Однородные тригонометрические уравнения

Упражнение

Решите уравнения:

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1 \qquad x = -\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

однородные тригонометрические уравнения первой степени

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

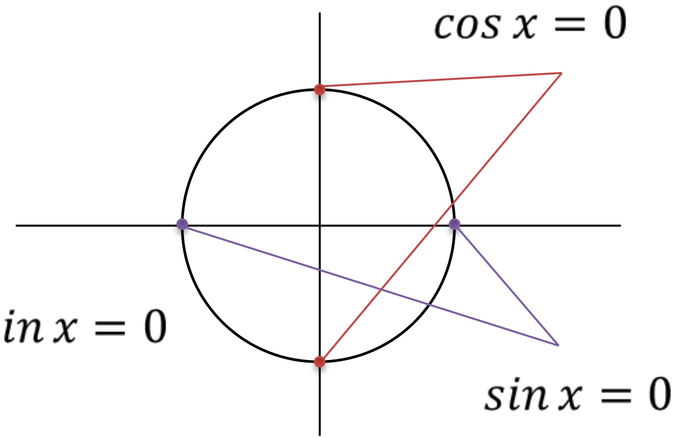
однородные тригонометрические уравнения второй степени

$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$

$$b = 0 \Rightarrow a \cdot \sin x = 0$$

$$a = 0 \Rightarrow b \cdot \cos x = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow a \cdot \sin x + b \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow a \cdot \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$$



$$a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \cdot tg\, x + b = 0$$

$$x = arctg\left(\frac{-b}{a}\right) + \pi k, k \in Z$$

Пример:

- Решить уравнение $sin\, x + \sqrt{3}\, cos\, x = 0.$

Решение:

$cos\, x = 0 \Rightarrow sin\, x = 0$

$$\frac{sin\, x}{cos\, x} + \sqrt{3}\frac{cos\, x}{cos\, x} = \frac{0}{cos\, x}$$

$$tg\, x + \sqrt{3} = 0$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = sin\,x$$

$$a \cdot sin\,mx + b \cdot cos\,mx = 0 \qquad cos\,mx$$

$$cos(-x) = cos\,x$$

Решить уравнение $cos(2\pi - 2x) = cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$cos(2\pi - 2x) = cos\,2x$$

$$cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = sin\,2x$$

$$cos\,2x - sin\,2x = 0$$

$$cos\,2x = 0 \Rightarrow sin\,2x = 0$$

$$\frac{cos\,2x}{cos\,2x} = \frac{sin\,2x}{cos\,2x} \Leftrightarrow tg\,2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \ \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

$$a \cdot sin^2 x + b \cdot cos\, x \cdot sinx + c \cdot cos^2 x = 0$$

$$a \neq 0$$

$$cos^2 x = 0 \Rightarrow sin^2 x = 0$$

$$a \frac{sin^2 x}{cos^2 x} + b \frac{cos\, xsinx}{cos^2 x} + c \frac{cos^2 x}{cos^2 x} = \frac{0}{cos^2 x}$$

$$a \cdot \; tg^2 x + b \; \cdot tg\, x + c = 0$$

Пример:

- Решить уравнение $3sin^2x + sin\,x \cdot cos\,x - 2cos^2x = 0.$

Решение:

$$cos^2x = 0 \Rightarrow 3sin^2x = 0 \Rightarrow sin\,x = 0$$

$$3\frac{sin^2x}{cos^2x} + \frac{cos\,xsinx}{cos^2x} - 2\frac{cos^2x}{cos^2x} = \frac{0}{cos^2x}$$

$$3tg^2x + tg\,x - 2 = 0;\ tg\,x = y;\ 3y^2 + y - 2 = 0 \iff y_1 = -1, y_2 = \frac{2}{3}$$

$$tg\,x = -1 \qquad\qquad tg\,x = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z \qquad\qquad x = arctg\frac{2}{3} + \pi k, k \in Z$$

$a = 0$

$b \cdot sin\, x \cdot cos\, x + \mathrm{c} \cdot cos^2 x = 0$

$cos\, x \cdot (b \cdot sin\, x + c \cdot cos\, x\ ) = 0$

$cos\, x = 0$ или $sin\, x + c \cdot cos\, x = 0$

Пример:

- Решить уравнение $cos\,x \cdot sin\,x - cos^2 x = 0.$

Решение:

$cos\,x(sin\,x - cos\,x) = 0$

$cos\,x = 0$ или $sin\,x - cos\,x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$\frac{sin\,x}{cos\,x} - \frac{cos\,x}{cos\,x} = \frac{0}{cos\,x}$

$tg\,x = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$

Пример:

- Решить уравнение $\sqrt{3}sin^2x + sin\,x \cdot cos\,x = 0.$

Решение:

$sin\,x(\sqrt{3}\,sin\,x + cos\,x) = 0$

$sin\,x = 0$ или $\sqrt{3}\,sin\,x + cos\,x = 0$

$x = \pi k, k \in Z$

$$\sqrt{3}\,\frac{sin\,x}{sin\,x} + \frac{cos\,x}{sin\,x} = \frac{0}{sin\,x}$$

$$ctg\,x = -\sqrt{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $x = \pi k, x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

Алгоритм решения однородного тригонометрического уравнения второй степени:

1. Посмотреть, есть ли в уравнении слагаемое $a \cdot sin^2 x$.

2. Если слагаемое $a \cdot sin^2 x$ в уравнении присутствует, (то есть $a \neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $cos^2 x$ и последующим решением квадратного уравнения относительно $tg\, x$.

3. Если слагаемое $a \cdot sin^2 x$ в уравнении не присутствует, (то есть $a = 0$), то уравнение решается методом разложения на множители (за скобки выносят $cos\, x$).

Пример:

- Решить уравнение $3sin^2 3x + 10cos\,3x \cdot sin\,3x + 3cos^2 3x = 0.$

Решение:

$$3\frac{sin^2 3x}{cos^2 3x} + 10\frac{cos\,3x \cdot sin\,3x}{cos^2 3x} + 3 = 0$$

$$3tg^2 3x + 10tg\,3x + 3 = 0$$

$$tg\,3x = y;\ \ 3y^2 + 10y + 3 = 0 \Longrightarrow y_1 = -3, y_2 = -\frac{1}{3}$$

$$tg\,3x = -3 \qquad\qquad tg\,3x = -\frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{arctg\,3}{3} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z \qquad\qquad x = -\frac{arctg\frac{1}{3}}{3} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

Ответ: $x = -\frac{arctg\,3}{3} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z,\ x = -\frac{arctg\frac{1}{3}}{3} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$

Пример:

Решить уравнение $2cos^2x - sin\,x\,cos\,x + 5sin^2x = 3.$

Решение:

$$2cos^2x - sin\,x\,cos\,x + 5sin^2x = 3(sin^2x + cos^2x)$$

$$2sin^2x\ - sin\,x\,cos\,x - cos^2x = 0$$

$$2tg^2x - tg\,x - 1 = 0$$

$$2y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = 1$$

$$tg\,x = -\frac{1}{2} \qquad\qquad tg\,x = 1$$

$$x = -arctg\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in Z \qquad\qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $x = -arctg\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$