee(x\&x\&y)\vee(x\&\neg x\&\neg y)\vee(x\&y\&\neg y) \vee y \quad =$$

$$= \quad 0\vee(x\&y)\vee 0\vee 0\vee y$$

Удалили повторяющиеся подформулы и переменные

<u>Шаг 4</u>. С помощью (3.2.7) удаляем константы:

3.2.7

$$x \& 1 = x \qquad x \& 0 = 0$$

$$x \vee 1 = 1 \qquad x \vee 0 = x$$

$$0 \vee (x\&y) \vee 0 \vee 0 \vee y = (x\&y) \vee y$$

<u>Шаг 5</u>. При необходимости применяем «полезные соотношения» 3.3.1 – 3.3.5; в данном случае - первую из формул поглощения (3.3.1):

3.3.1

$$x \vee (x \& y) = x \qquad x \& (x \vee y) = x$$

$$(x\&y) \vee y = y$$

Завершили преобразования

Более подробно о применении «полезных соотношений»

$$\mathscr{B} = ((x \vee \neg y) \,\&\, (z \vee \neg x)) \vee ((y \vee z) \,\&\, (x \vee y \vee \neg z)) =$$

$$= ((x\&z)\vee(x\&\neg x)\vee(\neg y\&z)\vee(\neg x\&\neg y))\vee$$

$$\vee((x\&y)\vee(y\&y)\vee(y\&\neg z)\vee(x\&z)\vee(y\&z)\vee(z\&\neg z)) =$$

$$= ((x\&z)\vee 0\vee(\neg y\&z)\vee(\neg x\&\neg y))\vee$$

$$\vee((x\&y)\vee y\vee(y\&\neg z)\vee(x\&z)\vee(y\&z)\vee 0) =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$$

3.3.1 $x \vee (x \,\&\, y) = x$ $\quad x \,\&\, (x \vee y) = x$

3.3.3 $x \vee (\neg x \,\&\, y) = x \vee y$

3.3.1 $x \vee (x \& y) = x$ $\quad x \& (x \vee y) = x$ $\quad$ **3.3.3** $x \vee (\neg x \& y) = x \vee y$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$$

3.3.1 $x \vee (x \,\&\, y) = x \qquad x \,\&\, (x \vee y) = x$ 3.3.3 $x \vee (\neg x \,\&\, y) = x \vee y$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

3.3.1 $x \vee (x \& y) = x$ $x \& (x \vee y) = x$ 3.3.3 $x \vee (\neg x \& y) = x \vee y$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$

(3.3.1) $= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{x\&y \vee y} \vee x\&z \vee y\&z =$

3.3.1 $x \vee (x \,\&\, y) = x \qquad x \,\&\, (x \vee y) = x$ 3.3.3 $x \vee (\neg x \,\&\, y) = x \vee y$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{x\&y \vee y} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

3.3.1 $x \vee (x \& y) = x \qquad x \& (x \vee y) = x$ **3.3.3** $x \vee (\neg x \& y) = x \vee y$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{x\&y \vee y} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{y} \vee x\&z \vee \underline{y\&z} =$$

3.3.1 $x \vee (x \& y) = x$ $x \& (x \vee y) = x$ 3.3.3 $x \vee (\neg x \& y) = x \vee y$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{x\&y \vee y} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{y} \vee x\&z \vee \underline{y\&z} =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z =$$

3.3.1 $x \vee (x \& y) = x$ $\quad x \& (x \vee y) = x$ $\quad$ 3.3.3 $x \vee (\neg x \& y) = x \vee y$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{x\&y \vee y} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{y} \vee x\&z \vee \underline{y\&z} =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \underline{\neg x\&\neg y \vee y} \vee x\&z =$$

3.3.1 $x \vee (x \& y) = x$ $\quad x \& (x \vee y) = x$ $\quad$ 3.3.3 $x \vee (\neg x \& y) = x \vee y$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{x\&y \vee y} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{y} \vee x\&z \vee \underline{y\&z} =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \underline{\neg x\&\neg y \vee y} \vee x\&z =$$

(3.3.3) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$$

3.3.1 $x \vee (x \,\&\, y) = x \qquad x \,\&\, (x \vee y) = x$ 3.3.3 $x \vee (\neg x \,\&\, y) = x \vee y$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{x\&y \vee y} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{y} \vee x\&z \vee \underline{y\&z} =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \underline{\neg x\&\neg y \vee y} \vee x\&z =$$

(3.3.3) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$$

$$= x\&z \vee \underline{\neg y\&z} \vee \neg x \vee \underline{y} \vee x\&z =$$

3.3.1 $x \vee (x \& y) = x \qquad x \& (x \vee y) = x$ 3.3.3 $x \vee (\neg x \& y) = x \vee y$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$

(3.3.1) $= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{x\&y \vee y} \vee x\&z \vee y\&z =$

(3.3.1) $= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{y} \vee x\&z \vee \underline{y\&z} =$

(3.3.1) $= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z =$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \underline{\neg x\&\neg y \vee y} \vee x\&z =$

(3.3.3) $= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$

$= x\&z \vee \underline{\neg y\&z} \vee \neg x \vee \underline{y} \vee x\&z =$

(3.3.3) $= x\&z \vee z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$

3.3.1 $x \lor (x \& y) = x$ $x \& (x \lor y) = x$ 3.3.3 $x \lor (\neg x \& y) = x \lor y$

$$= x\&z \lor \neg y\&z \lor \neg x\&\neg y \lor x\&y \lor y \lor y\&\neg z \lor x\&z \lor y\&z =$$

$$= x\&z \lor \neg y\&z \lor \neg x\&\neg y \lor x\&y \lor \underline{y \lor y\&\neg z} \lor x\&z \lor y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \lor \neg y\&z \lor \neg x\&\neg y \lor x\&y \lor y \lor x\&z \lor y\&z =$$

$$= x\&z \lor \neg y\&z \lor \neg x\&\neg y \lor \underline{x\&y \lor y} \lor x\&z \lor y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \lor \neg y\&z \lor \neg x\&\neg y \lor y \lor x\&z \lor y\&z =$$

$$= x\&z \lor \neg y\&z \lor \neg x\&\neg y \lor \underline{y} \lor x\&z \lor \underline{y\&z} =$$

(3.3.1) $$= x\&z \lor \neg y\&z \lor \neg x\&\neg y \lor y \lor x\&z =$$

$$= x\&z \lor \neg y\&z \lor \underline{\neg x\&\neg y \lor y} \lor x\&z =$$

(3.3.3) $$= x\&z \lor \neg y\&z \lor \neg x \lor y \lor x\&z =$$

$$= x\&z \lor \underline{\neg y\&z} \lor \neg x \lor \underline{y} \lor x\&z =$$

(3.3.3) $$= x\&z \lor z \lor \neg x \lor y \lor x\&z =$$

$$= \underline{x\&z \lor z} \lor \neg x \lor y \lor x\&z =$$

3.3.1 $x \vee (x \,\&\, y) = x$ $x \,\&\, (x \vee y) = x$ 3.3.3 $x \vee (\neg x \,\&\, y) = x \vee y$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{x\&y \vee y} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{y} \vee x\&z \vee \underline{y\&z} =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \underline{\neg x\&\neg y \vee y} \vee x\&z =$$

(3.3.3) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$$

$$= x\&z \vee \underline{\neg y\&z} \vee \neg x \vee \underline{y} \vee x\&z =$$

(3.3.3) $$= x\&z \vee z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$$

$$= \underline{x\&z \vee z} \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$$

(3.3.1) $$= z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$$

3.3.1 $x \vee (x \& y) = x$ $x \& (x \vee y) = x$ 3.3.3 $x \vee (\neg x \& y) = x \vee y$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{x\&y \vee y} \vee x\&z \vee y\&z =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{y} \vee x\&z \vee \underline{y\&z} =$$

(3.3.1) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z =$$

$$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \underline{\neg x\&\neg y \vee y} \vee x\&z =$$

(3.3.3) $$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$$

$$= x\&z \vee \underline{\neg y\&z} \vee \neg x \vee \underline{y} \vee x\&z =$$

(3.3.3) $$= x\&z \vee z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$$

$$= \underline{x\&z \vee z} \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$$

(3.3.1) $$= z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$$

$$= \underline{z} \vee \neg x \vee y \vee \underline{x\&z} =$$

3.3.1 $x \vee (x \& y) = x$ $x \& (x \vee y) = x$ 3.3.3 $x \vee (\neg x \& y) = x \vee y$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee y\&\neg z \vee x\&z \vee y\&z =$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee \underline{y \vee y\&\neg z} \vee x\&z \vee y\&z =$

(3.3.1) $= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee x\&y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{x\&y \vee y} \vee x\&z \vee y\&z =$

(3.3.1) $= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z \vee y\&z =$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee \underline{y} \vee x\&z \vee \underline{y\&z} =$

(3.3.1) $= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x\&\neg y \vee y \vee x\&z =$

$= x\&z \vee \neg y\&z \vee \underline{\neg x\&\neg y \vee y} \vee x\&z =$

(3.3.3) $= x\&z \vee \neg y\&z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$

$= x\&z \vee \underline{\neg y\&z} \vee \neg x \vee \underline{y} \vee x\&z =$

(3.3.3) $= x\&z \vee z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$

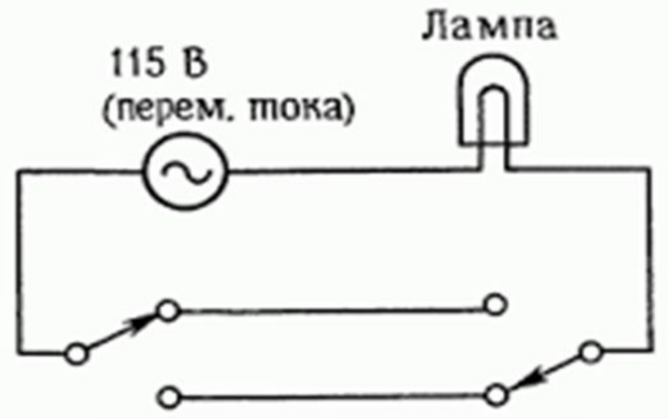
$= \underline{x\&z \vee z} \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$

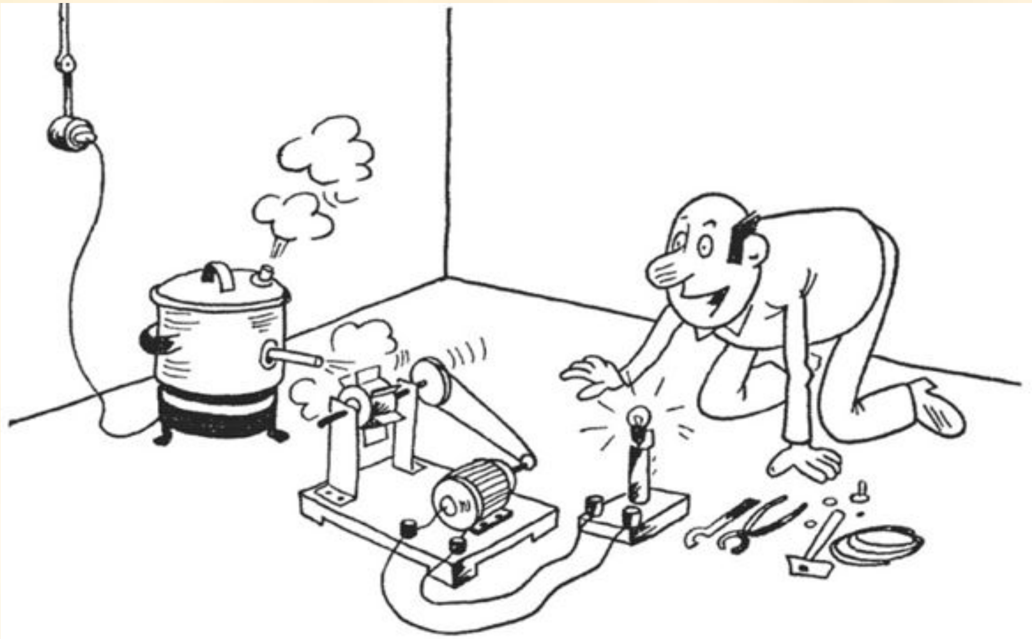
(3.3.1) $= z \vee \neg x \vee y \vee x\&z =$

$= \underline{z} \vee \neg x \vee y \vee \underline{x\&z} =$

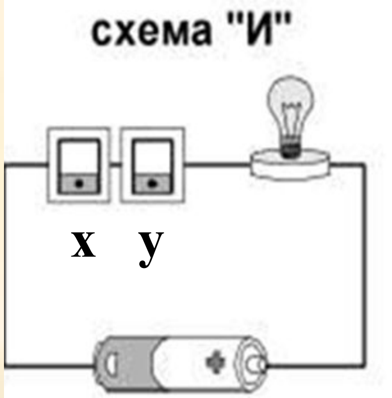
(3.3.1) $= \neg x \vee y \vee z$

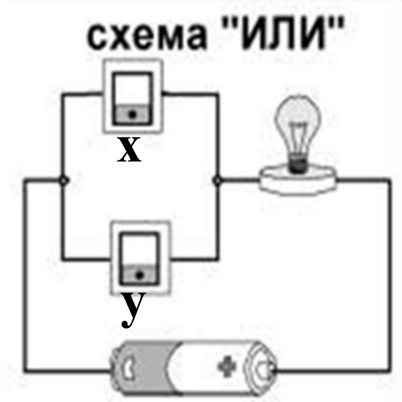
4) Анализ схем из двухпозиционных переключательных элементов





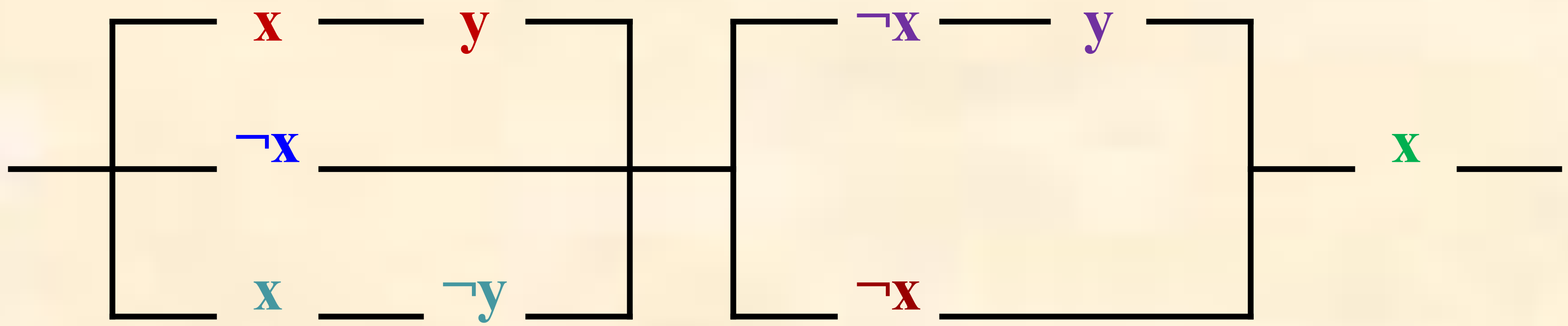
x & y





x ∨ y

a)



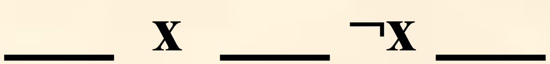
$$((x \,\&\, y) \vee \neg x \vee (x \,\&\, \neg y)) \,\&\, ((\neg x \,\&\, y) \vee \neg x) \,\&\, x$$

$$=$$

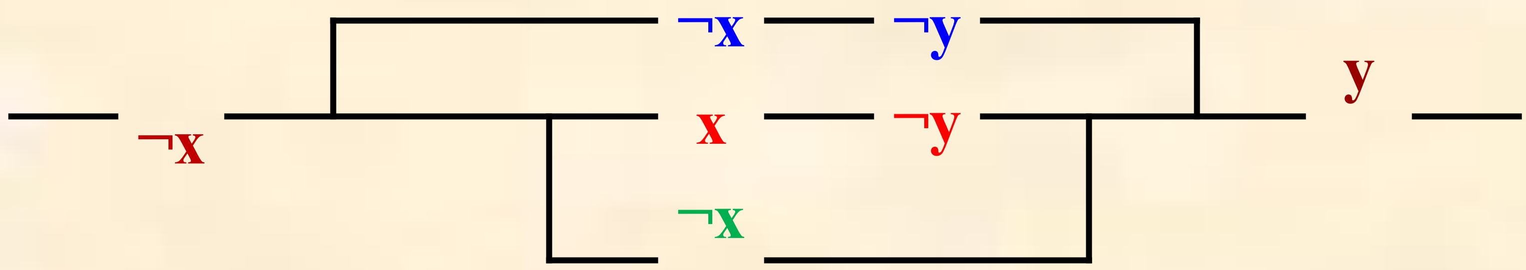
$$= (\neg x \vee y \vee (x \,\&\, \neg y)) \,\&\, (\neg x \,\&\, x) =$$

$$= (\neg x \vee y \vee x) \,\&\, (\neg x \,\&\, x) =$$

$$= 1 \,\&\, (\neg x \,\&\, x) = \neg x \,\&\, x = 0$$



b)



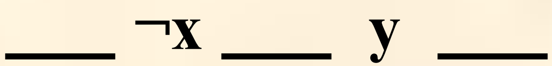
$$\neg x \mathbin{\&} ((\neg x \mathbin{\&} \neg y) \vee (x \mathbin{\&} \neg y) \vee \neg x) \mathbin{\&} y =$$

$$= \neg x \mathbin{\&} ((\neg x \mathbin{\&} \neg y) \vee \neg x \vee \neg y) \mathbin{\&} y =$$

$$= \neg x \mathbin{\&} (\neg x \vee \neg y) \mathbin{\&} y =$$

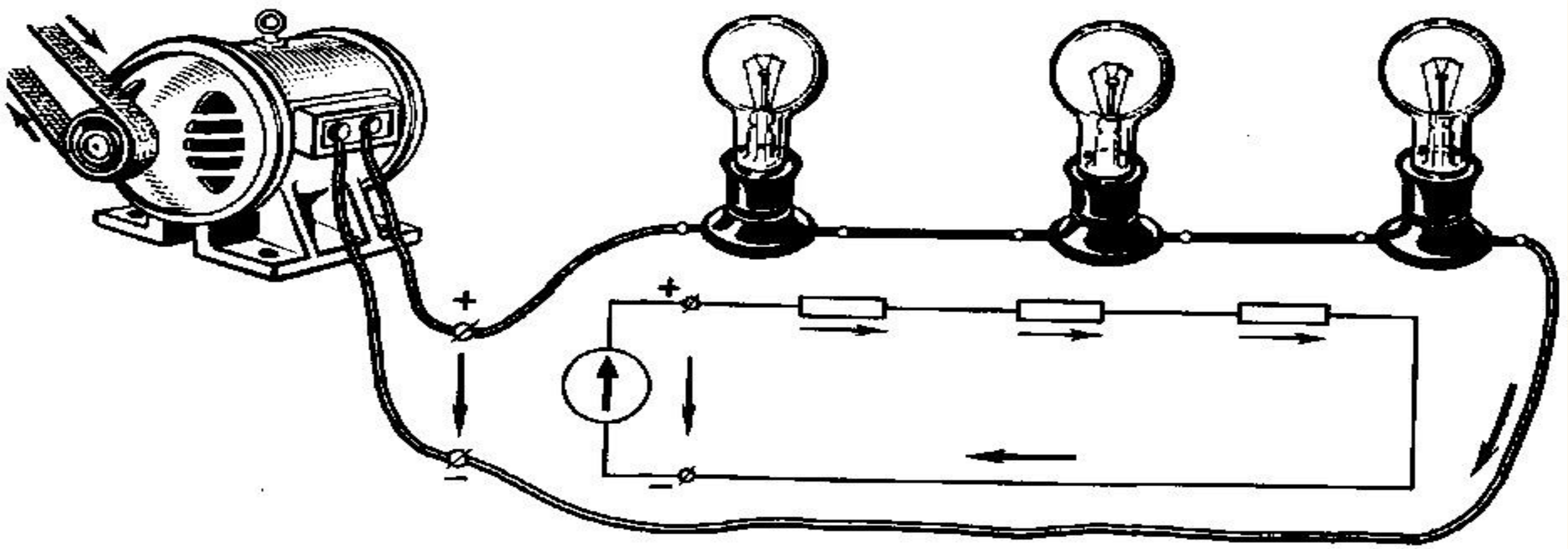
$$= (\neg x \mathbin{\&} (\neg x \mathbin{\&} y)) \vee (\neg x \mathbin{\&} \neg y \mathbin{\&} y) =$$

$$= (\neg x \mathbin{\&} y) \vee 0 = \neg x \mathbin{\&} y$$



5) Синтез схем из двухпозиционных переключательных элементов

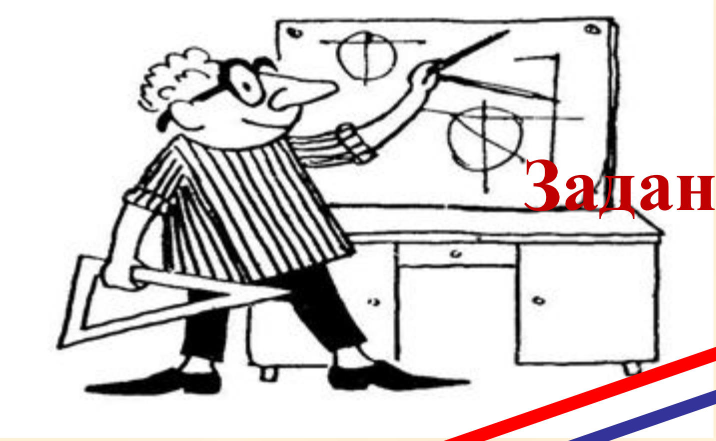
Построить схему электрической цепи для подъезда трёхэтажного дома такую, чтобы двухпозиционным переключателем на любом этаже можно было бы включить или выключить свет во всём подъезде независимо от положения переключателей на двух других этажах.



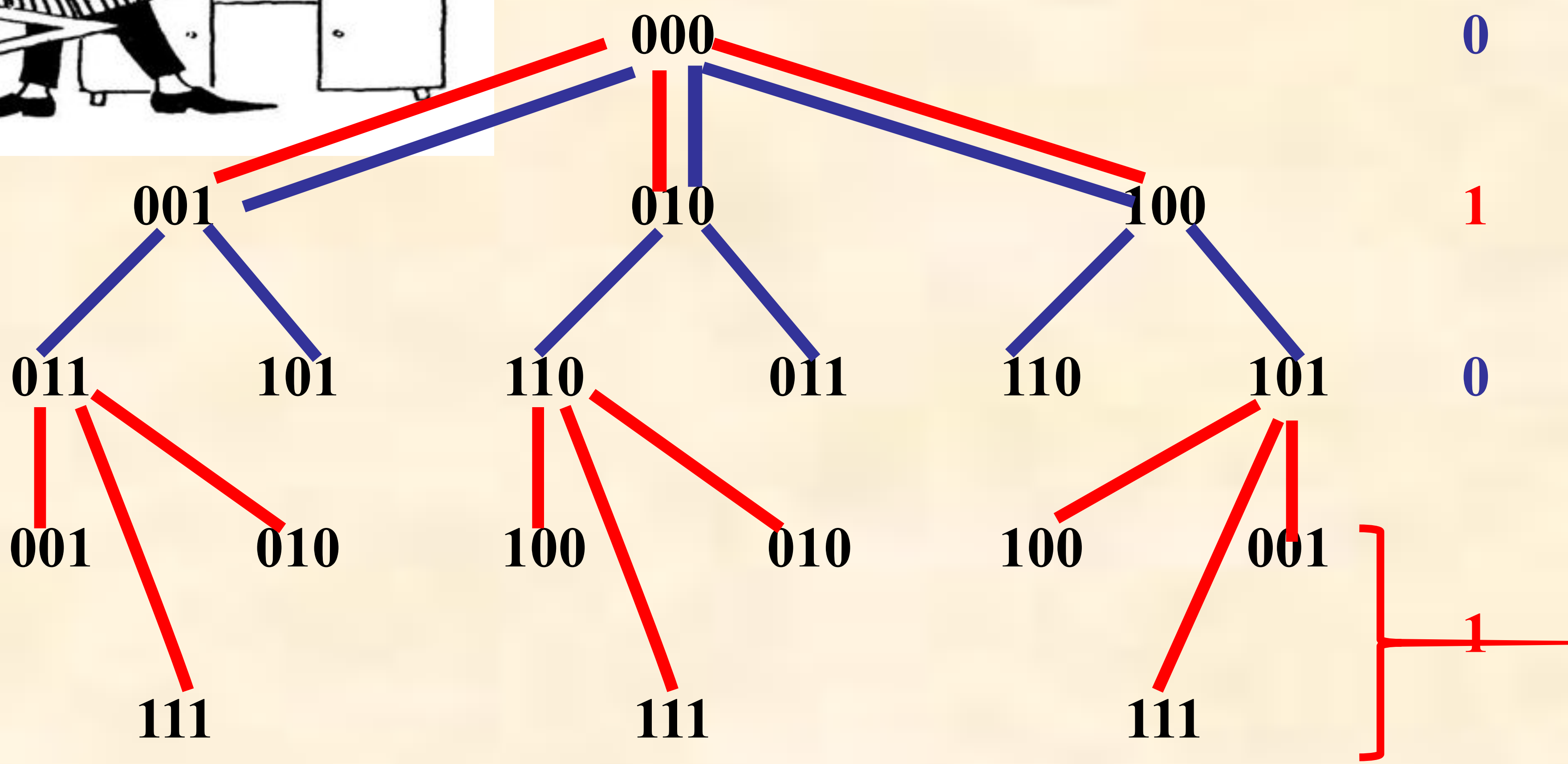
Интересный другой вариант той же задачи:

Составить схему, позволяющую включать и выключать свет в вашей комнате любым из трёх различных выключателей. Выключатели расположены у входа в комнату, над постелью и у письменного стола

(Медведева Я.С. Применение булевых функций к релейно-контактным схемам // Молодой учёный. — 2016. — № 3. — С. 8-11)



Задание на синтез электрической цепи



Отправная точка: 000 – свет в подъезде выключен

Формализация задания на синтез

x_1	x_2	x_3	L
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

СДНФ (L) =

$= (\neg x_1 \,\&\, \neg x_2 \,\&\, x_3)$

$\vee$

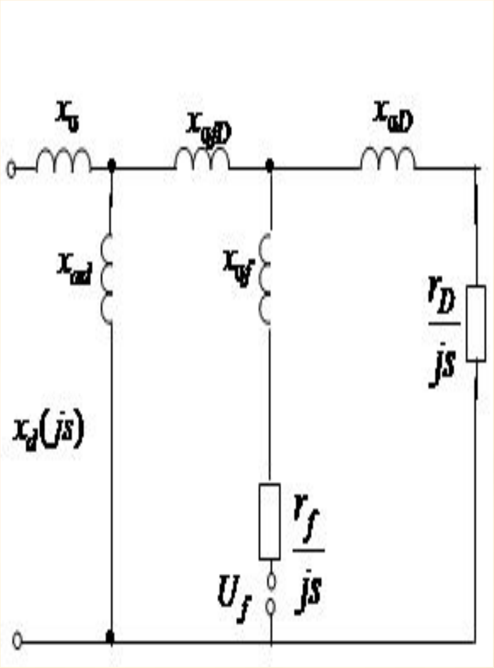
$\vee\ (\neg x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, \neg x_3)$

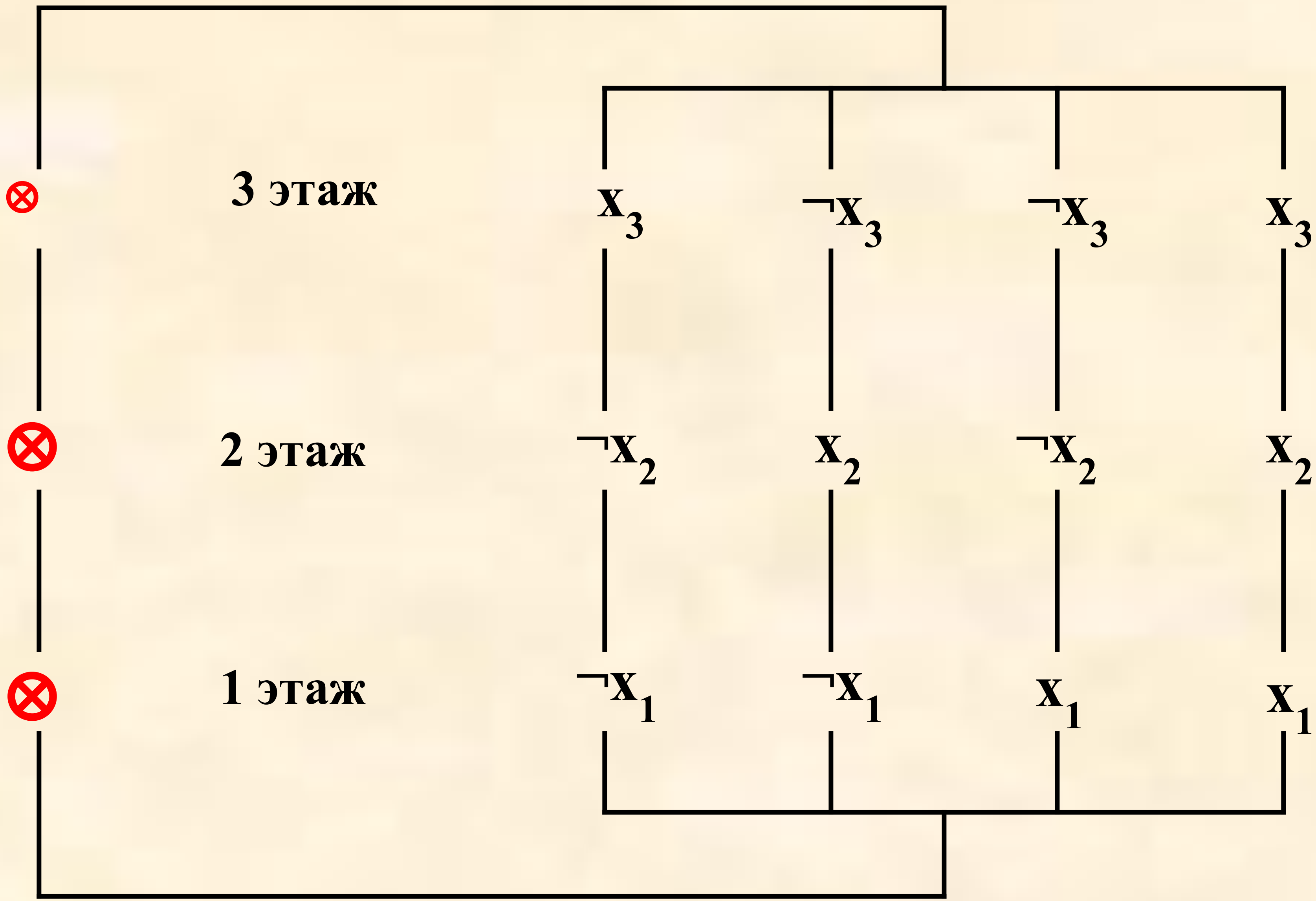
$\vee$

$\vee\ (x_1 \,\&\, \neg x_2 \,\&\, \neg x_3)$

$\vee$

$\vee\ (x_1 \,\&\, x_2 \,\&\, x_3)$




3 этаж
2 этаж
1 этаж
x_3
$\neg x_3$
$\neg x_3$
x_3
$\neg x_2$
x_2
$\neg x_2$
x_2
$\neg x_1$
$\neg x_1$
x_1
x_1

Студентки Алла, Бэлла, Валя и Галя посещают университет по очереди и ведут общий конспект. Необходимо составить на следующую неделю график посещения, учитывая, что:

Задача

1. В понедельник – стипендия, пойдут все. Зато в субботу – день курсового проектирования, никто не пойдёт

2. Валя и Галя не смогут пойти на занятия во вторник

3. Если Валя пойдёт в среду или Галя в четверг, то Бэлла готова сходить на занятия в пятницу

4. Если Алла не пойдёт в четверг, то Бэлла согласна посетить университет в среду

5. Если Алла или Галя будут на занятиях в среду, то Валя сможет пойти в пятницу

6. Если Галя в пятницу вместо занятий пойдёт на свадьбу сестры, то Алле придётся пойти в университет во вторник, а Вале – в четверг

7. Во вторник, среду, четверг и пятницу девушки ходят на занятия по одной

8. Каждая девушка в течение вторника, среды, четверга и пятницы сходит на занятия ровно один раз

В задаче использованы 24 переменных утверждения вида «Студентка X посетила занятия в k-ый день недели»:

X_k, $X \in \{А, Б, В, Г\}$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

1. В понедельник – стипендия, пойдут все. Зато в субботу – день курсового проектирования, никто не пойдёт	$А_1 \& Б_1 \& В_1 \& Г_1$ $\neg А_6 \& \neg Б_6 \& \neg В_6 \& \neg Г_6$ или $\neg (А_6 \vee Б_6 \vee В_6 \vee Г_6)$
2. Валя и Галя не смогут пойти на занятия во вторник	$\neg В_2 \& \neg Г_2$
3. Если Валя пойдёт в среду или Галя в четверг, то Бэлла готова сходить на занятия в пятницу	$(В_3 \vee Г_4) \Rightarrow Б_5$
4. Если Алла не пойдёт в четверг, то Бэлла согласна посетить университет в среду	$\neg А_4 \Rightarrow Б_3$

В задаче использованы 24 переменных утверждения вида «Студентка X посетила занятия в k-ый день недели»:

X_k $X \in \{А, Б, В, Г\}$, $k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

5. Если Алла или Галя будут на занятиях в среду, то Валя сможет пойти в пятницу	$(А_3 \vee Г_3) \Rightarrow В_5$
6. Если Галя в пятницу вместо занятий пойдёт на свадьбу сестры, то Алле придётся пойти в университет во вторник, а Вале – в четверг	$\neg Г_5 \Rightarrow (А_2 \ \& \ В_4)$
7. Во вторник, среду, четверг и пятницу девушки ходят на занятия по одной	$X_k \ \& \ Y_k \equiv 0$ $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, $X \neq Y$
8. Каждая девушка в течение вторника, среды, четверга и пятницы сходит на занятия ровно один раз	$X_k \ \& \ X_n \equiv 0$ $k, n \in \{2, 3, 4, 5\}$, $k \neq n$

Приводим все формулы к булевскому виду:

(1а) A_1 & $Б_1$ & $В_1$ & $Г_1 = 1$

(1б) $\neg A_6$ & $\neg Б_6$ & $\neg В_6$ & $\neg Г_6 = 1$

(7) X_k & $Y_k \equiv 0$ $k \in \{2, 3, 4, 5\}$, $X \neq Y$

(8) X_k & $X_n \equiv 0$

$k, n \in \{2, 3, 4, 5\}$, $k \neq n$

(2) $\neg В_2$ & $\neg Г_2 = 1$

(3) $(\neg В_3$ & $\neg Г_4) \vee Б_5 = 1$

(4) $A_4 \vee Б_3 = 1$

(5) $(\neg A_3$ & $\neg Г_3) \vee В_5 = 1$

(6) $Г_5 \vee (A_2$ & $В_4) = 1$

Переменные с индексами 1 и 6 в условиях (2)-(8) не используются, из (1а) и (1б) получаем: $A_1 = Б_1 = В_1 = Г_1 = 1$; $A_6 = Б_6 = В_6 = Г_6 = 0$

Необходимо решить уравнение при условиях вида (7) и (8)

F = (2) & (3) & (4) & (5) & (6) = 1

(Было 24, осталось 16 неизвестных)

Решаем уравнение, используя (7) и (8):

$$F = (2)\ \&\ (3)\ \&\ (4)\ \&\ (5)\ \&\ (6) =$$

$$= \neg\text{В}_2\ \&\ \neg\text{Г}_2\ \&\ ((\neg\text{В}_3\ \&\ \neg\text{Г}_4) \vee \text{Б}_5)\ \&\ (\text{А}_4 \vee \text{Б}_3)$$

$$\&$$

$$\&\ ((\neg\text{А}_3\ \&\ \neg\text{Г}_3) \vee \text{В}_5)\ \&\ (\text{Г}_5 \vee (\text{А}_2\ \&\ \text{В}_4)) = \ldots\ldots\ldots = 1$$

Фрагмент: $(5)\ \&\ (6) =$

$$= ((\neg\text{А}_3\ \&\ \neg\text{Г}_3) \vee \text{В}_5)\ \&\ (\text{Г}_5 \vee (\text{А}_2\ \&\ \text{В}_4)) =$$

$$= (\text{А}_2\ \&\ \neg\text{А}_3\ \&\ \text{В}_4\ \&\ \neg\text{Г}_3) \vee (\neg\text{А}_3\ \&\ \neg\text{Г}_3\ \&\ \text{Г}_5) \vee$$

$$\vee (\text{А}_2\ \&\ \text{В}_4\ \&\ \text{В}_5) \vee (\text{В}_5\ \&\ \text{Г}_5)$$

$$=$$

$$= (\text{А}_2\ \&\ \neg\text{А}_3\ \&\ \text{В}_4\ \&\ \neg\text{Г}_3) \vee (\neg\text{А}_3\ \&\ \neg\text{Г}_3\ \&\ \text{Г}_5)$$

$$F = \ldots\ldots\ldots = \text{А}_2\ \&\ \text{Б}_3\ \&\ \text{В}_4\ \&\ \text{Г}_5 = 1$$

	День недели					
	1	2	3	4	5	6
Алла						
Бэлла						
Валя						
Галя						

Процедура зачёта за 1 семестр 2020/2021 учебного года:

	max балл	Расчёт итогового балла зачёта
Посещаемость практики (N_1)	32	16 ПЗ × 2 час. = 32 (всего учебных недель – 17, не учитывается последняя неделя декабря)
Итоговая контрольная (N_2)	28	Задачи 1a и 1b – по 3 балла каждая, задачи 2a и 2b – по 6 баллов каждая, задачи 3a и 3b – по 5 баллов каждая

Общий итоговый балл $\Sigma = N_1 + N_2$

Условие зачёта: $\Sigma > 30$

Контрольная работа: 18 - 23 декабря

Подведение итогов: 25 - 30 декабря

Вариант № 00 (контрольная 18 – 23 декабря 2020 г.)

1. Проверить эквивалентность логических формул:

a) $\mathscr{A} = ((x \oplus y) \downarrow x) \mid y$ $\qquad$ $\mathscr{B} = (x \downarrow y) \Rightarrow (x \mid y)$

b) $\mathscr{A} = x \vee (y \,\&\, z)$ $\qquad$ $\mathscr{B} = \neg (x \vee y) \Rightarrow (x \vee z)$

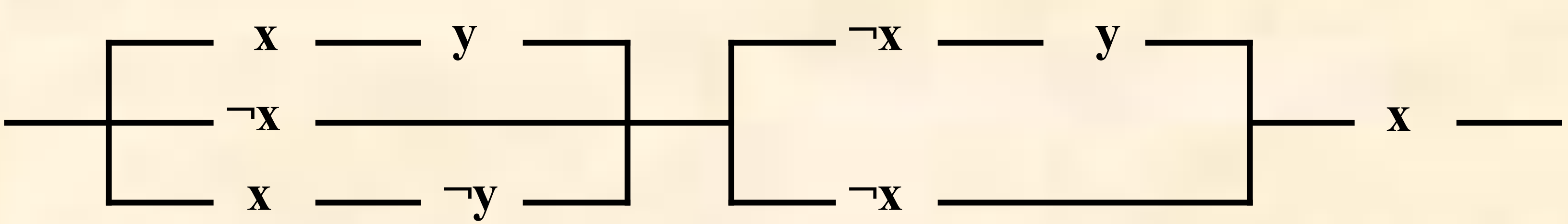
2. Упростить логические формулы:

a) $\mathscr{A} = ((x \equiv y) \mid x) \Rightarrow y$

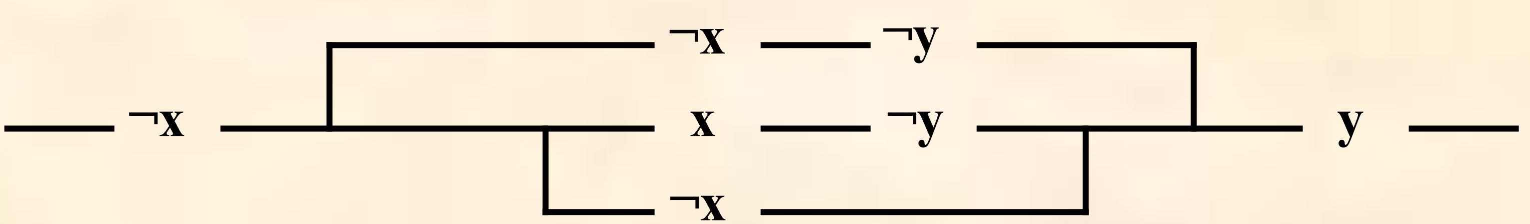
b) $\mathscr{B} = ((x \vee \neg y) \,\&\, (z \vee \neg x)) \vee ((y \vee z) \,\&\, (x \vee y \vee \neg z))$

3. Упростить схемы из двухпозиционных переключателей:

a)



b)



Ответы к варианту № 00

1 «a»	$\mathscr{A}$ эквивалентна $\mathscr{B}$, так как обе формулы представляют функцию ψ_{15} (константа 1)
1 «b»	$\mathscr{A}$ не эквивалентна $\mathscr{B}$, так как $\mathscr{A}$ представляет функцию η_{31}, а $\mathscr{B}$ - функцию η_{127}
2 «a»	y
2 «b»	$\neg x \vee y \vee z$
3 «a»	0
3 «b»	$\neg x \ \& \ y$

Решение

1а) Таблицы истинности функций, представленных формулами $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$:

		$\mathscr{A}$			$\mathscr{B}$		
x	y	$x \oplus y$	$(x \oplus y) \downarrow x$	$((x \oplus y) \downarrow x) \mid y$	$x \downarrow y$	$x \mid y$	$(x \downarrow y) \Rightarrow (x \mid y)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0	1

Можно видеть, что формулы $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ представляют одну и ту же функцию $\psi_{15}(x, y)$ – константу 1, то есть формулы эквивалентны.

1b) Таблицы истинности функций, представленных формулами $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$:

			$\mathscr{A}$		$\mathscr{B}$			
x	y	z	y&z	x∨(y&z)	x∨y	x∨z	¬(x ∨ y)	¬(x ∨ y) ⇒ (x ∨ z)
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	0	1

Можно видеть, что формула $\mathscr{A}$ представляет функцию $\eta_{31}(x, y, z)$, а формула $\mathscr{B}$ - функцию $\eta_{127}(x, y, z)$, то есть формулы не эквивалентны.

$$2a)\ ((x \equiv y)\ |\ x) \Rightarrow y =$$
$$= (((x \vee \neg y) \,\&\, (\neg x \vee y))\ |\ x) \Rightarrow y =$$
$$= (\neg((x \vee \neg y) \,\&\, (\neg x \vee y)) \vee \neg x) \Rightarrow y =$$
$$= \neg(\neg((x \vee \neg y) \,\&\, (\neg x \vee y)) \vee \neg x) \vee y =$$
$$= \neg(\neg(x \vee \neg y) \vee \neg (\neg x \vee y) \vee \neg x) \vee y =$$
$$= (\neg\neg(x \vee \neg y) \,\&\, \neg\neg (\neg x \vee y) \,\&\, \neg\neg x) \vee y =$$
$$= ((x \vee \neg y) \,\&\, (\neg x \vee y) \,\&\, x) \vee y =$$
$$= (((x\&\neg x) \vee (x\&y) \vee (\neg x\&\neg y) \vee (y\&\neg y)) \,\&\, x) \vee y =$$
$$= (x\&x\&\neg x) \vee (x\&x\&y) \vee (x\&\neg x\&\neg y) \vee (x\&y\&\neg y) \vee y =$$
$$= 0 \vee (x\&y) \vee 0 \vee 0 \vee y =$$
$$= (x\&y) \vee y =$$
$$= y$$

$$2b)\ ((x \lor \neg y) \,\&\, (z \lor \neg x)) \lor ((y \lor z) \,\&\, (x \lor y \lor \neg z)) =$$

$$= ((x \,\&\, z) \lor (x \,\&\, \neg x) \lor (\neg y \,\&\, z) \lor (\neg x \,\&\, \neg y)) \lor$$

$$\lor ((x \,\&\, y) \lor (y \,\&\, y) \lor (y \,\&\, \neg z) \lor (x \,\&\, z) \lor (y \,\&\, z) \lor (z \,\&\, \neg z)) =$$

$$= ((x\&z) \lor 0 \lor (\neg y\&z) \lor (\neg x\&\neg y)) \lor ((x\&y) \lor y \lor (y\&\neg z) \lor (x\&z) \lor (y\&z)$$
$$\lor 0) =$$

$$= (x\&z) \lor (\neg y\&z) \lor (\neg x\&\neg y) \lor (x\&y) \lor \underline{y \lor (y\&\neg z)} \lor (x\&z) \lor (y\&z) =$$

$$= (x\&z) \lor (\neg y\&z) \lor (\neg x\&\neg y) \lor \underline{(x\&y) \lor y} \lor (x\&z) \lor (y\&z) =$$

$$= (x\&z) \lor (\neg y\&z) \lor (\neg x\&\neg y) \lor \underline{y} \lor (x\&z) \lor \underline{(y\&z)} =$$

$$= (x\&z) \lor (\neg y\&z) \lor (\underline{\neg x\&\neg y \lor y}) \lor (x\&z) =$$

$$= (x\&z) \lor \underline{(\neg y\&z)} \lor \neg x \lor \underline{y} \lor (x\&z) =$$

$$= \underline{(x\&z) \lor z} \lor \neg x \lor y \lor (x\&z) =$$

$$= \underline{z} \lor \neg x \lor y \lor \underline{(x\&z)} =$$

$$= \neg x \lor y \lor z$$

$$3a)\ ((x\&y) \lor \neg x \lor (x\&\neg y)) \& ((\neg x\&y) \lor \neg x) \& x =$$

$$= (\neg x \lor y \lor (x\&\neg y)) \& \neg x \& x =$$

$$= (\neg x \lor y \lor (x\&\neg y)) \& 0 =$$

$$= 0$$

x $\neg x$

$$3b)\ \neg x \& ((\neg x\&\neg y) \lor (x\&\neg y) \lor \neg x) \& y =$$

$$= \neg x \& ((\neg x\&\neg y) \lor \neg x \lor \neg y) \& y =$$

$$= \neg x \& (\neg x \lor \neg y) \& y =$$

$$= (\neg x\&\neg x\&y) \lor (\neg x\&\neg y\&y) =$$

$$= (\neg x\&y) \lor ((\neg x\&y)\&\neg y) =$$

$$= \neg x\&y$$

$\neg x$ y