

Презентация
на тему: «Теория вероятности»



Теория
вероятностей —
математическая наука,
изучающая
закономерности
массовых случайных
явлений (событий).

$P^*(A) = M/N$ -
относительная частота
 n —испытания
 m -раз.



События и испытания

- Предметом исследования в теории вероятностей являются события, появляющиеся при определенных условиях, которые можно воспроизводить неограниченное количество раз.
- Каждое осуществление этих условий называют испытанием(опыт).

Примеры событий:

- попадание в цель при выстреле из орудия
(опыт — произведение выстрела; событие — попадание в цель);
- выпадение двух гербов при трёхкратном бросании монеты (опыт — трёхкратное бросание монеты; событие — выпадение двух гербов);
- появление ошибки измерения в заданных пределах при измерении дальности до цели
(опыт — измерение дальности; событие — ошибка измерения).



События

Невозможные

Достоверные

- ✓ Происходят при каждом проведении опыта

Случайные

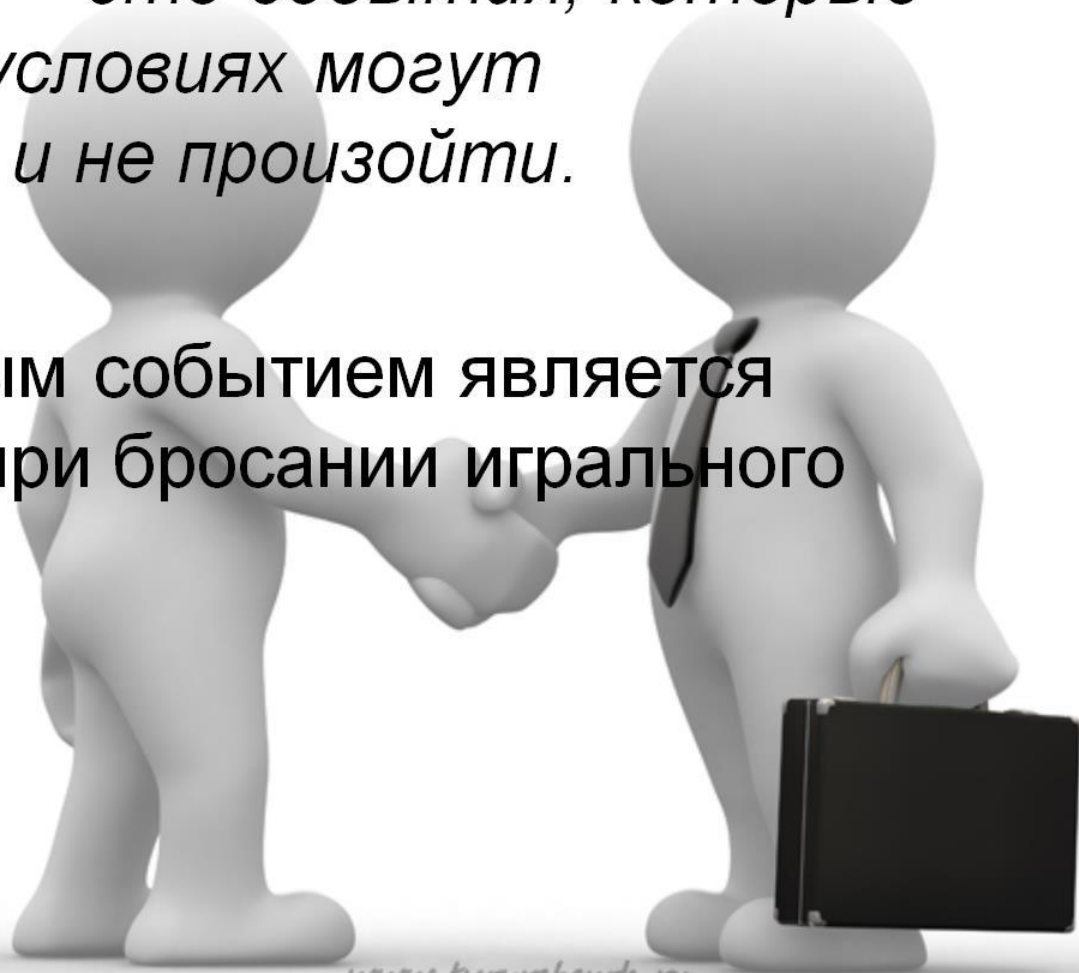
- ✓ Происходят в определенных условиях ;но при каждом проведении опыта :одни происходят чаще , другие реже



Вероятность случайного события

Случайные события – это события, которые при одних и тех же условиях могут произойти, а могут и не произойти.

Например: случайным событием является выпадение пятерки при бросании игрального кубика.



Опыт показывает, что при многократном повторении испытаний частота $P^*(A)$ случайного события обладает устойчивостью.

Поясним это

Пусть при бросании монеты 4040 раз герб выпал 2048 раз. Частота появления герба в данной серии опытов равна $P^*(A)=m/n=2048/4040=0,5069$. При бросании той же монеты 12000 раз герб выпал 6019 раз. Следовательно, в этом случае частота $P^*(A)=6019/12000=0,5016$.

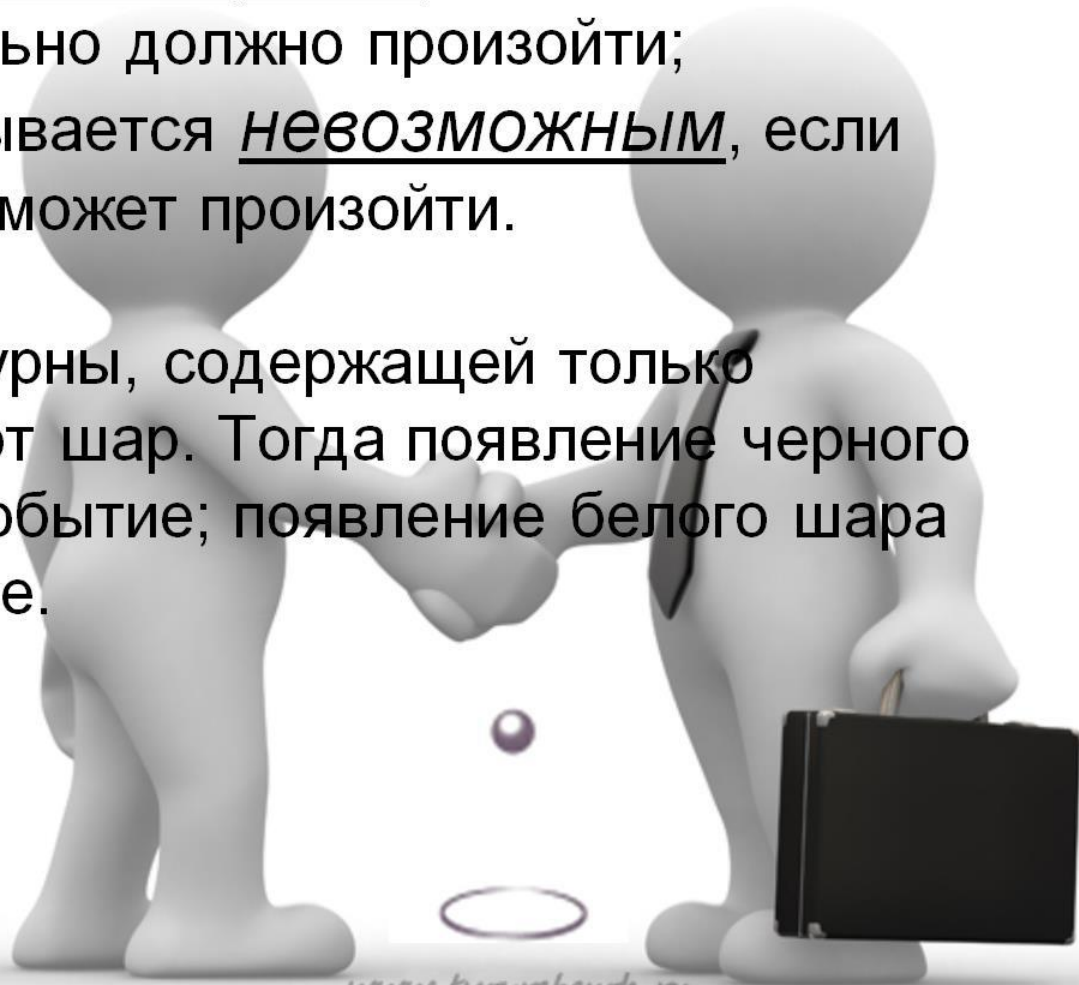
Наконец, при 24000 бросаний герб появился 12012 раз с частотой $P^*(A)=0,5005$. Таким образом, мы видим, что при большом числе бросаний монеты частота появления герба обладает устойчивостью, т. е. мало отличается от числа 0,5. Как показывает опыт, это отклонение частоты от числа 0,5 уменьшается с увеличением числа испытаний. Наблюдаемое в этом примере свойство устойчивости частоты является общим свойством массовых случайных событий, а именно, всегда существует такое число, к которому приближается частота появления данного события, мало отличаясь от него при большом числе испытаний. Это число называется *вероятностью* события. Оно выражает объективную возможность появления события. Чем больше вероятность события, тем более возможным оказывается его появление. Вероятность события A будем обозначать через $P(A)$. В рассмотренном выше примере вероятность появления герба, очевидно, равна 0,5.

| Экспериментатор | Число бросаний | Число выпадений герба | Частота |
|-----------------|----------------|-----------------------|---------|
| Ж. Бюффон | 4040 | 2048 | 0,5080 |
| К. Пирсон | 12000 | 6014 | 0,5016 |
| К. Пирсон | 24000 | 12012 | 0,5006 |

События

Событие называется достоверным, если оно в данном опыте обязательно должно произойти; наоборот, событие называется невозможным, если оно в данном опыте не может произойти.

Пусть, например, из урны, содержащей только черные шары, вынимают шар. Тогда появление черного шара — достоверное событие; появление белого шара — невозможное событие.



Тест №1

Это событие является случайным?

- А) Слово начинается с буквы «ь»;
- В) Ученику 8-го класса 14 месяцев ;
- С) Бросили две игральные кости : сумма выпавших на них очков равно 8;

Ответ: В.

Тест № 2

Найди достоверное событие :

- А) На уроке математики ученики делали физические упражнения;
- В) Сборная России по футболу не станет чемпионом мира 2006г;
- С) Подкинули монету и она упала на «Орла»;

Ответ : В.

Задача №1

*По статистике,
на каждые 1000
лампочек
приходится 3
бракованные
.Какова
вероятность
купить исправную
лампочку?*

Решение:

$$P^*(A) = 3/1000 = 0.003$$

Вероятность
купить исправную
лампочку равно
 $1 - 0.003 = 0.997$

Ответ: **0.997**

Задача № 2

Ребенок имеет на руках 5 кубиков с буквами: А, К, К, Л, У. Какова вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла"?

Решение: Используем формулу классической

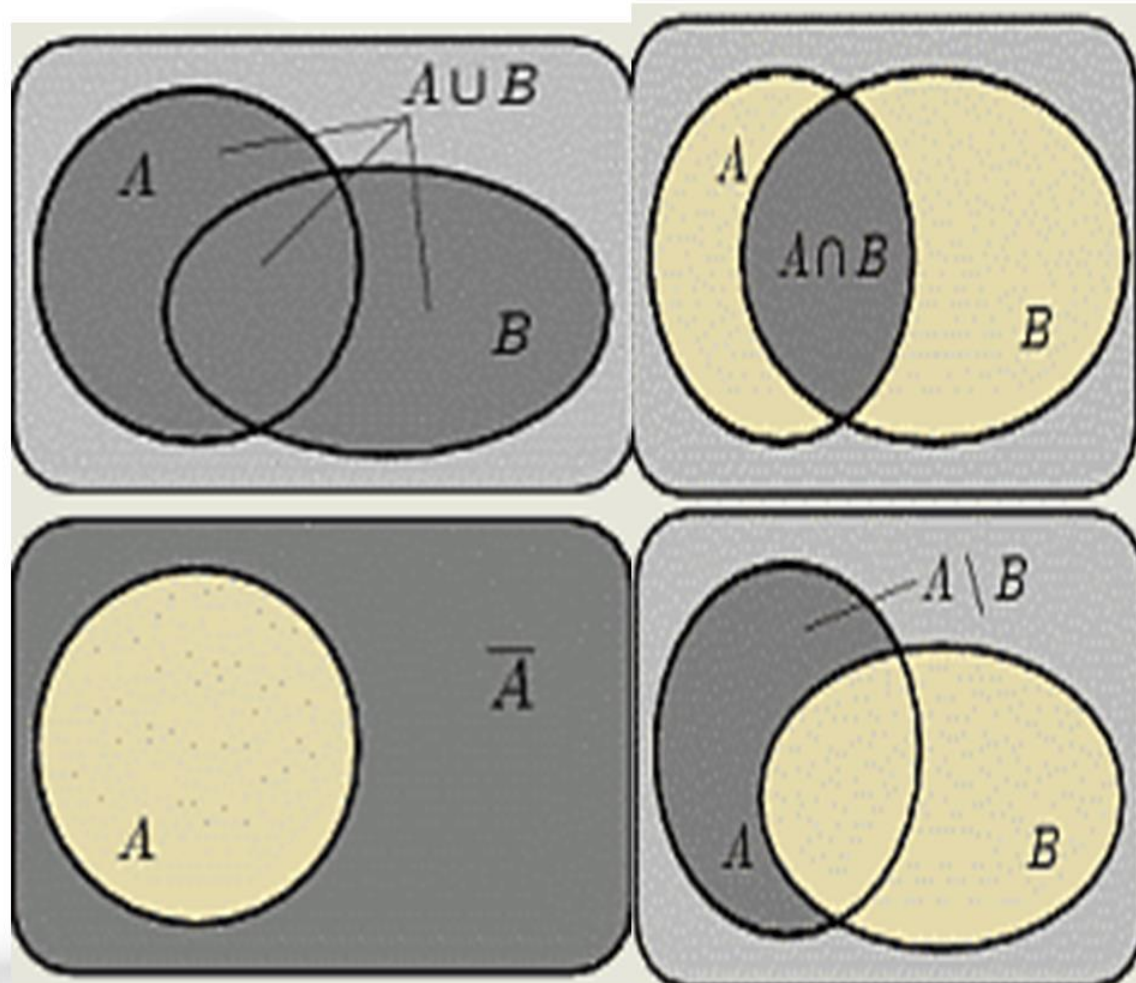
вероятности: $P=m/n$, где n - число всех равновозможных элементарных исходов, m - число элементарных исходов, благоприятствующих осуществлению события.

Число различных перестановок из букв А, К, К, Л, У равно $n=5!1!2!1!1!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot1\cdot2=60$, из них только одна соответствует слову "кукла" ($m=1$), поэтому по классическому определению вероятности вероятность того, что ребенок соберет из кубиков слово "кукла" равна $P=1/60$.

Ответ: 1/60

Операции над событиями

- 1. **Объединением** событий и называется событие, состоящее в том, что произошло либо, либо, либо оба события одновременно. На языке теории множеств есть множество, содержащее как элементарные исходы из множества, так и элементарные исходы из множества.
- 2. **Пересечением** событий и называется событие, состоящее в том, что произошли оба события и одновременно. На языке теории множеств есть множество, содержащее элементарные исходы, входящие в пересечение множеств и.
- 3. **Противоположным** (или **дополнительным**) к событию называется событие, состоящее в том, что событие в результате эксперимента не произошло. Т.е. множество состоит из элементарных исходов, не входящих в.
- 4. **Дополнением** события до называется событие, состоящее в том, что произошло событие, но не произошло. Т.е. множество содержит элементарные исходы, входящие в множество, но не входящие в.



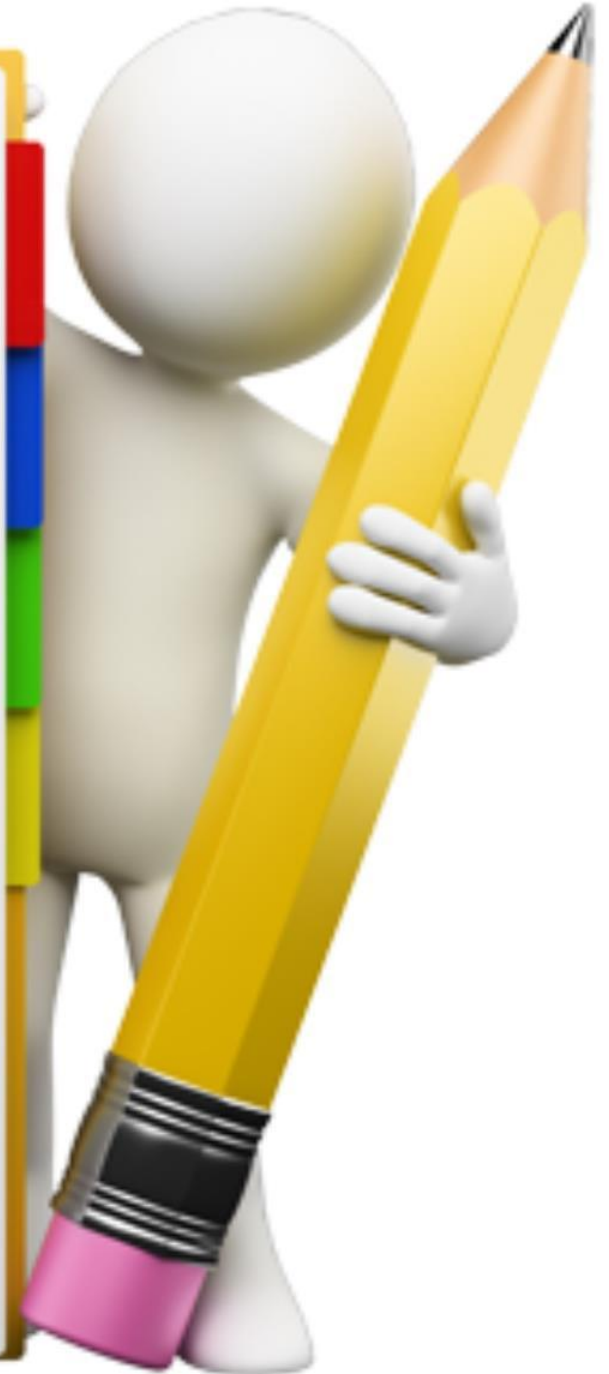
Вероятность суммы событий

- Теорема сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

- Теорема сложения вероятностей совместных событий:

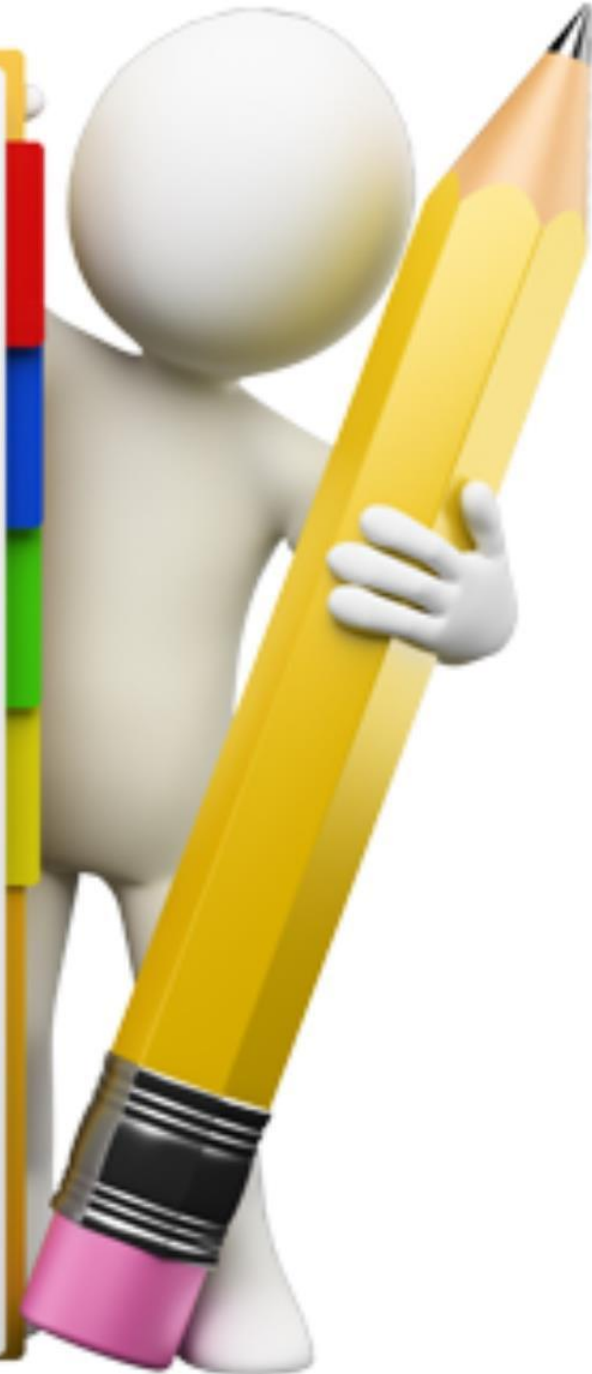
$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$



**Теорема умножения
вероятностей для
независимых событий**

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(A_1A_2\dots A_n) = P(A_1)P(A_2)\dots P(A_n)$$

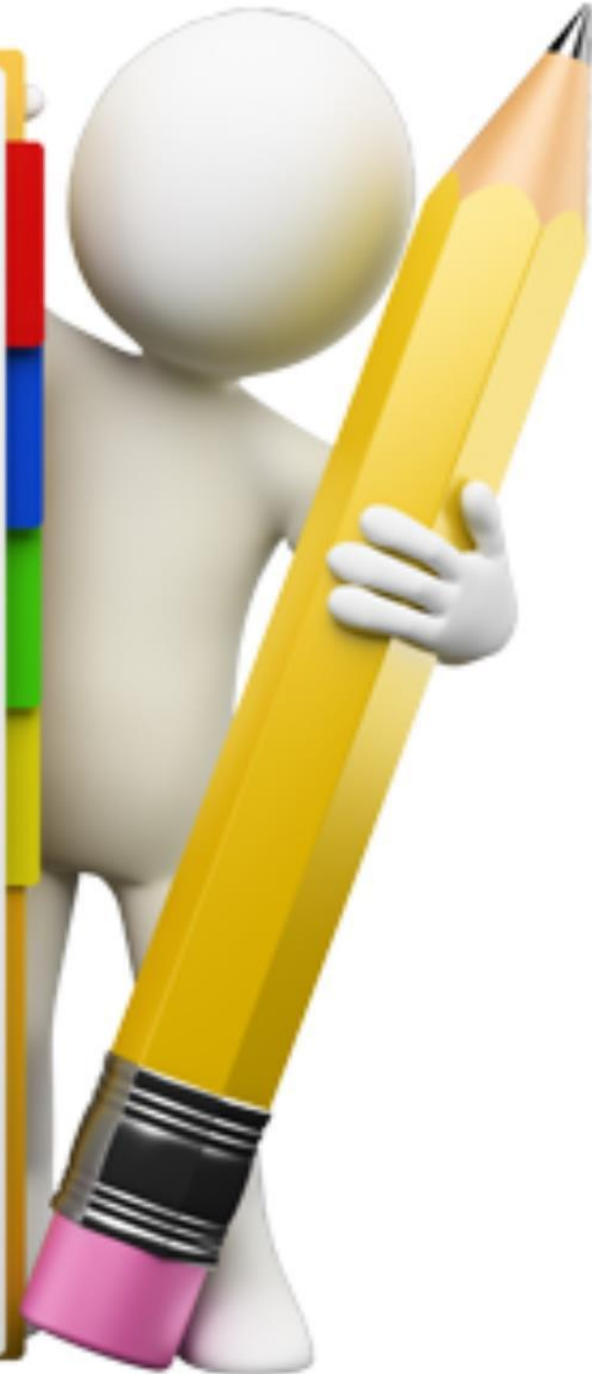


Теорема умножения вероятностей для зависимых событий

$$P(AB) = P(A)P(B / A)$$

Где - условная вероятность появления события В, при условии что появилось событие А.

$$P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2) \dots P(A_n / A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$



Формула Пуассона

$$M(X) = D(X) = \lambda$$

$$P_{m,n} \approx \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} = P_m(\lambda)$$

где

p - вероятность наступления события A

При условии $p \rightarrow 0$ $n \rightarrow \infty$

$\lambda = np$ ($\lambda \leq 10$)



Формула Бернулли

$$P_{m,n} = C_n^m p^m q^{n-m}$$

где

p - вероятность наступления события A

m - число наступлений события A

n - число испытаний

$q = 1 - p$



Задача №3

Из n аккумуляторов за год хранения k выходит из строя. Наудачу выбирают m аккумуляторов. Определить вероятность того, что среди них l исправных.

$$n=100, k=7, m=5, l=3.$$

Решение: Имеем схему Бернулли с параметрами $p=7/100=0,07$ (вероятность того, что аккумулятор выйдет из строя), $n=5$ (число испытаний), $k=5-3=2$ (число «успехов», неисправных аккумуляторов).

Будем использовать формулу Бернулли (вероятность того, что в n испытаниях событие произойдет k раз).
 $P_n(k) = C_{kn} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$.
Получаем

$$P_5(2) = C_{25} \cdot 0,07^2 \cdot (1-0,07)^{5-2} = 5! / (3! \cdot 2!) \cdot 0,07^2 \cdot 0,93^3 = 0,0394.$$

Ответ: 0,0394

Локальная формула Лапласа

$$P_x(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

-вероятность появления события ровно раз при независимых испытаниях, p - вероятность появления события при одном испытании, $q=1-p$



Задача №4

Вычислительное устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность отказа каждого элемента за смену равна p . Найти вероятность, что за смену откажут m элементов. $p=0,024, m=6$.

Решение: Используем локальную теорему Лапласа:

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi\left(\frac{k - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

Здесь $n=1000, k=6, p=0,024, q=1-p=0,976$, значения функции φ берутся из таблицы.

Подставляем:

$$\begin{aligned} P_{1000}(6) &= \frac{1}{\sqrt{1000 \cdot 0,024 \cdot 0,976}} \varphi\left(\frac{6 - 1000 \cdot 0,024}{\sqrt{1000 \cdot 0,024 \cdot 0,976}}\right) = \\ &= 0,21 \cdot \varphi(-3,72) = 0,21 \cdot \varphi(3,72) = 0,21 \cdot 0,004 = 0,00084. \end{aligned}$$

Ответ: 0,00084