Глава 2.4
Элементы комбинаторики, теории множеств и математической логики
Тема 2.4.1
Операции «импликация», «эквиваленция»

Логическая функция — это однозначное соответствие каждой из возможных комбинаций значений логических переменных одной из логических констант.

Логическую переменную логической функции называют **логическим аргументом**, который может принимать только одно из двух возможных значений: **0 и 1**

Способом описания логической функции является **таблица истинности**, которая позволяет для каждого набора логических аргументов описать единственное значение логической функции.

Основные операции над аргументами: ***отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция.***

Отрицанием называется высказывание **<не A>,** обозначаемое $\overline{\mathbf{A}}$, которое считается истинным, если **A** ложно, и ложным, если **A** истинно.

A	$\overline{\mathbf{A}}$
0	1
1	0

Конъюнкцией называется высказывание **<А и В>**, обозначаемое **А^В**, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны.

А	**В**	**А^В**
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Дизъюнкцией называется высказывание**<А или В>,** обозначаемое **АvВ**, которое считается ложным тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

А	В	АvВ
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Импликацией называется высказывание **<если А, то В>**, обозначается **А→В**, которое считается ложным тогда и только тогда, когда высказывание А истинно, а высказывание В ложно.

A	**B**	**A→B**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Пример 1.

Рассмотрим высказывания:

1) Число **3** делится на 2 **(А1);**
2) Число **4** является простым **(А2);**
3) Число **5** больше **1 (А3).**

А1=0, А2=0, А3=1

Построим высказывания **А1→А2**, **А3→А1** и **А2→А3**:

1) Если три делится на два, то четыре — простое число (**А1→А2**);
2) Если пять больше единицы, то три делится на два (**А3→А1**);
3) Если четыре — простое число, то пять больше единицы (**А2→А3**).

А1→А2=0→0=1

А3→А1=1→0=0

А2→А3=0→1=1

Пример 2.

Запишем обратные и противоположные импликации для высказываний **A1→A2, A3→A1 и A2→A3** из предыдущего примера.

1) Если четыре является простым числом, то три делится на два (**A2→A1**); **A2→A1=0→0=1**

2) Если три делится на два, то пять больше единицы (**A1→A3**); **A1→A3=0→1=1**

3) Если пять больше единицы, то четыре является простым числом (**A3→A2**). **A3→A2=1→0=0**

Переходим к противоположным импликациям:

1) Если три **не** делится на два, то четыре **не** является простым числом (**A1'→A2'**);

2) Если пять **не** больше единицы, то три **не** делится на два (**A3'→A1'**);

3) Если четыре **не** является простым числом, то пять **не** больше единицы (**A2'→A3'**).

Так как

A1=A2=0, A3=1,

то

$\overline{A1}=\overline{A2}=1,\ \overline{A3}=0.$

Следовательно,

$\overline{A1}\to\overline{A2}=\overline{A3}\to\overline{A1}=1,\ \ \overline{A2}\to\overline{A3}=0.$

Эквиваленцией называется высказывание <для А необходимо и достаточно В>, обозначается А↔В, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания А и В одновременно либо истинны, либо ложны.

A	B	A↔B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пример 3.

Андрей или переутомился или болен. Если он переутомился, то он раздражается. Он не раздражается. Следует ли отсюда, что он болен?

Решение:

пусть **А**-переутомился, **В**-раздражается.

В условии сказано < Если он переутомился, то он раздражается > что в логике есть операция импликация , тогда запишем **А→В** , также в условии сказано, что он не раздражается, запишем как **¬В**.

Получим F=(A→B)∧¬B Составим таблицу истинности.

A	B	A→B	¬B	F
1	1	1	0	0
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Основные законы алгебры логики

1. Закон тождества

Всякое высказывание тождественно самому себе.

A = A

2. Закон исключенного третьего

Высказывание может быть либо истинным, либо ложным, третьего не дано. Следовательно, результат логического сложения высказывания и его отрицания всегда принимает значение **«истина».**

$\mathbf{A \vee \overline{A} = 1}$

Основные законы алгебры логики

3. Закон непротиворечия

Высказывание не может быть одновременно истинным и ложным. Если высказывание А истинно, то его отрицание НЕ А должно быть ложным. Следовательно, логическое произведение высказывания и его отрицания должно быть ложно.

$$\mathbf{A \wedge \overline{A} = 0}$$

Основные законы алгебры логики

4. Закон двойного отрицания

Если дважды отрицать некоторое высказывание, то в результате получим исходное высказывание.

$$\overline{\overline{A}}=A$$

5. Переместительный (коммутативный) закон

Результат операции над высказываниями не зависит от того, в каком порядке берутся эти высказывания.

A^B=B^A

Основные законы алгебры логики

6. Сочетательный (ассоциативный) закон

При одинаковых знаках скобки можно ставить произвольно или вообще опускать.

Av(BvC)= (AvB)vC

(A^B)^C= A^(B ^C)

7. Распределительный (дистрибутивный) закон

Определяет правило выноса общего высказывания за скобку.

Av(B^C)= (A^B)v(A^C)

Av(B^C)= (AvB)^(AvC)

Основные законы алгебры логики

8. Закон общей инверсии Закон де Моргана

$\overline{(A \wedge B)} = \overline{A} \vee \overline{B}$ $\overline{(A \vee B)} = \overline{A} \wedge \overline{B}$

9. Закон равносильности (идемпотентности)

AvA= A

10.Законы исключения констант

Av0=A Av1=1 A^1=A A^0=0

Основные законы алгебры логики

11. Закон поглощения

$$B \vee (A \wedge B) = B$$

$$A \wedge (A \vee B) = A$$

12. Закон исключения (склеивания)

$$(A \wedge B) \vee (\overline{A} \wedge B) = B$$

$$(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee B) = B$$

Законы алгебры логики применяются в следующей последовательности:

1)Правило де Моргана

2)Сочетательный закон

3)Правило операций переменной с её инверсией

4)Правило операций с константами

Пример 3

$\overline{(XvY)}\wedge(X\wedge\overline{Y}) = \overline{X}\wedge\overline{Y}\wedge(X\wedge\overline{Y}) = X\wedge\overline{X}\wedge\overline{Y}\wedge\overline{Y} = 0\wedge\overline{Y}\wedge\overline{Y} =$
0

Пример 4

$\overline{X}\wedge Y v \overline{(XvY)} v X = \overline{X}\wedge Y v \overline{X}\wedge\overline{Y} v X = \overline{X}\wedge(Y v \overline{Y}) v X = \overline{X} v X =$
1

36)
$A \Rightarrow D\wedge A v D = A v \overline{B}\wedge A v D = A\wedge\overline{A} v B\wedge D = 0 v B\wedge D =$ $\mathbf{B\wedge D}$

Замена операции импликации

Заменить операцию **импликации** можно в соответствии со следующим правилом:

$$A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$$

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A} \vee B$	$A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$
1	0	0	0	0=0
1	1	1	1	1=1

Замена операции эквивалентности

Для замены операции **эквивалентности** существует два правила:

(&=^)

$$A \Leftrightarrow B = (A \& B) \vee (\bar{A} \& \bar{B})$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \vee \bar{B}) \& (\bar{A} \vee B)$$

A	B	A<=>B	$A \vee \bar{B}$	$\bar{A} \vee B$	$(A \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \vee B)$
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

A	B	A<=>B	$A \wedge B$	$(\bar{A} \wedge \bar{B})$	$(A \wedge B) \vee (A \wedge \bar{B})$
1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	0	1