

Лекция. Дифференциальные Уравнения

Лектор : Сандаков Евгений Борисович - доцент кафедры №30 Высшей
математики «НИЯУ МИФИ»

ОДУ Лекция 18 ноября 2020 года.

Теорема (Теорема существования и единственности (ТСЕ) решения задачи Коши (локальная))

Будем даже рассматривать систему

$$\vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}) \quad (1)$$

Теорема (ТСЕ локальная). Пусть в уравнении (1) вектор-функция $\vec{f}(t, \vec{y})$ определена в области $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и

$\vec{f}(t, \vec{y}) \in C^1(\Omega)$ и $\vec{f}(t, \vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной L .

Тогда для любых $(t_0, \vec{y}_0) \in \Omega$ и любого прямоугольника $P = \{(t, \vec{y}) \in \Omega : |t - t_0| \leq a, \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq b\}$, $(P \subset \Omega)$ существует

единственное решение $\vec{y}(t)$ задачи Коши:

$$\begin{cases} \vec{y}'(t) = \vec{f}(t, \vec{y}) & (1) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 & (2) \end{cases}$$

определенное на отрезке $[t_0 - \delta; t_0 + \delta]$, где

$0 < \delta < \min\{a; \frac{b}{M}; \frac{1}{L}\}$, $M = \max_P |\vec{f}(t, \vec{y})|$,

и это решение можно было бы найти методом последовательных приближений,

то есть $\vec{y}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{y}_n(t)$, где

$$\vec{y}_n(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t \vec{F}(\tau, \vec{y}_{n-1}(\tau)) d\tau$$

и для $\vec{y}(t)$ справедлива оценка погрешности: $\|\vec{y} - \vec{y}_{n+1}\| \leq \frac{q^n}{1-q} \|\vec{y}_1 - \vec{y}_0\|$, где

q - некоторое число $0 < q < 1$.

Док-во. Из леммы следует, что решение задачи Коши ①-② эквивалентно решению интегрального уравнения ③

$$\vec{y}(t) = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t \vec{F}(\tau, \vec{y}(\tau)) d\tau \quad ③$$

Поэтому достаточно доказать существование и единственность решения уравнения ③. Обозначим через

$$B_\delta = \{ \vec{y} \in C[t_0 - \delta, t_0 + \delta] : \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq \delta \}$$

это полное метрическое пространство.

Обозначим через A оператор

$$A\vec{y} = \vec{y}_0 + \int_{t_0}^t \vec{F}(\tau, \vec{y}(\tau)) d\tau \quad ④$$

Будем рассматривать его в B_δ

- 3 -

Для доказательства теоремы достаточно доказать существование и единственность неподвижной точки y оператора A в полном метрическом пространстве B_b .

а) Для начала проверим, что оператор A действует из B_b в B_b .

Пусть $y \in B_b$, то есть $\|y - y_0\| \leq b$.
Нужно доказать, что $\|Ay - y_0\| \leq b$.

$$\text{Действительно, } \|Ay - y_0\| = \\ = \left\| \int_{t_0}^t f(\tau, y(\tau)) d\tau \right\| \leq M|t - t_0| \leq M\delta \leq b$$

То есть при условии $\delta \leq \frac{b}{M}$ оператор A действует из пространства B_b в пространство B_b .

б) Далее покажем, что оператор A , определенный равенством (4) является оператором сжатия в пространстве B_b .

Действительно,

$$\|Ay_1 - Ay_2\| = \left\| \int_{t_0}^t [f(\tau, y_1(\tau)) - f(\tau, y_2(\tau))] d\tau \right\| \leq$$

$$\begin{aligned}
 & \leq (\text{условие Липшица}) \leq \int_{t_0}^t L \|\vec{y}_1(\tau) - \vec{y}_2(\tau)\| d\tau \leq \\
 & \leq L \|\vec{y}_1(\tau) - \vec{y}_2(\tau)\| \cdot \int_{t_0}^t 1 d\tau = L \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| \cdot |t - t_0| \leq \\
 & \leq L \delta \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| = q \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|, \text{ где } q = L \delta
 \end{aligned}$$

Тогда при $0 \leq q < 1$, но если при $0 \leq \delta < \frac{1}{L}$ оператор A будет оператором сжатия в полной метрической пространстве B .

Итак образы, при $\delta < \min\{a, \frac{1}{M}, \frac{1}{L}\}$ выполнят все условия теоремы о сжимающем операторе и поэтому уже имеет место теорема существования и единственности решения задачи Коши ①-② #.

Замечание Вместо условия Липшица можно было потребовать выполнения условия: В области Ω (Ω - область определения функции $f(t, \vec{y})$) существуют все частные производные $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ ($i, j = \overline{1, n}$) и существуют

-5-

поставляется $M > 0$ такое что

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \leq M \text{ для любых } i, j = \overline{1, n} \quad (*)$$

Это условие более сильное, чем условие Липшица, так как из условия Липшица не следует существование производной.

Задача Привести пример функции, удовлетворяющей условию Липшица, но не имеющей производной.

Утверждение. Если для вектор-функции $F'(t, \vec{y})$ выполняется условие $(*)$, то функция $F'(t, \vec{y})$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной Липшица $L = n^2 M$. (область Ω предполагается втянутой по \vec{y}).

Док-во



Так как Ω - втянутая по \vec{y} область,

$$|F'(t_1, \vec{y}_1) - F'(t_1, \vec{y}_2)| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (f_i'(t_1, \vec{y}_1) - f_i'(t_1, \vec{y}_2))^2} \leq$$

-6-

$$\begin{aligned}
 & \text{(в силу неравенства } \sqrt{a^2+b^2} \leq |a|+|b|) \leq \\
 & \leq \sum_{i=1}^n |f_i(t, \vec{y}_1) - f_i(t, \vec{y}_2)| = (\text{в силу Теоремы Липшица}) = \\
 & = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right| \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| \leq M \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| \left(\sum_{i,j=1}^n 1 \right) = \\
 & = n^2 M \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\| \text{ Следовательно,}
 \end{aligned}$$

$$|F'(t, \vec{y}_1) - F'(t, \vec{y}_2)| \leq n^2 M \|\vec{y}_1 - \vec{y}_2\|.$$

Это означает, что $F'(t, \vec{y})$ удовлетворяет в области Ω условию Липшица с постоянной Липшица $L = n^2 M$ #

Замечание Если в Теореме существование и единственности решения задачи Коши ①-② (локальной) не требуются дополнительные условия Липшица от функции $F'(t, \vec{y})$, а требуются только непрерывность (т.е. $F'(t, \vec{y}) \in \vec{C}(\Omega)$),

то решение задачи Коши ①-② существовать будет, но вообще говоря, оно не будет единственным.

Замечание Минимальным условием на $F'(t, \vec{y})$ (вместо условия Липшица),

-7-

при которой сохраняется единственность решения задачи Коши (1)-(2) является условие единственности

Осцуда: если $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leq \varphi(|y_1 - y_2|)$

для любых (t, y_1) и (t, y_2) и функции $\varphi(u)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\delta} \frac{du}{\varphi(u)} = +\infty, \quad \delta > 0$$

Замечание Если $f(t, y)$ удовлетворяет условию Липшица, то она удовлетворяет условию Осцуда. Обратное неверно.

Продолжаемые и непродолжаемые решения. Теорема существования и единственности (ТСЕ) решения задачи Коши локальна.

Пусть задана задача Коши

$$\begin{cases} \vec{y}' = \vec{F}(t, \vec{y}) & (1) \\ \vec{y}(t_0) = \vec{y}_0 & (2) \end{cases}$$

Опр. Решение $\vec{y}(t)$ задачи Коши (1)-(2), определенное на $\langle \alpha, \beta \rangle$ называется

-8-

продолжаемым, если существует $\bar{y}^*(t)$ задана Коши ①-②, определенное на $\langle \alpha^*, \beta^* \rangle \supset \langle \alpha, \beta \rangle$ и такое, что $\bar{y}^*(t) \equiv \bar{y}(t)$ на $\langle \alpha, \beta \rangle$. Тогда $\bar{y}^*(t)$ называется продолжением решения $\bar{y}(t)$ с промежутка $\langle \alpha, \beta \rangle$ на $\langle \alpha^*, \beta^* \rangle$, а $\bar{y}(t)$ называется сужением решения $\bar{y}^*(t)$ с промежутка $\langle \alpha^*, \beta^* \rangle$ на промежуток $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Опр. Решение $\bar{y}(t)$ задана Коши ①-② определенное на промежутке $\langle \alpha, \beta \rangle$ называется непродолжаемым, если не существует решения $\bar{y}^*(t)$, определенного на $\langle \alpha^*, \beta^* \rangle \supset \langle \alpha, \beta \rangle$ и такого, что $\bar{y}^*(t) \equiv \bar{y}(t)$ на $\langle \alpha, \beta \rangle$ при $\langle \alpha^*, \beta^* \rangle \neq \langle \alpha, \beta \rangle$.

Теорема (теорема существования и единственности решения задана Коши ①-② глобальная).

Пусть в задана Коши ①-② функция $F(t, \bar{y}) \in C^1(\Omega)$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}_t^1 \otimes \mathbb{R}_y^n$ и $F(t, \bar{y})$ удовлетворяет условию Липшица по \bar{y} в Ω с постоянной Липшица L .

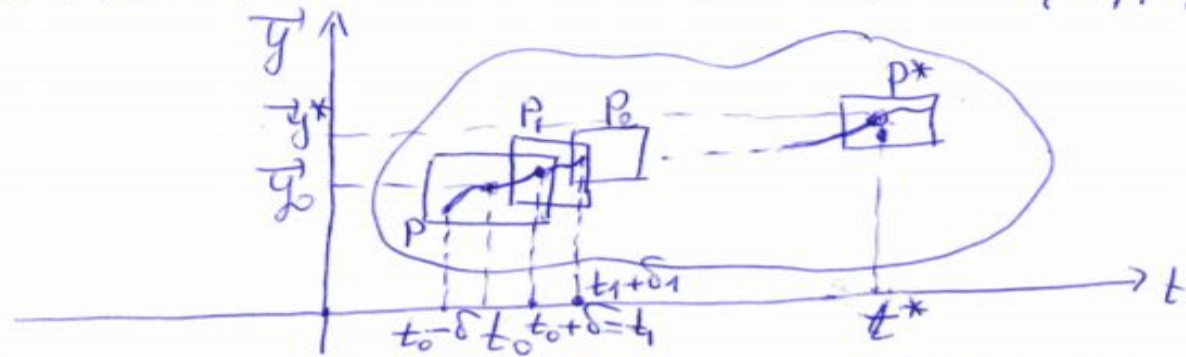
-9-

Тогда для любых $(t_0, \vec{y}_0) \in \Omega$ существует единственное непродолжаемое решение $\vec{y}(t)$ задачи Коши (1)–(2), которое как угодно близко подходит к границе области Ω (ограниченной или неограниченной).

Док-во Для задачи Коши (1)–(2) рассмотрим прямоугольник P :

$$P = \{(t, \vec{y}) \in \Omega : |t - t_0| \leq a, \|\vec{y} - \vec{y}_0\| \leq b\} \subset \Omega.$$

По Теореме существования и единственности решения задачи Коши (1)–(2) локально существует единственное решение задачи Коши (1)–(2), определённое на $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $\delta > 0$, $\delta \in \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$



Стоит отметить, что это решение можно продолжать как вправо, так и влево. Будем доказывать продолжимость

-10-

Этого решения вправо (продолжаемость
решения влево доказывается аналогично).

Обозначим через $t_1 = t_0 + \delta$, $\vec{y}(t_1) = \vec{y}_1$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \vec{y}' = F(t, \vec{y}) & (1) \\ \vec{y}(t_1) = \vec{y}_1 & (2_1) \end{cases}$$

Рассмотрим прямоугольник P_1 :

$$P_1 = \{(t, \vec{y}) \in \Omega : |t - t_1| \leq a_1, \|\vec{y} - \vec{y}_1\| \leq b_1\} \subset \Omega$$

Тогда по Теореме существования и единственности решения задачи Коши

(1) - (2₁) существует единственное решение $\vec{y}_1(t)$ задачи Коши (1) - (2₁),

определенное на $[t_1 - \delta_1, t_1 + \delta_1]$, где $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \min(a_1, \frac{b_1}{M_1}, \frac{1}{L})$

На промежутке $[t_0, t_1]$, $\vec{y}_1(t) \equiv \vec{y}(t)$ в силу Теоремы существования и единственности локальной. Поэтому $\vec{y}_1(t)$ является продолжением решения $\vec{y}(t)$ с $[t_0, t_0 + \delta]$ на отрезок $[t_0, t_1 + \delta_1] = [t_0, t_0 + \delta + \delta_1]$.

Продолжим этот процесс. Покажем,

так что этот процесс продолжения решения
 вправо не может остановиться внут-
 ри области Ω , но есть мы хотим
 доказать, что не существует тог-
 ки $(t^*, y^*) \in \Omega$ такой, что вправо за t^*
 решение не продвигается.

Будем доказывать это методом от-
 противного. Пусть существует точка
 $(t^*, y^*) \in \Omega$ такая, что за t^* вправо
 решение $y'(t)$ не продвигается.

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y) & \textcircled{1} \\ y(t^*) = y^* & \textcircled{2^*} \end{cases}$$

Рассмотрим окрестность P^*

$$P^* = \{ (t, y) \in \Omega : |t - t^*| \leq a^*, \|y - y^*\| \leq b^* \} \subset \Omega$$

По теореме существования и единствен-
 ности решения задачи Коши $\textcircled{1} - \textcircled{2^*}$

существует такое $\delta^* > 0$, $\delta^* < \min\{a^*, \frac{b^*}{M^*}, \frac{1}{L}\}$

что на $[t^* - \delta^*, t^* + \delta^*]$ существует един-
 ственное решение $y^*(t)$, причем на

$[t^* - \delta^*, t^*]$ выполняется условие


$$y^*(t) \equiv y'(t)$$

в силу Теоремы существования и единственности решения задачи Коши ①-②*.

Следовательно, $y^*(t)$ есть продолжение решения $y(t)$ вправо с $[t_0, t^*]$ на

$[t_0, t^* + \delta^*]$, где $\delta^* > 0$. Следовательно, $y(t)$ продолжимо вправо, что противоречит предположению. Противоположное утверждение и доказывает утверждение, что не существует точки $(t^*, y^*) \in \Omega$

Такой что вправо за t^* решение $y(t)$ задачи Коши ①-② не продолжается. #

Следствие Из Теоремы существования и единственности решения задачи Коши ①-② вытекает, что при подходе к границе области Ω решение задачи Коши ①-② может вести себя 1)  имеет предел

2)  не имеет предела.

3)  имеет асимптоту