

Однородные тригонометрические уравнения

Упражнение

Решите уравнения:

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad x = (-1)^k \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = -1 \quad x = -\frac{5\pi}{12} - \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$



однородные тригонометрические уравнения первой степени

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$



однородные тригонометрические уравнения второй степени

$$a \cdot \sin x + b \cdot \cos x = 0$$

$$b = 0 \Rightarrow a \cdot \sin x = 0$$

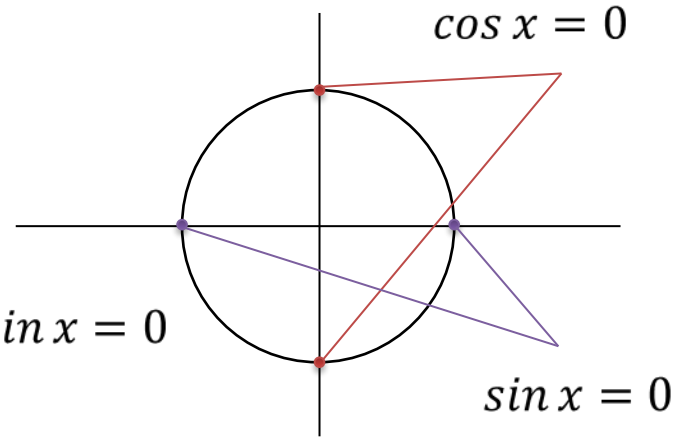
$$a = 0 \Rightarrow b \cdot \cos x = 0$$

$$\cos x = 0 \Rightarrow a \cdot \sin x + b \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow a \cdot \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$$

$$a \frac{\sin x}{\cos x} + b \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0$$

$$x = \operatorname{arctg} \left(\frac{-b}{a} \right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$



Пример:

● Решить уравнение $\sin x + \sqrt{3} \cos x = 0$.

Решение:

$$\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \sqrt{3} \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in Z$.

$$a \cdot \sin mx + b \cdot \cos mx = 0 \quad \cos mx$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

Решить уравнение $\cos(2\pi - 2x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\cos(2\pi - 2x) = \cos 2x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \sin 2x$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$$

$$\frac{\cos 2x}{\cos 2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z.$

$$a \cdot \sin^2 x + b \cdot \cos x \cdot \sin x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

$$a \neq 0$$

$$\cos^2 x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 0$$

$$a \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + b \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x} + c \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0$$

Пример:

Решить уравнение $3\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$.

Решение:

$$\cos^2 x = 0 \Rightarrow 3\sin^2 x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$$

$$3 \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos x \sin x}{\cos^2 x} - 2 \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{0}{\cos^2 x}$$

$$3\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 2 = 0; \operatorname{tg} x = y; 3y^2 + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y_1 = -1, y_2 = \frac{2}{3}$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2}{3}$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k, k \in Z$$

- 3π 2 π

$$a = 0$$

$$b \cdot \sin x \cdot \cos x + c \cdot \cos^2 x = 0$$

$$\cos x \cdot (b \cdot \sin x + c \cdot \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x + c \cdot \cos x = 0$$

Пример:

Решить уравнение $\cos x \cdot \sin x - \cos^2 x = 0$.

Решение:

$$\cos x(\sin x - \cos x) = 0$$

$$\cos x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x - \cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x}$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Пример:

Решить уравнение $\sqrt{3}\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x = 0$.

Решение:

$$\sin x(\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{3}\sin x + \cos x = 0$$

$$x = \pi k, k \in Z$$

$$\sqrt{3}\frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{0}{\sin x}$$

$$\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $x = \pi k, x = \frac{5\pi}{6} + \pi k, k \in Z$.

Алгоритм решения однородного тригонометрического уравнения второй степени:

1. Посмотреть, есть ли в уравнении слагаемое $a \cdot \sin^2 x$.
2. Если слагаемое $a \cdot \sin^2 x$ в уравнении присутствует, (то есть $a \neq 0$), то уравнение решается делением обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим решением квадратного уравнения относительно $\operatorname{tg} x$.
3. Если слагаемое $a \cdot \sin^2 x$ в уравнении не присутствует, (то есть $a = 0$), то уравнение решается методом разложения на множители (за скобки выносят $\cos x$).

Пример:

Решить уравнение $3\sin^2 3x + 10\cos 3x \cdot \sin 3x + 3\cos^2 3x = 0$.

Решение:

$$3 \frac{\sin^2 3x}{\cos^2 3x} + 10 \frac{\cos 3x \cdot \sin 3x}{\cos^2 3x} + 3 = 0$$

$$3\operatorname{tg}^2 3x + 10\operatorname{tg} 3x + 3 = 0$$

$$\operatorname{tg} 3x = y; \quad 3y^2 + 10y + 3 = 0 \Rightarrow y_1 = -3, y_2 = -\frac{1}{3}$$

$$\operatorname{tg} 3x = -3$$

$$\operatorname{tg} 3x = -\frac{1}{3}$$

$$x = -\frac{\operatorname{arctg} 3}{3} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

$$x = -\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{3}}{3} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\operatorname{arctg} 3}{3} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z, \quad x = -\frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{3}}{3} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z$$

Пример:

Решить уравнение $2\cos^2 x - \sin x \cos x + 5\sin^2 x = 3$.

Решение:

$$2\cos^2 x - \sin x \cos x + 5\sin^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$2\sin^2 x - \sin x \cos x - \cos^2 x = 0$$

$$2\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x - 1 = 0$$

$$2y^2 - y - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = -\frac{1}{2}, y_2 = 1$$

$$\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg} x = 1$$

$$x = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

Ответ: $x = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\right) + \pi k, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.