Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ Лекция 18 ноября 2020 года

Теорема (теорема существования и единственности (ТСЕ) решения задачи Коши (локальная))

Будем далее рассматривать систему

$$\vec{y}\,'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}) \qquad (1)$$

Теорема (ТСЕ локальная). Пусть в уравнении (1) вектор-функция $\vec{f}(t, \vec{y})$ определена в области $\Omega \subset R^{n+1}$ и $\vec{f}(t, \vec{y}) \in \vec{C}(\Omega)$ и $\vec{f}(t, \vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L. Тогда для любых $(t_0, \vec{y}_0) \in \Omega$ и любого прямоугольника $P = \{(t, \vec{y}) \in \Omega : |t - t_0| \le a, \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \le b\}$, $(P \subset \Omega)$ существует единственное решение $\vec{y}(t)$ задачи Коши:

$$\begin{cases} \vec{y}\,'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}) & (1) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 & (2) \end{cases}$$

определенное на отрезке $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$, где $0 < \delta < \min\{a; \frac{b}{M}; \frac{1}{L}\}$, $M = \max\limits_{P} |\vec{f}(t, \vec{y})|$, и это решение может быть найдено методом последовательных приближений, то есть $\vec{y}(t) = \lim_{n\to\infty} \vec{y}_n(t)$, где

$$\vec{y}_n(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{y}_{n-1}(\tau))\,d\tau$$

и для $\vec{y}(t)$ справедлива оценка погрешности: $\|\vec{y} - \vec{y}_{n+1}\| \le \frac{q^n}{1-q}\|y_1 - y_0\|$, где

q – некоторое число $0 < q < 1$.

Док-во.: Из леммы следует, что решение задачи Коши ①–② эквивалентно решению интегрального уравнения ③

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))\,d\tau \qquad ③$$

Поэтому достаточно доказать существование и единственность решения уравнения ③. Обозначим через

$$B_b = \{\vec{y} \in \vec{C}[t_0 - \delta, t_0 + \delta] : \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \le b\}$$

Это полное метрическое пространство.

Обозначим через A оператор

$$A\vec{y} = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))\,d\tau \qquad ④$$

Будем рассматривать его в B_b

Для доказательства теоремы достаточно доказать существование и единственность неподвижной точки у оператора A в полном метрическом пространстве B_b.

а) Для начала проверим, что оператор A действует из B_b в B_b.

Пусть $\vec{y} \in B_b$, то есть $\|\vec{y} - \vec{y}_0\| \le b$.

Нужно доказать, что $\|A\vec{y} - \vec{y}_0\| \le b$.

Действительно, $\|A\vec{y} - \vec{y}_0\| =$

$$= \left\| \int_{t_0}^{t} \vec{f}(\tau, \vec{y}(\tau))\, d\tau \right\| \le M|t - t_0| \le M\delta \le b$$

То есть при условии $\delta \le \frac{b}{M}$ оператор A действует из пространства B_b в пространство B_b.

б) Далее покажем, что оператор A, определенный равенством (4) является оператором сжатия в пространстве B_b.

Действительно,

$$\|A\vec{y}_1 - A\vec{y}_2\| = \left\| \int_{t_0}^{t} [\vec{f}(\tau, \vec{y}_1(\tau)) - \vec{f}(\tau, \vec{y}_2(\tau))]\, d\tau \right\| \le$$

$$\leq (\text{условие Липшица}) \leq \left|\int_{t_0}^{t} \mathcal{L}\|\vec{y}_1(\tau)-\vec{y}_2(\tau)\|d\tau\right| \leq$$

$$\leq \mathcal{L}\|\vec{y}_1(\tau)-\vec{y}_2(\tau)\|\cdot\left|\int_{t_0}^{t} 1d\tau\right| = \mathcal{L}\|\vec{y}_1-\vec{y}_2\|\cdot|t-t_0| \leq$$

$$\leq \mathcal{L}\delta\|\vec{y}_1-\vec{y}_2\| = q\|\vec{y}_1-\vec{y}_2\|, \text{ где } q=\mathcal{L}\delta$$

Тогда при $0 \leq q < 1$, то есть при $0 \leq \delta < \frac{1}{\mathcal{L}}$ оператор A будет оператором сжатия в полном метрическом пространстве B_ℓ.

Таким образом, при $\delta < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{\mathcal{L}}\}$ выполнены все условия теоремы о сжимающем операторе и поэтому из нее следует теорема существования и единственности решения задачи Коши (1)-(2) #.

Замечание Вместо условия Липшица можно было потребовать выполнения условия: В области Ω (Ω - область определения функции $\vec{f}(t,\vec{y})$) существуют все частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i,j=\overline{1,n})$ и существует постоянная $M>0$ такая что

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \le M \quad \text{для любых } i,j=\overline{1,n} \qquad (*)$$

Это условие более сильное, чем условие Липшица, так как из условия Липшица не следует существование производной.

<u>Задача</u> Привести пример функции, удовлетворяющей условию Липшица, но не имеющей производной.

<u>Утверждение</u> Если для вектор-функции $\vec{f}(t,\vec{y})$ выполняется условие (*), то функция $\vec{f}(t,\vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной Липшица $L=n^2 M$. (область Ω предполагается выпуклой по $\vec{y}$).

<u>Док-во</u>

Так как Ω — выпуклая по $\vec{y}$ область, то

$$|\vec{f}(t,\vec{y}_1)-\vec{f}(t,\vec{y}_2)|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(f_i(t,\vec{y}_1)-f_i(t,\vec{y}_2))^2}\le$$

(в силу неравенства $\sqrt{a^2+b^2} \le |a|+|b|$) $\le$

$$\le \sum_{i=1}^{n} |f_i(t,\vec{y}_1) - f_i(t,y_2)| = \text{(в силу теоремы Лагранжа)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|\frac{\partial f_i}{\partial y_j}\right| \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| \le M\|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| \left(\sum_{i,j=1}^{n} 1\right) =$$

$= n^2 M \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|$ Следовательно,

$$|\vec{f}(t,\vec{y}_1) - \vec{f}(t,\vec{y}_2)| \le n^2 M \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|.$$

Это означает, что $\vec{f}(t,\vec{y})$ удовлетворяет в области Ω условию Липшица с постоянной Липшица $\mathcal{L} = n^2 M$ #

<u>Замечание</u> Если в теореме существования и единственности решения задачи Коши ①-② (локальной) не требовать выполнения условия Липшица от функции $\vec{f}(t,\vec{y})$, а требовать только непрерывность (т.е. $\vec{f}(t,\vec{y}) \in \vec{C}(\Omega)$), то решение задачи Коши ①-② существовать будет, но вообще говоря, оно не будет единственным.

<u>Замечание</u> Минимальным условием на $\vec{f}(t,\vec{y})$ (вместо условия Липшица),

при котором сохраняется единственность решения задачи Коши ①-②

является условие единственности Осгуда: если $|f(t,y_1)-f(t,y_2)| \le \varphi(|y_1-y_2|)$ для любых (t,y_1) и (t,y_2) и функция $\varphi(u)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\delta} \frac{du}{\varphi(u)} = +\infty, \quad \delta>0$$

Замечание. Если $f(t,y)$ удовлетворяет условию Липшица, то она удовлетворяет условию Осгуда. Обратное неверно.

§ Продолжимые и непродолжаемые решения. Теорема существования и единственности (ТСЕ) решения задачи Коши глобальная.

Пусть задана задача Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}(t,\vec{y}) & ① \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 & ② \end{cases}$$

Опр.: Решение $\vec{y}(t)$ задачи Коши ①-②, определённое на $\langle \alpha, \beta \rangle$ называется продолжаемым, если существует $\vec{y}^*(t)$ задачи Коши ①-②, определенное на $\langle\alpha^*, \beta^*\rangle \supset \langle\alpha, \beta\rangle$ и такое, что $\vec{y}^*(t) \equiv \vec{y}(t)$ на $\langle\alpha, \beta\rangle$. Тогда $\vec{y}^*(t)$ называется <u>продолжением</u> решения $\vec{y}(t)$ с промежутка $\langle\alpha, \beta\rangle$ на $\langle\alpha^*, \beta^*\rangle$, а $\vec{y}(t)$ называется <u>сужением</u> решения $\vec{y}^*(t)$ с промежутка $\langle\alpha^*, \beta^*\rangle$ на промежуток $\langle\alpha, \beta\rangle$.

<u>Опр.</u> Решение $\vec{y}(t)$ задачи Коши ①-② на промежутке $\langle\alpha, \beta\rangle$ называется <u>непродолжаемым</u>, если не существует решения $\vec{y}^*(t)$, определённого на $\langle\alpha^*, \beta^*\rangle \supset \langle\alpha, \beta\rangle$ и такого, что $\vec{y}^*(t) \equiv \vec{y}(t)$ на $\langle\alpha, \beta\rangle$ причём $\langle\alpha^*, \beta^*\rangle \neq \langle\alpha, \beta\rangle$

<u>Теорема</u> (Теорема существования и единственности решения задачи Коши ①-② <u>глобальная</u>).

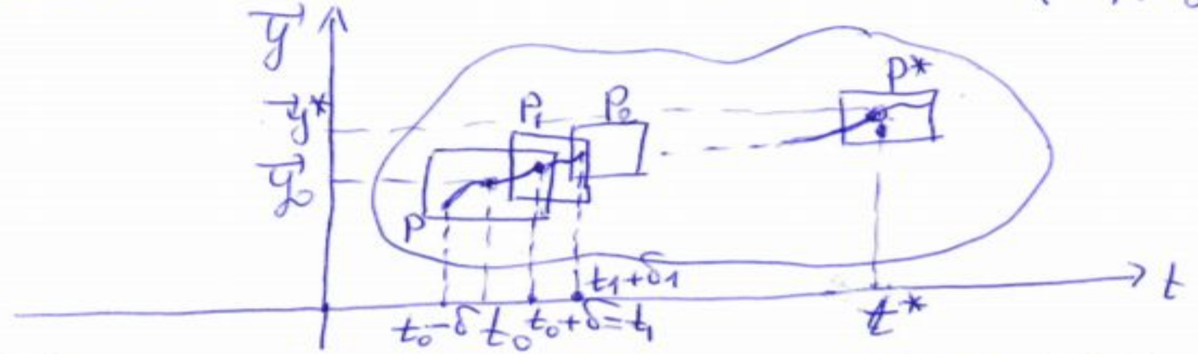
Пусть в задаче Коши ①-② функция $\vec{f}(t, \vec{y}) \in \vec{C}(\Omega)$, где $\Omega \subset R^{n+1} = R^1_t \otimes R^n_{\vec{y}}$ и $\vec{f}(t, \vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица по $\vec{y}$ в Ω с постоянной Липшица L.

Тогда для любых $(t_0, \vec{y}_0) \in \Omega$ существует единственное непродолжаемое решение $\vec{y}(t)$ задачи Коши ①–②, которое как угодно близко подходит к границе области Ω (ограниченной или неограниченной).

<u>Док-во:</u> Для задачи Коши ①–② рассмотрим прямоугольник P:

$$P = \{(t, \vec{y}) \in \Omega : |t - t_0| \le a, \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \le b\} \subset \Omega.$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши ①–② локальной существует единственное решение задачи Коши ①–②, определённое на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $\delta > 0$, $\delta < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$



Покажем, что это решение можно продолжить как вправо, так и влево.

Будем доказывать продолжаемость

этого решения вправо (продолжаемость решения влево доказывается аналогично).

Обозначим через $t_1 = t_0 + \delta$, $\vec{y}(t_1) = \vec{y}_1$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \vec{y}\,' = \vec{f}(t, \vec{y}) & (1) \\ \vec{y}(t_1) = \vec{y}_1 & (2_1) \end{cases}$$

Рассмотрим прямоугольник P_1:

$P_1 = \{(t, \vec{y}) \in \Omega : |t - t_1| \le a_1, \|\vec{y} - \vec{y}_1\| \le b_1\} \subset \Omega$

Тогда по теореме существования и единственности решения задачи Коши (1) – (2_1) существует единственное решение $\vec{y}_1(t)$ задачи Коши (1) – (2_1), определённое на $[t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1]$, где $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \min(a_1, \frac{b_1}{M_1}; \frac{1}{L})$

На промежутке $[t_0, t_1]$, $\vec{y}_1(t) \equiv \vec{y}(t)$ в силу теоремы существования и единственности локальной. Поэтому $\vec{y}_1(t)$ является продолжением решения $\vec{y}(t)$ с $[t_0, t_0+\delta]$ на отрезок $[t_0, t_1+\delta_1] =$
$= [t_0, t_0 + \delta + \delta_1]$.

Продолжим этот процесс. Покажем,

что этот процесс продолжения решения вправо не может остановиться внутри области Ω, то есть мы должны доказать, что не существует точки $(t^*, \vec{y}^*) \in \Omega$ такой, что вправо за t^* решение не продолжается.

Будем доказывать это „методом от противного". Пусть существует точка $(t^*, \vec{y}^*) \in \Omega$ такая, что за t^* вправо решение $\vec{y}(t)$ не продолжаемо.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}) & (1) \\ \vec{y}(t^*) = \vec{y}^* & (2^*) \end{cases}$$

Рассмотрим прямоугольник P^*

$$P^* = \{(t, \vec{y}) \in \Omega : |t - t^*| \le a^*, \|\vec{y} - \vec{y}^*\| \le b^*\} \subset \Omega$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши (1) – (2*) существует такое $\delta^* > 0$, $\delta^* < \min\{a^*, \frac{b^*}{M^*}, \frac{1}{L}\}$ что на $[t^* - \delta^*, t^* + \delta^*]$ существует единственное решение $\vec{y}^*(t)$, причём на $[t^* - \delta^*, t^*]$ выполняется условие

$$\vec{y}^*(t) \equiv \vec{y}(t)$$

в силу теоремы существования и единственности решения задачи Коши (1)-(2*).
Следовательно, $\vec{y}^*(t)$ есть продолжение решения $\vec{y}'(t)$ вправо с $[t_0, t^*]$ на $[t_0, t^*+\delta^*]$, где $\delta^*>0$. Следовательно, $\vec{y}'(t)$ продолжаемо вправо, что противоречит предположению. Полученное противоречие и доказывает утверждение, что не существует точки $(t^*, \vec{y}'^*) \in \Omega$ такой что вправо за t^* решение $\vec{y}'(t)$ задачи Коши (1)-(2) не продолжается. #

<u>Следствие</u> Из теоремы существования и единственности решения задачи Коши (1)-(2) глобального следует, что при подходе к границе области Ω решение задачи Коши (1)-(2) может вести себя 1)

имеет предел

2)

не имеет предела.

3)

имеет асимптоту