

ДИНАМИКА ТОЧКИ



ЛЕКЦИЯ 4:
ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ ТОЧКИ

1. Основные теоремы динамики точки

Основные теоремы динамики:

- Теорема об изменении количества движения материальной точки
- Теорема об изменении момента количества движения материальной точки
- Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

2. Теорема об изменении количества ДВИЖЕНИЯ

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}$$

Теорема в дифференциальной форме

Теорема в интегральной форме

$$d(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}dt$$

Элементарное изменение количества движения материальной точки равно элементарному импульсу силы, приложенной к точке.

Изменение количества движения за конечный промежуток времени равно импульсу силы, приложенной к точке, за тот же промежуток времени.

$$m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \int_0^t \mathbf{F}dt$$

Координатная запись

$$d(mV_x) = F_x dt$$

$$d(mV_y) = F_y dt$$

$$d(mV_z) = F_z dt$$

$$mV_x - mV_{0x} = \int_0^t F_x dt$$

$$mV_y - mV_{0y} = \int_0^t F_y dt$$

$$mV_z - mV_{0z} = \int_0^t F_z dt$$

3. Первые интегралы

Случай 1

$$\mathbf{F} = 0 \Rightarrow \mathbf{v} = \text{const}$$

$$V_x = c_x, V_y = c_y, V_z = c_z$$

При отсутствии силы свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно

Случай 2

$$F_x = F_y = 0 \Rightarrow V_x = c_x, V_y = c_y$$

Траекторией точки будет плоская кривая, лежащая в плоскости, параллельной оси z , т. е. линии действия силы.

$$c_y V_x + c_x V_y = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(c_y x + c_x y) = 0 \Rightarrow c_y x + c_x y = \text{const}$$

Ур-ие плоскости,
параллельной оси z

Случай 3

$$F_x = 0 \Rightarrow V_x = c_x$$

Проекция скорости точки на ось, перпендикулярную к силе, остается величиной постоянной.

4. Первые интегралы

В общем случае $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)$ при вычислении импульса $\int_0^t \mathbf{F} dt$ нужно знать $\mathbf{x}(t)$, т.е. решение уравнений движения.

Но если известно общее решение, то использование теоремы об изменении количества движения для нахождения первых интегралов теряет смысл

Однако если действующая **сила постоянна** ($F = \text{const}$) или **зависит только от времени**, т. е. $F = F(t)$, то интеграл вычисляется и теорема дает один векторный или, в проекциях на оси координат, три скалярных первых интеграла уравнений движения точки.

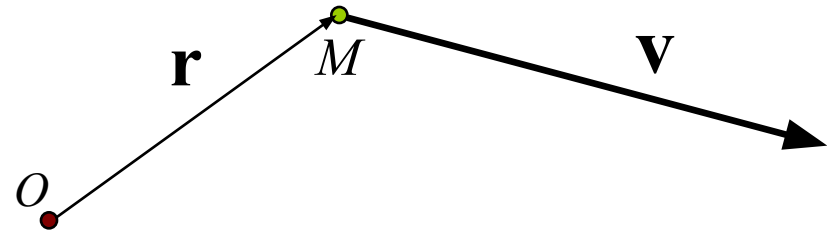
Пример использования: Определить промежуток времени T , необходимый для того, чтобы материальная точка веса P , движущаяся по горизонтальной прямой под действием постоянной силы F , увеличила свою начальную скорость v_0 в n раз.

$$\frac{P}{g}(nv_0 - v_0) = FT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{Pv_0}{Fg}(n - 1)$$

5. Теорема об изменении момента количества движения

Момент количества движения точки M относительно точки O равен

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{r}_{OM} \times \mathbf{Q} = m(\mathbf{r}_{OM} \times \mathbf{v})$$



$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\mathbf{w} = \mathbf{r} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) - \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times m\mathbf{v} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) - \cancel{\mathbf{v} \times m\mathbf{v}}_0$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O$$

$$\mathbf{K}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

момент количества движения материальной точки относительно центра (точки O)

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

момент силы, приложенной к точке, относительно центра

Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какого-либо центра равна моменту силы, приложенной к точке, относительно того же центра.

6. Теорема об изменении момента количества движения

Теорема об изменении момента количества движения в проекциях на оси:
Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какой-либо оси равна моменту силы, приложенной к точке, относительно той же самой оси.

$$\left[\begin{array}{l} m \frac{d}{dt} (\dot{y}z - \dot{z}y) = yF_z - zF_y \\ m \frac{d}{dt} (\dot{z}x - \dot{x}z) = zF_x - xF_z \\ m \frac{d}{dt} (\dot{x}y - \dot{y}x) = xF_y - yF_x \end{array} \right.$$

7. Первые интегралы в случае центральной силы

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0$$

Это возможно или когда сила $F = 0$, или же тогда, когда линия действия силы все время проходит через одну и ту же точку O . Такая сила называется **центральной** силой, а точка O , через которую проходит линия действия силы, — **центром силы**.

$$\mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \text{const}$$

векторный первый интеграла
уравнений движения

$$m(\dot{y}z - \dot{z}y) = c_1$$

$$m(\dot{z}x - \dot{x}z) = c_2$$

$$m(\dot{x}y - \dot{y}x) = c_3$$

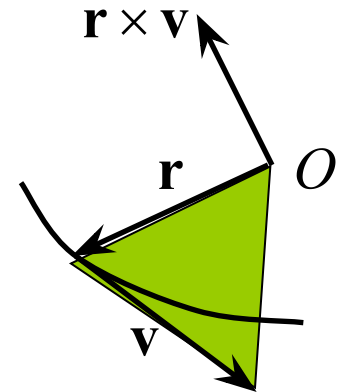
три скалярных первых интеграла

8. Следствие 1

Траектория точки, движущейся под действием центральной силы, есть плоская кривая.

Геометрия

Так как вектор $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ перпендикулярный к плоскости, проходящей через векторы \mathbf{r} и \mathbf{v} , имеет постоянное направление, то векторы \mathbf{r} и \mathbf{v} должны все время лежать в одной плоскости, проходящей через центр O .



Алгебра

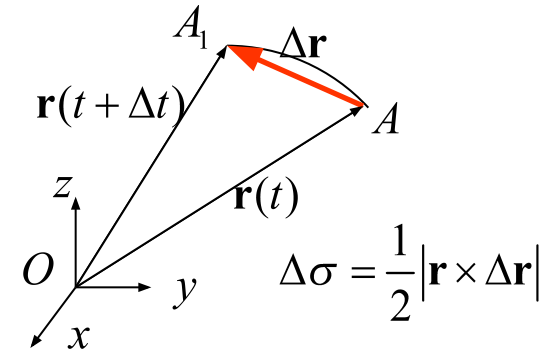
$$\begin{array}{l|l} m(\dot{y}z - \dot{z}y) = c_1 & \cdot x \\ m(\dot{z}x - \dot{x}z) = c_2 & \cdot y \\ m(\dot{x}y - \dot{y}x) = c_3 & \cdot z \end{array} \quad + \quad \longrightarrow \quad \underbrace{c_1x + c_2y + c_3z = 0}_{\text{уравнение плоскости}}$$

9. Следствие 2

Закон площадей: площади, описываемые радиусом-вектором, пропорциональны временам. $\sigma = ct + \sigma_0$

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \text{const}$$

$$\underbrace{\quad}_{2\mathbf{q}} \leftarrow \text{секторная скорость}$$



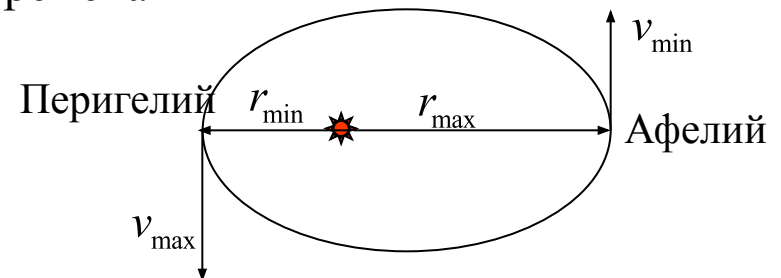
Секторная скорость характеризует скорость изменения площади поверхности, описываемой радиус вектором

$$q = \frac{d\sigma}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} |\mathbf{r} \times \Delta\mathbf{r}| = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left| \mathbf{r} \times \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} \right| = \frac{1}{2} |\mathbf{r} \times \mathbf{v}|$$

2-ой закон Кеплера: линия, соединяющая планету с Солнцем заметет равные площади за равные времена

$$v_{\max} r_{\min} = v_{\min} r_{\max}$$

$$\frac{v_{\max}}{v_{\min}} = \frac{r_{\max}}{r_{\min}}$$



10. Теорема об изменении кинетической энергии

Скалярная величина T , равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости, называется **кинетической энергией** точки

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$$
$$\mathbf{v} \cdot \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad v_x \cdot \frac{dv_x}{dt} + v_y \cdot \frac{dv_y}{dt} + v_z \cdot \frac{dv_z}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv_x^2}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dv_y^2}{dt} + \frac{1}{2} \frac{dv_z^2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

Величина W , равная скалярному произведению силы на скорость точки ее приложения, называется **мощностью**.

$$\frac{d}{dt} T = W$$

Производная по времени от кинетической энергии точки равна мощности

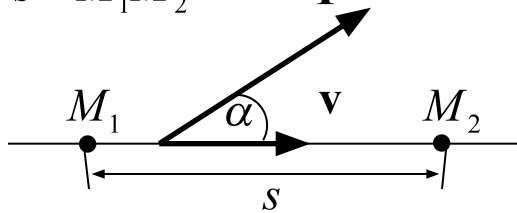
В СИ мощность измеряется в ваттах ($1 \text{ вт} = 1 \text{ н м/сек}$).

В технике за единицу мощности часто принимается 1 лошадиная сила = 736 вт.

11. Работа силы

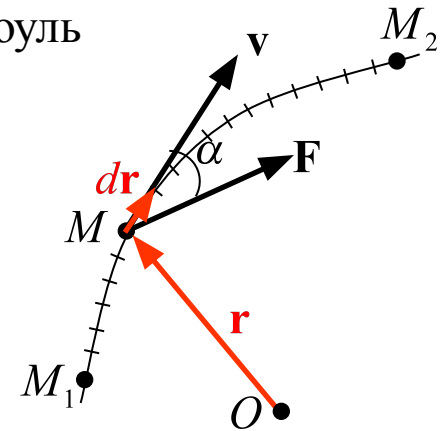
$$A_{1,2} = F s \cos \alpha = \mathbf{F} \mathbf{s}$$

$$\mathbf{s} = \overline{M_1 M_2}$$



Единицы измерения в СИ - джоуль

$$\text{Дж} \neq \text{Н}$$



Элементарная работа

$$d'A = F \cos \alpha ds = F |d\mathbf{r}| \cos \alpha = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$A_{1,2} = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta s \rightarrow 0}} \sum_{k=1}^n F_k \cos \alpha_k \Delta s_k$$

$$A_{1,2} = \int_{M_1 M_2} F \cos \alpha ds$$

Представление работы в виде криволинейного интеграла 1-го рода

$$A_{1,2} = \int_{M_1 M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1 M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Представление работы в виде криволинейного интеграла 2-го рода

12. Теорема об изменении КЭ в терминах работы

Связь между работой и мощностью

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} \Rightarrow W dt = d'A$$

мощность равна работе, совершаемой в единицу времени

дифференциальная форма теоремы

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = d'A$$

Дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе, действующей на точку силы.

интегральная форма теоремы

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}$$

Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно работе действующей силы на том же перемещении.

$$A_{1,2} = \int_{M_1 M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_1 M_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

В общем случае при вычислении работы нужно иметь решение уравнений движения.

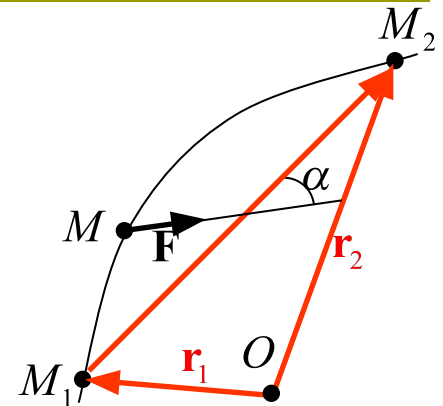
$$\begin{aligned} x = x(t) & \Rightarrow dx = \dot{x} dt \\ y = y(t) & \Rightarrow dy = \dot{y} dt \\ z = z(t) & \Rightarrow dz = \dot{z} dt \end{aligned} \Rightarrow A_{1,2} = \int_{t_1}^{t_2} (F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}) dt$$

Если сила \mathbf{F} зависит только от \mathbf{x} и траектория $M_1 M_2$ известна то работа вычисляется по формуле (1) и при этом не нужно знать полностью закон движения

13. Пример 1: постоянная сила

$$\mathbf{F} = \text{const}$$

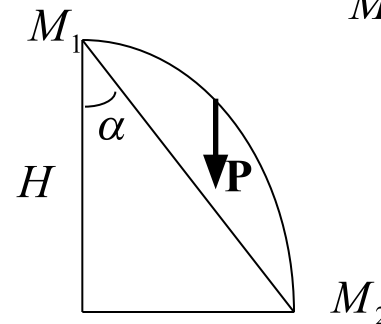
$$A_{1,2} = \int_{M_1 M_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot \int_{M_1 M_2} d\mathbf{r} = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = F s \cos \alpha$$



Для силы тяжести имеем

$$A_{1,2} = \pm PH$$

+ если M опускается
- если M поднимается



В данном случае совершаемая работа не зависит от траектории точки, а зависит лишь от начального и конечного положений. При этом теорема об изменении кинетической энергии дает первый интеграл

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = P(z_1 - z_2)$$

ось z направлена вверх

14. Пример 2

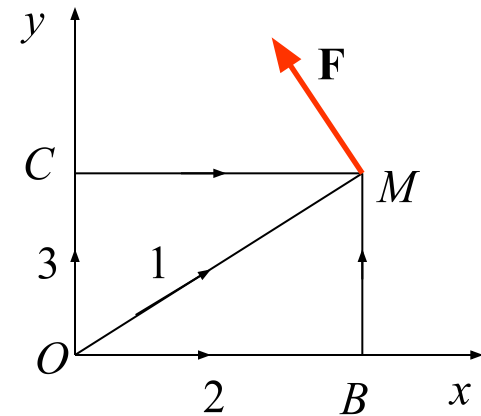
$$F_x(x, y) = -py, F_y(x, y) = px, \quad p > 0$$

$$\mathbf{F} \perp \mathbf{r} \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = (-py)x + (px)y = 0$$

$$A_1 = 0$$

$$A_2 = \int_{OB} + \int_{BM} = \int_0^{x_M} F_x(x, 0) dx + \int_0^{y_M} F_y(x_M, y) dy = \int_0^{y_M} px_M dy = px_M y_M$$

$$A_3 = \int_{OC} + \int_{CM} = \int_0^{y_M} F_y(0, y) dy + \int_0^{x_M} F_x(x, y_M) dx = \int_0^{x_M} (-py_M) dx = -px_M y_M$$



В общем случае **работа силы зависит** не только от начального и конечного положений точки приложения силы, но также и **от пути**, по которому эта точка перемещается.

15. Задачи, решаемые с помощью Т. об изменении энергии

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = A_{1,2}$$

С помощью теоремы об изменении кинетической энергии можно решать следующие две основные задачи.

1) **определение скорости материальной точки в конце или начале движения.** Решение этой задачи имеет смысл в том случае, если работу всех сил, приложенных к материальной точке, можно вычислить, не зная закона движения, т. е. не интегрируя уравнения движения.

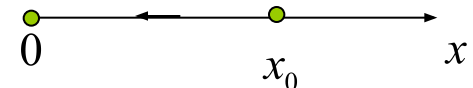
2) **вычисление работы силы по заданной скорости.**

Использование теоремы для решения задач такого рода особенно полезно в тех случаях, когда трудности, связанные с определением закона движения и вычислением интеграла работы сравнительно велики.

16. Пример 3: Колебания с вязким сопротивлением

$$F = -cx, R = -bx \quad \ddot{m}x = -bx - cx$$

Определить работу восстанавливающей силы F и работу силы сопротивления R для линейных колебаний точки за все время колебаний.



$$A_F = \int_{x_0}^0 -cx dx = c \int_0^{x_0} x dx = \frac{cx_0^2}{2}$$

не нужно знать закона движения точки, ее массу и скорость

$$A_R = \int_{x_0}^0 -bx dx = -b \int_0^{\infty} \dot{x} x dt = b \int_0^{\infty} (x)^2 dt$$

нужно знать закон движения точки

$$k^2 = c/m, \quad 2h = b/m \quad h > k$$

$$\alpha_{\pm} = -h \pm \sqrt{h^2 - k^2}$$

$$x = \frac{\alpha_- x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_- - \alpha_+} e^{\alpha_+ t} + \frac{\alpha_+ x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_+ - \alpha_-} e^{\alpha_- t}$$

$$\dot{x} = \alpha_+ \frac{\alpha_- x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_- - \alpha_+} e^{\alpha_+ t} + \alpha_- \frac{\alpha_+ x_0 - \dot{x}_0}{\alpha_+ - \alpha_-} e^{\alpha_- t}$$

$$A_R = b \int_0^{\infty} \dot{x} x dt = \frac{m \dot{x}_0^2}{2} + \frac{cx_0^2}{2}$$

$$\ddot{m}x = -bx - cx$$

$$\frac{m}{2} \frac{d}{dt} (x)^2 = -bx - \frac{c}{2} \frac{d}{dt} (x)^2 - \int_0^{\infty} dt$$

$$\frac{m \dot{x}_0^2}{2} = \underbrace{b \int_0^{\infty} (x)^2 dt}_{A_R} - \frac{cx_0^2}{2}$$

$$A_R = \frac{m \dot{x}_0^2}{2} + \frac{cx_0^2}{2}$$