ДИНАМИКА ТОЧКИ

ЛЕКЦИЯ 4:
ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

1. Основные теоремы динамики точки

Основные теоремы динамики:

- **Теорема об изменении количества движения материальной точки**
- **Теорема об изменении момента количества движения материальной точки**
- **Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки**

2. Теорема об изменении количества движения

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}dt$$

Теорема в дифференциальной форме

Элементарное изменение количества движения материальной точки равно элементарному импульсу силы, приложенной к точке.

Теорема в интегральной форме

Изменение количества движения за конечный промежуток времени равно импульсу силы, приложенной к точке, за тот же промежуток времени.

$$m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \int_0^t \mathbf{F}dt$$

Координатная запись

$$d(mV_x) = F_x dt$$

$$d(mV_y) = F_y dt$$

$$d(mV_z) = F_z dt$$

$$mV_x - mV_{0x} = \int_{t_0}^{t} F_x dt$$

$$mV_y - mV_{0y} = \int_{t_0}^{t} F_y dt$$

$$mV_z - mV_{0z} = \int_{t_0}^{t} F_z dt$$

3. Первые интегралы

Случай 1

$$\mathbf{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} = \text{const} \qquad V_x = c_x, V_y = c_y, V_z = c_z$$

При отсутствии силы свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно

Случай 2

$$F_x = F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad V_x = c_x,\ V_y = c_y$$

Траекторией точки будет плоская кривая, лежащая в плоскости, параллельной оси z, т. е. линии действия силы.

$$c_y V_x + c_x V_y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(c_y x + c_x y\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_y x + c_x y = \text{const}$$

Ур-ие плоскости, параллельной оси z

Случай 3

$$F_x = 0 \quad \Rightarrow \quad V_x = c_x$$

Проекция скорости точки на ось, перпендикулярную к силе, остается величиной постоянной.

4. Первые интегралы

В общем случае $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$ при вычислении импульса $\int_0^t \mathbf{F}dt$ нужно знать $\mathbf{x}(t)$, т.е. решение уравнений движения.

Но если известно общее решение, то использование теоремы об изменении количества движения для нахождения первых интегралов теряет смысл

<u>Однако</u> если действующая **<u>сила постоянна</u>** (F = const) или **<u>зависит только от времени</u>**, т. е. F = F(t), то интеграл вычисляется и теорема дает один векторный или, в проекциях на оси координат, три скалярных первых интеграла уравнений движения точки.

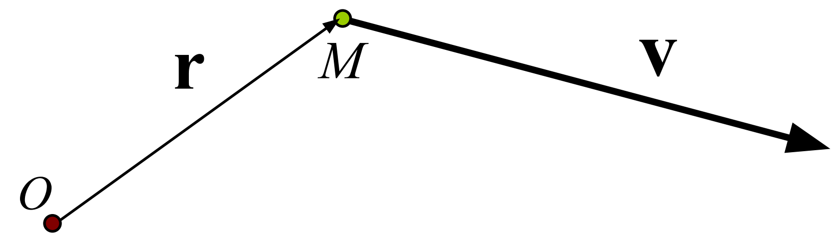
<u>Пример использования</u>: Определить промежуток времени *T*, необходимый для того, чтобы материальная точка веса *P*, движущаяся по горизонтальной прямой под действием постоянной силы *F*, увеличила свою начальную скорость v_0 в *n* раз.

$$\frac{P}{g}(nv_0 - v_0) = FT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{Pv_0}{Fg}(n-1)$$

5. Теорема об изменении момента количества движения

Момент количества движения точки M относительно точки O равен

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{r}_{OM} \times \mathbf{Q} = m\left(\mathbf{r}_{OM} \times \mathbf{v}\right)$$



$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\mathbf{w} = \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}\right) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}\right) - \underbrace{\mathbf{v} \times m\mathbf{v}}_{0}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}\right) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}} \qquad \boxed{\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O}$$

$\mathbf{K}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ момент количества движения материальной точки относительно центра (точки O)

$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ момент силы, приложенной к точке, относительно центра

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо центра равна моменту силы, приложенной к точке, относительно того же центра.

6. Теорема об изменении момента количества движения

Теорема об изменении момента количества движения в проекциях на оси: Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какой-либо оси равна моменту силы, приложенной к точке, относительно той же самой оси.

$$\begin{cases} m\dfrac{d}{dt}\left(\dot{y}z-\dot{z}y\right)=yF_z-zF_y \\ m\dfrac{d}{dt}\left(\dot{z}x-\dot{x}z\right)=zF_x-xF_z \\ m\dfrac{d}{dt}\left(\dot{x}y-\dot{y}x\right)=xF_y-yF_x \end{cases}$$

7. Первые интегралы в случае центральной силы

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

Это возможно или когда сила $F = 0$, или же тогда, когда линия действия силы все время проходит через одну и ту же точку O. Такая сила называется **центральной** силой, а точка O, через которую проходит линия действия силы, — **центром силы**.

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \mathrm{const}$$

векторный первый интеграла уравнений движения

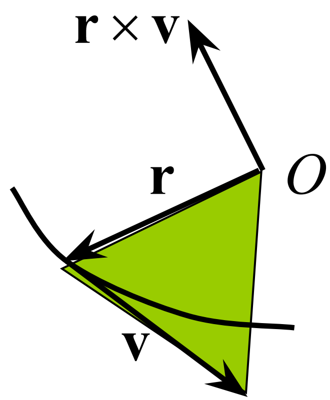
$$m\left(\dot{y}z - \dot{z}y\right) = c_1$$
$$m\left(\dot{z}x - \dot{x}z\right) = c_2$$
$$m\left(\dot{x}y - \dot{y}x\right) = c_3$$

три скалярных первых интеграла

8. Следствие 1

Траектория точки, движущейся под действием центральной силы, есть плоская кривая.

Геометрия



Так как вектор $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ перпендикулярный к плоскости, проходящей через векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$, имеет постоянное направление, то векторы $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{v}$ должны все время лежать в одной плоскости, проходящей через центр О.

Алгебра

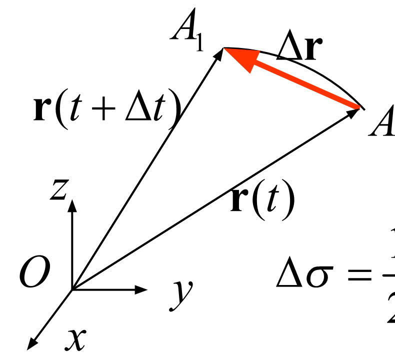
$$\left.\begin{aligned} m(\dot{y}z - \dot{z}y) &= c_1 \\ m(\dot{z}x - \dot{x}z) &= c_2 \\ m(\dot{x}y - \dot{y}x) &= c_3 \end{aligned}\right| \begin{aligned} &\cdot x \\ &\cdot y \\ &\cdot z \end{aligned} \quad + \quad \Longrightarrow \quad \underbrace{c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0}_{\text{уравнение плоскости}}$$

9. Следствие 2

Закон площадей: площади, описываемые радиусом-вектором, пропорциональны временам. $\boxed{\sigma = ct + \sigma_0}$

$$\underbrace{\mathbf{r}\times\mathbf{v}}_{2\mathbf{q}} = \text{const}$$

$\longleftarrow$ секторная скорость



$$\Delta\sigma = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r}\times\Delta\mathbf{r}\right|$$

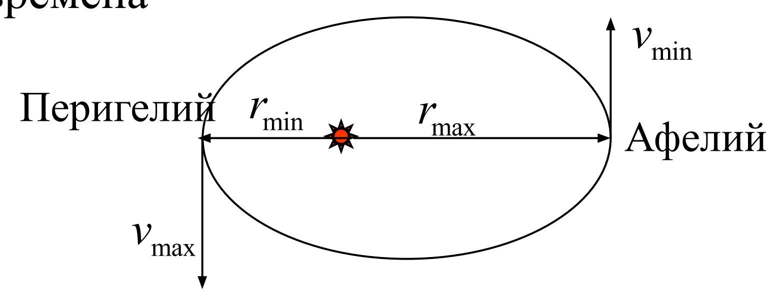
Секторная скорость характеризует скорость изменения площади поверхности, описываемой радиус вектором

$$q = \frac{d\sigma}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2\Delta t}\left|\mathbf{r}\times\Delta\mathbf{r}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}\left|\mathbf{r}\times\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}\right| = \frac{1}{2}\left|\mathbf{r}\times\mathbf{v}\right|$$

2-ой закон Кеплера: линия, соединяющая планету с Солнцем заметет равные площади за равные времена

$$v_{\max} r_{\min} = v_{\min} r_{\max}$$

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}}$$



10. Теорема об изменении кинетической энергии

Скалярная величина T, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости, называется **кинетической энергией** точки

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$$

$$\mathbf{v}\cdot \quad \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \qquad v_x \cdot \frac{dv_x}{dt} + v_y \cdot \frac{dv_y}{dt} + v_z \cdot \frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dv_x^2}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dv_y^2}{dt} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}}$$

Величина W, равная скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения, называется **мощностью**.

$$\boxed{\frac{d}{dt}T = W}$$

Производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности

В СИ мощность измеряется в ваттах (1 вт = 1 н м/сек).
В технике за единицу мощности часто принимается 1 лошадиная сила = 736 вт.

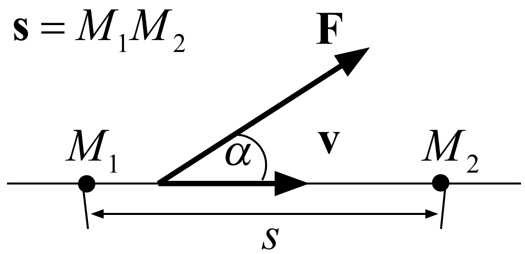
11. Работа силы

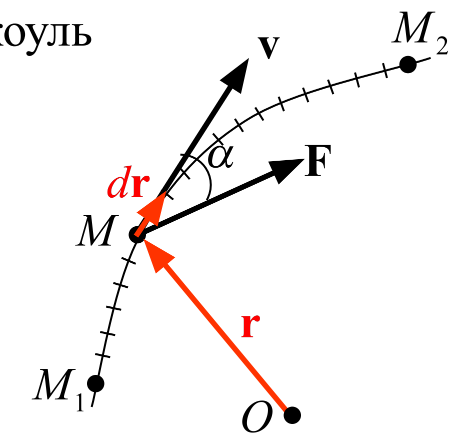
$$A_{1,2} = Fs\cos\alpha = \mathbf{Fs}$$

Единицы измерения в СИ -джоуль

1 Дж = 1 Н

$$\mathbf{s} = \overrightarrow{M_1M_2}$$





Элементарная работа

$$d'A = F\cos\alpha\, ds = F\left|d\mathbf{r}\right|\cos\alpha = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

$$A_{1,2} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \Delta s\to 0}} \sum_{k=1}^{n} F_k \cos\alpha_k \Delta s_k \qquad A_{1,2} = \int_{M_1M_2} F\cos\alpha\, ds$$

Представление работы в виде криволинейного интеграла 1-го рода

$$A_{1,2} = \int_{M_1M_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Представление работы в виде криволинейного интеграла 2-го рода

12. Теорема об изменении КЭ в терминах работы

Связь между работой и мощностью

$$W = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = \frac{\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow Wdt = d'A$$

мощность равна работе, совершаемой в единицу времени

дифференциальная форма теоремы

$$\boxed{d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d'A}$$

Дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе, действующей на точку силы.

интегральная форма теоремы

$$\boxed{\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}}$$

Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно работе действующей силы на том же перемещении.

$$A_{1,2} = \int\limits_{M_1M_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\limits_{M_1M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

В общем случае при вычислении работы нужно иметь решение уравнений движения.

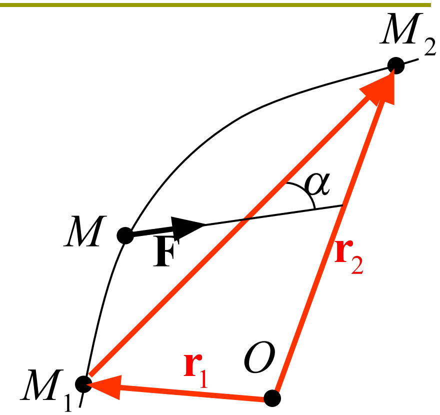
$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} dx &= \dot{x}dt \\ dy &= \dot{y}dt \\ dz &= \dot{z}dt \end{aligned} \Rightarrow A_{1,2} = \int\limits_{t_1}^{t_2}\left(F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_z\dot{z}\right)dt$$

Если сила F зависит только от **x** и траектория M_1M_2 известна то работа вычисляется по формуле (1) и при этом не нужно знать полностью закон движения

13. Пример 1: постоянная сила

$$\mathbf{F} = \mathrm{const}$$

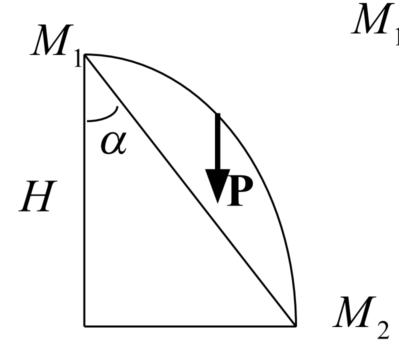
$$A_{1,2} = \int\limits_{M_1M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \int\limits_{M_1M_2} d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = Fs\cos\alpha$$



Для силы тяжести имеем

$$A_{1,2} = \pm PH$$

\+ если М опускается
\- если М поднимается



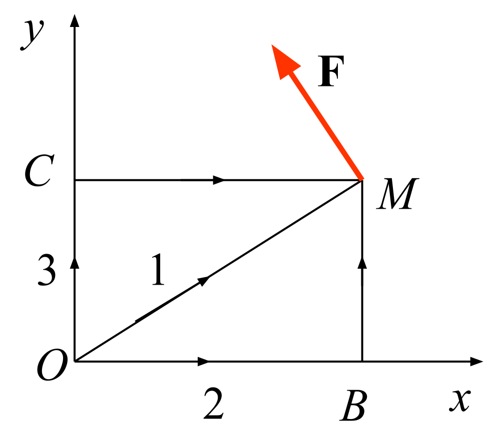
В данном случае совершаемая работа не зависит от траектории точки, а зависит лишь от начального и конечного положений. При этом теорема об изменении кинетической энергии дает первый интеграл

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = P(z_1 - z_2)$$

ось z направлена вверх

14. Пример 2

$$F_x(x, y) = -py,\ F_y(x, y) = px, \quad p > 0$$



$\mathbf{F} \perp \mathbf{r}$ $\qquad \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = (-py)x + (px)y = 0$

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = \int_{OB} + \int_{BM} = \int_0^{x_M} F_x(x, 0)dx + \int_0^{y_M} F_y(x_M, y)dy = \int_0^{y_M} px_M dy = px_M y_M$$

$$A_3 = \int_{OC} + \int_{CM} = \int_0^{y_M} F_y(0, y)dy + \int_0^{x_M} F_x(x, y_M)dx = \int_0^{x_M} (-py_M)dx = -px_M y_M$$

В общем случае **работа силы зависит** не только от начального и конечного положений точки приложения силы, но также и **от пути**, по которому эта точка перемещается.

15. Задачи**,** решаемые с помощью Т**.** об изменении энергии

$$\boxed{\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}}$$

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии можно решать следующие две основные задачи.

1) **определение скорости материальной точки в конце или начале движения**. Решение этой задачи имеет смысл в том случае, если работу всех сил, приложенных к материальной точке, можно вычислить, не зная закона движения, т. е. не интегрируя уравнения движения.

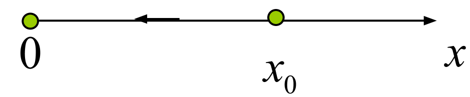
2) **вычисление работы силы по заданной скорости**.

Использование теоремы для решения задач такого рода особенно полезно в тех случаях, когда трудности, связанные с определением закона движения и вычислением интеграла работы сравнительно велики.

16. Пример 3: Колебания с вязким сопротивлением

$$F = -cx,\ R = -b\dot{x} \qquad m\ddot{x} = -b\dot{x} - cx$$

Определить работу восстанавливающей силы F и работу силы сопротивления R для линейных колебаний точки за все время колебаний.



$$A_F = \int_{x_0}^{0} -cx\,dx = c\int_{0}^{x_0} x\,dx = \frac{cx_0^2}{2}$$

не нужно знать закона движения точки, ее массу и скорость

$$A_R = \int_{x_0}^{0} -b\dot{x}\,dx = -b\int_{\infty}^{0} \dot{x}\,\dot{x}\,dt = b\int_{0}^{\infty} (\dot{x})^2\,dt$$

нужно знать закон движения точки

$$k^2 = c/m, \quad 2h = b/m \qquad h > k$$

$$\alpha_{\pm} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}$$

$$x = \frac{\alpha_- x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_- - \alpha_+} e^{\alpha_+ t} + \frac{\alpha_+ x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_+ - \alpha_-} e^{\alpha_- t}$$

$$\dot{x} = \alpha_+ \frac{\alpha_- x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_- - \alpha_+} e^{\alpha_+ t} + \alpha_- \frac{\alpha_+ x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_+ - \alpha_-} e^{\alpha_- t}$$

$$A_R = b\int_{0}^{\infty} \square \; = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} + \frac{cx_0^2}{2}$$

$$m\ddot{x}\dot{x} = -b\dot{x}\dot{x} - cx\dot{x}$$

$$\frac{m}{2}\frac{d}{dt}(\dot{x})^2 = -b\dot{x}\dot{x} - \frac{c}{2}\frac{d}{dt}(x)^2 \qquad -\int_{0}^{\infty} dt$$

$$\frac{m\dot{x}_0^2}{2} = \underbrace{b\int_{0}^{\infty} (\dot{x})^2\,dt}_{A_R} - \frac{cx_0^2}{2}$$

$$A_R = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} + \frac{cx_0^2}{2}$$