Системы линейных уравнений. Метод Крамера.

Системы линейных уравнений

Уравнение называется *линейным*, если оно содержит переменные только в первой степени и не содержит произведений переменных.

Система *m* линейных уравнений с *n* переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Числа

$a_{ij} (i = 1,2,\ldots,m; \, j = 1,2,\ldots,n)$

называются *коэффициентами при переменных*, а

$b_i (i = 1,2,\ldots,m)$

свободными членами.

Совокупность чисел

$(k_1; k_2; \ldots; k_n)$

называется *решением системы* линейных уравнений, если при подстановке их вместо переменных во все уравнения они обращаются в верные равенства.

В школьном курсе рассматриваются способ подстановки и способ сложения.

В курсе высшей математике решают методом Крамера ,методом Гаусса и с помощью обратной матрицы.

Рассмотрим решение систем линейных уравнений методом Крамера

Сведения из истории

Крамер является одним из создателей линейной алгебры. Одной из самых известных его работ является «Введение в анализ алгебраических кривых», опубликованный на французском языке в 1750 году. В ней Крамер строит систему линейных уравнений и решает её с помощью алгоритма, названного позже его именем – **метод Крамера**.

Габриэль Крамер родился 31 июля 1704 года в Женеве (Швейцария) в семье врача. Уже в детстве он опережал своих сверстников в интеллектуальном развитии и демонстрировал завидные способности в области математики.

В 18 лет он успешно защитил диссертацию. Через 2 года Крамер выставил свою кандидатуру на должность преподавателя в Женевском университете. Юноша так понравился магистрату, что специально для него и ещё одного одного кандидата на место преподавателя была учреждена отдельная кафедра математики, где Крамер и работал в последующие годы.

Учёный много путешествовал по Европе, перенимая опыт у знаменитых математиков своего времени – Иоганна Бернулли и Эйлера в Базеле, Галлея и де Муавра в Лондоне, Мопертюи и Клеро в Париже и других. Со многими из них он продолжал переписываться всю жизнь.
В 1729 году Крамер возобновляет преподавательскую работу в Женевском университете. В это время он участвует в конкурсе Парижской Академии и занимает второе место.
Талантливый учёный написал множество статей на самые разные темы: геометрия, история, математика, философия. В 1730 году он опубликовал труд по небесной механике.
В 1740-е гг. Иоганн Бернулли поручает Крамеру подготовить к печати сборник своих работ. В 1742 году Крамер публикует сборник в 4-х томах. В 1744 году он выпускает посмертный сборник работ Якоба Бернулли (брата Иоганна Бернулли), а также двухтомник переписки Лейбница с Иоганном Бернулли. Эти работы вызвали большой интерес со стороны учёных всего мира. Габриэль Крамер скончался 4 января 1752 года во Франции

Решение системы линейных уравнений методом Крамера

Теорема Крамера. *Если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно единственное решение, причём неизвестное равно отношению определителей. В знаменателе – определитель системы, а в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами. Эта теорема имеет место для системы линейных уравнений любого порядка.*

Дана система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Составим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Заменяя столбец с коэффициентами соответствующей переменной свободными членами:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & b_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots,$$

$$\Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}.$$

Формулы Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

При решении системы уравнений могут встретиться три случая:

1) система линейных уравнений имеет единственное решение (система совместна и определённа)

Условия:

$$\Delta \neq 0,$$

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}$$

2) система линейных уравнений имеет бесчисленное множество решений
(система совместна и неопределённа)

Условия:

$$\Delta \neq 0,$$

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{b_1}{b_2}.$$

т.е. коэффициенты при неизвестных и свободные члены пропорциональны

3) система линейных уравнений решений не имеет (система несовместна)

Условия:

$$\Delta \neq 0,$$

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{b_1}{b_2},$$

Система называется *несовместной*, если у неё нет ни одного решения, и *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. Совместная система уравнений, имеющая только одно решение, называется *определённой*, а более одного – *неопределённой*.

Решение системы трех линейных уравнений с тремя двумя неизвестными методом Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

Решение. Находим определители системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 6 + 12 + 1 - 16 + 9 = 14 \neq 0.$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 14,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = -14.$$

$$x_1 = \frac{14}{14} = 1,$$

$$x_2 = \frac{0}{14} = 0,$$

$$x_3 = \frac{-14}{14} = -1.$$

Ответ: (1; 0; -1) .

Решите системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 11, \\ 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 9 \end{cases}$$