Подготовка к дифференцирован-ному зачёту

Общая информация

Работа рассчитана на 90 минут.

Оформляется на двойном тетрадном листе в клетку ручкой, пастой синего цвета.

Титульный лист оформляется:

Нижегородский авиационный

Технический колледж

(10 клеточек вниз)

Дифференцированный зачёт

по дисциплине «Математика»

студента группы ПС-203

ФИО (в родительном падеже)

Вариант №

В самой последней клетке листа 2020-2021 уч.год

Задание 1. Решить систему уравнений. Указать метод, которым решение произведено

$$\begin{cases} x + y - z = 1, \\ 8x + 3y - 6z = 2, \\ -4x - y + 3z = -3 \end{cases}$$

I. Метод обратной матрицы

2. Метод обратной матрицы.

Используя правило умножения матриц, запишем систему в матричном виде $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Если $\det(A) \neq 0$, то существует обратная матрица для A и единственное решение системы находится по формуле

$$X = A^{-1}B.$$

Найдем определитель матрицы A разложением по первой строке:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 3 - (-1) \cdot (-6) - (8 \cdot 3 - (-4) \cdot (-6)) - (8 \cdot (-1) - (-4) \cdot 3) = -1,$$

то есть $\det(A) \neq 0$.

Вычислим алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = -(24 - 24) = 0,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 12 = 4,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 1) = -2,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = -(-1 + 4) = -3,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 + 3 = -3,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -(-6 + 8) = -2,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 8 = -5.$$

Зная алгебраические дополнения A_{ij}, можем записать союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 4 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\dfrac{1}{\det(A)} = -1$, вычислим обратную матрицу по правилу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*,$$

таким образом,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдем решение системы

$$X = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 4 + (-9) \\ 0 + 2 + (-6) \\ -4 + 6 + (-15) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -4 \\ -13 \end{pmatrix}.$$

Отсюда получаем, что

$$x_1 = -8,\ x_2 = -4,\ x_3 = -13.$$

Метод Крамера

3. Метод определителей (формулы Крамера).

Обозначим Δ определитель матрицы A, то есть

$$\Delta = \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \\ -4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -1.$$

Составим определитель Δ_1, который получается из определителя Δ заменой первого столбца на столбец свободных членов системы, и найдем его

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -6 \\ -3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 + 12 - 7 = 8.$$

Вычислим определитель Δ_2, который получается из определителя Δ заменой второго столбца на столбец свободных членов системы

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 2 & -6 \\ -4 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & -6 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= -12 + 16 = 4.$$

Вычислим определитель Δ_3, который получается из определителя Δ заменой третьего столбца на столбец свободных членов системы

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 3 & 2 \\ -4 & -1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= -7 + 16 + 4 = 13.$$

Найдем значения $x_1,\ x_2,\ x_3$ по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{8}{-1} = -8,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4}{-1} = -4,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{13}{-1} = -13.$$

Задание 2. Найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке

$$y = (x+7)e^{x+8}$$

$$[-9;-7]$$

1. Найдем производную функции:

$$y' = ((x+7)e^{x+8})' = (x+7)'e^{x+8} + (x+7)\left(e^{x+8}\right)' =$$

$$= e^{x+8} + (x+7)e^{x+8} = (1+x+7)e^{x+8} = (x+8)e^{x+8}.$$

2. Найдем значения x, при которых производная функции равна нулю:

$$(x+8)e^{x+8} = 0,\ x+8=0,\ x=-8.$$

3. Это значение $x=-8$ принадлежит промежутку $[-9;\,-7]$.

4. Вычислим значения функции в найденной точке и на концах отрезка:

$$y(-9) = (-9+7)e^{-9+8} = -2e^{-1} \approx -\frac{20}{27},$$

$$y(-7) = (-7+7)e^{-7+8} = 0,$$

$$y(-8) = (-8+7)e^{-8+8} = -1.$$

5. Выберем из найденных в п. 4 значений наибольшее и наименьшее:

$$y_{\text{наиб}} = y(-7) = 0,\ y_{\text{наим}} = y(-8) = -1.$$

Задание 3. Вычислить площадь плоской фигуры ограниченной линиями

$$y = x^2 + 4x,$$

$$y = x + 4$$

1 $y = x^2 + 4x$

парабола

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{4}{2} = -2$

$y(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$

$x^2 + 4x = 0$

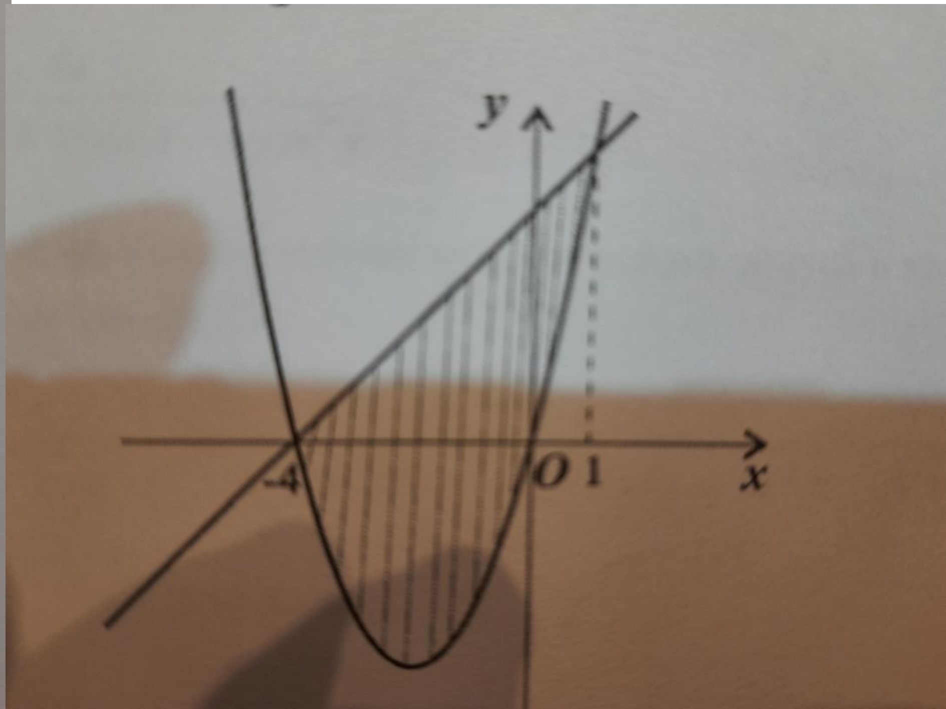
$x(x+4) = 0$

$x = 0 \quad x = -4$

2 $y = x + 4$

прямая

x	0	-4
y	4	0



Найдем точки пересечения заданных кривых. Для этого решим уравнение $x^2 + 4x = x + 4$, $x^2 + 3x - 4 = 0$. Откуда $x_1 = 1$, $x_2 = -4$.

Тогда получаем

$$S = \int_{-4}^{1} \left[(x+4) - (x^2 + 4x)\right] dx = \int_{-4}^{1} (-x^2 - 3x + 4)\, dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + 4x\right)\Big|_{-4}^{1} = 20\frac{5}{6}.$$

Задание 4 Даны комплексные числа

$$a1 = 2+5i, a2 = 5-3i, b1 = -2\sqrt{2}, b2 = 1-i$$

Найти $a1+a2, a1-a2, a1\cdot a2, \dfrac{a1}{a2}, \left(\dfrac{b1}{b2}\right)^{12}, \sqrt[3]{\dfrac{b1}{b2}}$

1) $a_1 + a_2 = (2+5i) + (5-3i) = (2+5) + i(5-3) = 7 + 2i;$

2) $a_1 - a_2 = (2+5i) - (5-3i) = (2-5) + i(5+3) = -3 + 8i;$

3) считая $i^2 = -1$, вычислим $a_1 \cdot a_2$

$$a_1 \cdot a_2 = (2+5i)\cdot(5-3i) = 2\cdot 5 - 2\cdot 3i + 5i\cdot 5 - 5\cdot 3i^2 =$$

$$= 10 - 6i + 25i - 15i^2 = (10+15) + i(-6+25) = 25 + i19;$$

4) вычислим $\dfrac{a_1}{a_2}$, домножая числитель и знаменатель на комплексно сопряженное число к знаменателю $\bar{a}_2 = 5 + 3i$, получим

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_1\cdot\bar{a}_2}{a_2\cdot\bar{a}_2} = \frac{(2+5i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)} = \frac{2\cdot 5 + 2\cdot 3i + 5\cdot 5i + 5\cdot 3i^2}{5^2 - 3^2 i^2} =$$

$$= \frac{(10-15) + i(6+25)}{25+9} = \frac{-5+i31}{34} = -\frac{5}{34} + i\frac{31}{34};$$

5) сначала найдем $\frac{b_1}{b_2}$

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{b_1 \cdot \bar{b}_2}{b_2 \cdot \bar{b}_2} = \frac{-2\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-2\sqrt{2}(1+i)}{1^2 - i^2} = \frac{-2\sqrt{2}(1+i)}{1+1} =$$

$$= \frac{-2\sqrt{2}(1+i)}{2} = -\sqrt{2}(1+i) = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}.$$

Представим комплексное число $z = \frac{b_1}{b_2} = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$ в тригонометрической форме $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где φ — аргумент z. Для $z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$: $x = \mathrm{Re} z = -\sqrt{2}$, $y = \mathrm{Im} z = -\sqrt{2}$,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{2+2} = \sqrt{4} = 2,$$

аргумент φ найдем из системы

$$\begin{cases} \cos\varphi = \frac{x}{|z|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases},$$

решением которой является $\varphi = \dfrac{5\pi}{4}$. Таким образом, получили тригонометрическую форму

$$z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right).$$

По первой формуле Муавра

$$z^n = |z|^n\left(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\right),$$

где n — натуральное число, найдем $\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right)^{12}$

$$\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{12} = z^{12} = 2^{12}\left(\cos\left(12\cdot\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(12\cdot\frac{5\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 2^{12}\left(\cos(3\cdot 5\pi) + i\sin(3\cdot 5\pi)\right) = 2^{12}\left(\cos(15\pi) + i\sin(15\pi)\right) =$$

$$= 2^{12}\left(\cos(\pi + 2\cdot 7\pi) + i\sin(\pi + 2\cdot 7\pi)\right) = 2^{12}\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) =$$

$$= 2^{12}(-1 + i\cdot 0) = -2^{12} = -4096,$$

то есть

$$\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{12} = -4096;$$

Действия в показательной форме

$$\left(\frac{b_1}{b_2}\right)^{12} = 2^{12} \cdot e^{i\,12 \cdot \frac{5\pi}{4}} = -4096\, e^{15\pi i}$$

$$\left(z^n = r\, e^{in\varphi} \right)$$

$$\sqrt[3]{\frac{b_1}{b_2}} = \sqrt[3]{2}\, e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right)}$$

$k=0 \quad w_0 = \sqrt[3]{2}\, e^{i \cdot \frac{5\pi}{12}}$

$k=1 \quad w_1 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi}{3}\right)} =$

$= \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{13\pi}{12}}$

$k=2 \quad w_2 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\left(\frac{\frac{5\pi}{4} + 4\pi}{3}\right)} =$

$= \sqrt[3]{2}\, e^{\frac{21\pi}{12} i}$

б) в предыдущем пункте нашли тригонометрическую форму комплексного числа $\frac{b_1}{b_2} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$. Используя вторую формулу Муавра

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right),$$

где n — натуральное число, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, вычислим

$$w_k = \sqrt[3]{\frac{b_1}{b_2}} = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{5\pi}{4} + 2\pi k}{3}\right)\right),\ k = 0, 1, 2,$$

или

$$w_k = \sqrt[3]{\frac{b_1}{b_2}} = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi + 8\pi k}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi + 8\pi k}{12}\right)\right),\ k = 0, 1, 2.$$

Таким образом, различными корнями 3-й степени являются следующие три числа:

$$k = 0\colon\ w_0 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi + 8\pi\cdot 0}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi + 8\pi\cdot 0}{12}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right),$$

$$k = 1\colon\ w_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi + 8\pi\cdot 1}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi + 8\pi\cdot 1}{12}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{13\pi}{12}\right)\right),$$

$$k = 2\colon\ w_2 = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi + 8\pi\cdot 2}{12}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi + 8\pi\cdot 2}{12}\right)\right) =$$

$$= \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{21\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{21\pi}{12}\right)\right) = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right).$$

Задание 5 По заданному закону распределения случайной величины X, найти M(X), D(x), среднее квадратическое отклонение

Xi	-1	0	2	3
pi	0,1	0,3	?	0,4

$$\sum_{i=1}^{4} p_i = 1$$

P3=1-0,1-0,3-0,4=0,2

Xi	-1	0	2	3
pi	0,1	0,3	0,2	0,4

Xi	-1	0	2	3
pi	0,1	0,3	0,2	0,4

По определению

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = (-1) \cdot 0.1 + 0 \cdot 0.3 + 2 \cdot 0.2 + 3 \cdot 0.4 = 1.5,$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i = (-1)^2 \cdot 0.1 + 0^2 \cdot 0.3 + 2^2 \cdot 0.2 + 3^2 \cdot 0.4 = 4.5,$$

откуда

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 4.5 - (1.5)^2 = 4.5 - 2.25 = 1.75.$$

Среднее квадратическое отклонение $\sigma(X) = \sqrt{D(x)} = 1{,}32$

Задание 6. Вычислить
а) Производную функции

$$y = \frac{x^2 \sin x}{e^x \cos x},$$

$$y = \left(2x^3 + 5\right)^4$$

$$a)\ \ y' = \left(\frac{x^2 \sin x}{e^x + \cos x}\right)' = \frac{(x^2 \sin x)'(e^x + \cos x) - x^2 \sin x (e^x + \cos x)'}{(e^x + \cos x)^2} =$$

$$= \frac{(2x \sin x + x^2 \cos x)(e^x + \cos x) - x^2 \sin x (e^x - \sin x)}{(e^x + \cos x)^2}.$$

$$b)\ \ y' = ((2x^3 + 5)^4)' = 4(2x^3 + 5)^3 (2x^3 + 5)' = 24x^2 (2x^3 + 5)^3.$$

б) интеграл $\int x^2\sqrt{x^3+5}dx,$ __ $\int (2x+5)\cos 3x dx$

Положим $t = x^3 + 5$, тогда $dt = 3x^2\,dx$, откуда $x^2\,dx = \frac{1}{3}\,dt$. После подстановки в исходный интеграл получаем

$$\int x^2\sqrt{x^3+5}\,dx = \frac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt = \frac{1}{3}\int t^{\frac{1}{2}}\,dt = \frac{1}{3}\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{9}(x^3+5)\sqrt{x^3+5} + C.$$

b) $\int (2x+5)\cos 3x\,dx.$

Для вычисления интеграла воспользуемся формулой интегрирования по частям:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Положим в этой формуле
$u = 2x+5$, $dv = \sin 3x\,dx$, тогда $du = 2\,dx$, $v = \int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x$.
Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\int (2x+5)\cos 3x\,dx = -\frac{1}{3}(2x+5)\cos 3x + \frac{2}{3}\int \cos 3x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}(2x+5)\cos 3x + \frac{2}{9}\sin 3x + C.$$

Как будет выставляться оценка

- Задание 1 – 4 балла
- Задание 2 - 3 балла
- Задание 3 – 5 баллов
- Задание 4 – 4 балла
- Задание 5 – 4 балла
- Задание 6 – 5 баллов

- Оценка «2» набрано менее 12 баллов
- Оценка «3» - менее 17 баллов
- Оценка «4» - менее 22 балла
- Оценка «5» - 22 и более