

Глава 2.4

Элементы комбинаторики,
теории множеств и
математической логики

Тема 2.4.1

Операции «импликация»,
«эквиваленция»



Логическая функция — это однозначное соответствие каждой из возможных комбинаций значений логических переменных одной из логических констант.

Логическую переменную логической функции называют **логическим аргументом**, который может принимать только одно из двух возможных значений: **0 и 1**

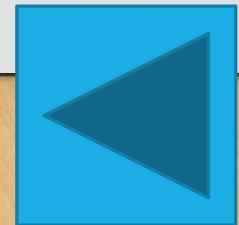
Способом описания логической функции является **таблица истинности**, которая позволяет для каждого набора логических аргументов описать единственное значение логической функции.

Основные операции над аргументами: *отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция.*



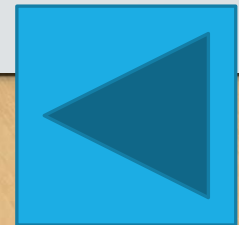
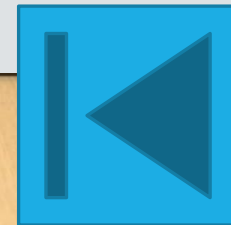
Отрицанием называется высказывание $\langle \text{не } A \rangle$, обозначаемое \bar{A} , которое считается истинным, если A ложно, и ложным, если A истинно.

| A | \bar{A} |
|-----|-----------|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |



Конъюнкцией называется высказывание **<А и В>**, обозначаемое **$A \wedge B$** , которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

| A | B | $A \wedge B$ |
|---|---|--------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



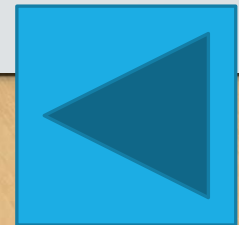
Дизъюнкцией называется высказывание **<А или В>**, обозначаемое **$A \vee B$** , которое считается ложным тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

| A | B | $A \vee B$ |
|----------|----------|------------------------------|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |



Импликацией называется высказывание **<если А, то В>**, обозначается **$A \rightarrow B$** , которое считается ложным тогда и только тогда, когда высказывание А истинно, а высказывание В ложно.

| A | B | $A \rightarrow B$ |
|---|---|-------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



Пример 1.

Рассмотрим высказывания:

- 1) Число 3 делится на 2 (**A1**);
- 2) Число 4 является простым (**A2**);
- 3) Число 5 больше 1 (**A3**).

$$\mathbf{A1=0, A2=0, A3=1}$$

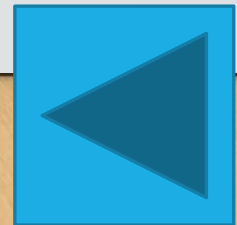
Построим высказывания $\mathbf{A1 \rightarrow A2}$, $\mathbf{A3 \rightarrow A1}$ и $\mathbf{A2 \rightarrow A3}$:

- 1) Если три делится на два, то четыре — простое число ($\mathbf{A1 \rightarrow A2}$);
- 2) Если пять больше единицы, то три делится на два ($\mathbf{A3 \rightarrow A1}$);
- 3) Если четыре — простое число, то пять больше единицы ($\mathbf{A2 \rightarrow A3}$).

$$\mathbf{A1 \rightarrow A2 = 0 \rightarrow 0 = 1}$$

$$\mathbf{A3 \rightarrow A1 = 1 \rightarrow 0 = 0}$$

$$\mathbf{A2 \rightarrow A3 = 0 \rightarrow 1 = 1}$$



Пример 2.

Запишем обратные и противоположные импликации для высказываний $A1 \rightarrow A2$, $A3 \rightarrow A1$ и $A2 \rightarrow A3$ из предыдущего примера.

- 1) Если четыре является простым числом, то три делится на два ($A2 \rightarrow A1$); $A2 \rightarrow A1 = 0 \rightarrow 0 = 1$
- 2) Если три делится на два, то пять больше единицы ($A1 \rightarrow A3$); $A1 \rightarrow A3 = 0 \rightarrow 1 = 1$
- 3) Если пять больше единицы, то четыре является простым числом ($A3 \rightarrow A2$). $A3 \rightarrow A2 = 1 \rightarrow 0 = 0$

Переходим к противоположным импликациям:

- 1) Если три **не** делится на два, то четыре **не** является простым числом ($A1' \rightarrow A2'$);
- 2) Если пять **не** больше единицы, то три **не** делится на два ($A3' \rightarrow A1'$);
- 3) Если четыре **не** является простым числом, то пять **не** больше единицы ($A2' \rightarrow A3'$).

Так как

$$A1 = A2 = 0, A3 = 1,$$

то

$$\overline{A1} = \overline{A2} = 1, \overline{A3} = 0.$$

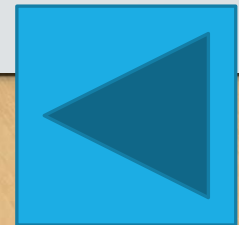
Следовательно,

$$\overline{A1} \rightarrow \overline{A2} = \overline{A3} \rightarrow \overline{A1} = 1, \overline{A2} \rightarrow \overline{A3} = 0.$$



Эквиваленцией называется высказывание $\langle \text{для } A \text{ необходимо и достаточно } B \rangle$, обозначается $A \leftrightarrow B$, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания A и B одновременно либо истинны, либо ложны.

| A | B | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|-----------------------|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |



Пример 3.

Андрей или переутомился или болен. Если он переутомился, то он раздражается. Он не раздражается. Следует ли отсюда, что он болен?

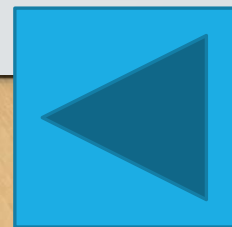
Решение:

пусть **A**-переутомился, **B**-раздражается.

В условии сказано < Если он переутомился, то он раздражается > что в логике есть операция импликация, тогда запишем $A \rightarrow B$, также в условии сказано, что он не раздражается, запишем как $\neg B$.

Получим $F = (A \rightarrow B) \wedge \neg B$ Составим таблицу истинности.

| A | B | $A \rightarrow B$ | $\neg B$ | F |
|---|---|-------------------|----------|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |



Основные законы алгебры логики

1. Закон тождества

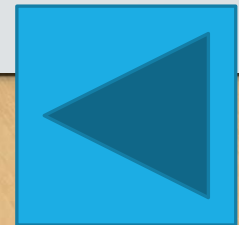
Всякое высказывание тождественно самому себе.

$$A = A$$

2. Закон исключенного третьего

Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Следовательно, результат логического сложения высказывания и его отрицания всегда принимает значение «истина».

$$A \vee \bar{A} = 1$$

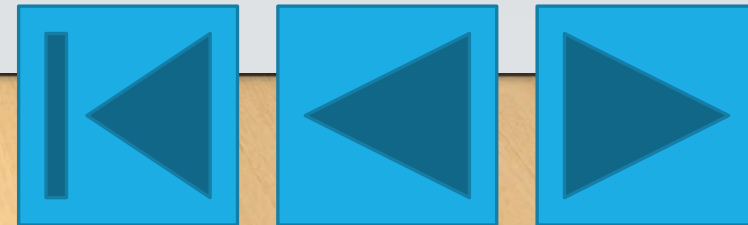


Основные законы алгебры логики

3. Закон непротиворечия

Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание A истинно, то его отрицание \overline{A} должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно.

$$A \wedge \overline{A} = 0$$



Основные законы алгебры логики

4. Закон двойного отрицания

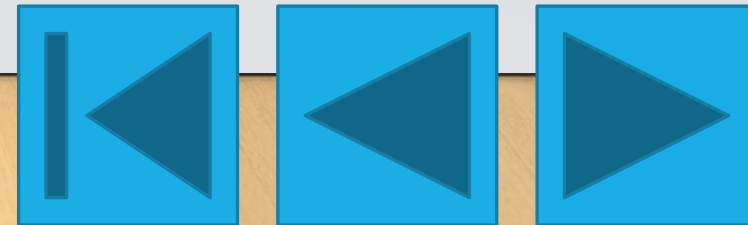
Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате получим исходное высказывание.

$$\overline{\overline{A}} = A$$

5. Переместительный (коммутативный) закон

Результат операции над высказываниями не зависит от того, в каком порядке берутся эти высказывания.

$$A \wedge B = B \wedge A$$



Основные законы алгебры логики

6. Сочетательный (ассоциативный) закон

При одинаковых знаках скобки можно ставить произвольно или вообще опускать.

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$$

7. Распределительный (дистрибутивный) закон

Определяет правило выноса общего высказывания за скобку.

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

$$A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$



Основные законы алгебры логики

8. Закон общей инверсии Закон де Моргана

$$\overline{(A \wedge B)} = \overline{A} \vee \overline{B}$$

$$\overline{(A \vee B)} = \overline{A} \wedge \overline{B}$$

9. Закон равносильности (идемпотентности)

$$A \vee A = A$$

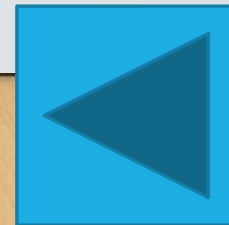
10. Законы исключения констант

$$A \vee 0 = A$$

$$A \vee 1 = 1$$

$$A \wedge 1 = A$$

$$A \wedge 0 = 0$$



Основные законы алгебры логики

11. Закон поглощения

$$B \vee (A \wedge B) = B$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

12. Закон исключения (склеивания)

$$(A \wedge B) \vee (\bar{A} \wedge B) = B$$

$$(A \vee B) \wedge (\bar{A} \vee B) = B$$

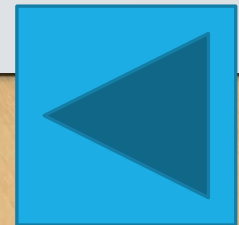
Законы алгебры логики применяются в следующей последовательности:

1) Правило де Моргана

2) Сочетательный закон

3) Правило операций переменной с её инверсией

4) Правило операций с константами



Пример 3

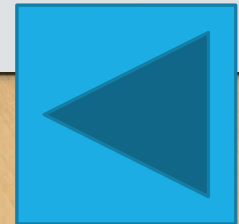
$$\overline{(X \vee Y)} \wedge \overline{(X \wedge Y)} = \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{(X \wedge Y)} = \overline{X} \wedge \overline{X} \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Y} = 0 \wedge \overline{Y} \wedge \overline{Y} = 0$$

Пример 4

$$\overline{X} \wedge \overline{Y} \vee \overline{(X \vee Y)} \vee X = \overline{X} \wedge \overline{Y} \vee \overline{X} \wedge \overline{Y} \vee X = \overline{X} \wedge (\overline{Y} \vee Y) \vee X = \overline{X} \vee X = 1$$

36)

$$A \Rightarrow D \wedge A \vee D = A \vee \overline{B} \wedge A \vee D = A \wedge \overline{A} \vee B \wedge D = 0 \vee B \wedge D = B \wedge D$$



Замена операции импликации

Заменить операцию **импликации** можно в соответствии со следующим правилом:

$$A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$$

| A | B | $A \Rightarrow B$ | $\bar{A} \vee B$ | $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$ |
|---|---|-------------------|------------------|------------------------------------|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0=0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1=1 |



Замена операции эквивалентности

Для замены операции эквивалентности существует два правила:

($\Leftrightarrow = \wedge$)

$$A \Leftrightarrow B = (A \ \& \ B) \vee (\bar{A} \ \& \ \bar{B})$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \vee \bar{B}) \ \& \ (\bar{A} \vee B)$$

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ | $\overline{A \vee B}$ | $\overline{\bar{A} \vee \bar{B}}$ | $(\overline{A \vee B}) \wedge (\overline{\bar{A} \vee \bar{B}})$ |
|---|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------------------|--|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

| A | B | $A \Leftrightarrow B$ | $A \wedge B$ | $\overline{A \wedge B}$ | $(A \wedge B) \vee \overline{A \wedge B}$ |
|---|---|-----------------------|--------------|-------------------------|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

