А 16. Кодирование чисел. Системы счисления.

Что нужно знать:

- принципы кодирования чисел в позиционных системах счисления
- чтобы перевести число, скажем, 12345_N, из системы счисления с основанием в десятичную систему, нужно умножить значение каждой цифры на в степени, равной ее разряду:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \leftarrow \text{разряды} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5_N \end{array} = 1 \cdot N^4 + 2 \cdot N^3 + 3 \cdot N^2 + 4 \cdot N^1 + 5 \cdot N^0$$

$N^0 = 1$

- последняя цифра записи числа в системе счисления с основанием – это остаток от деления этого числа на N
- две последние цифры – это остаток от деления на N^2 , и т.д.
- число 10^N записывается как единица и N нулей:

$$10^N = 1\underbrace{0\ldots0}_{N}$$

Что нужно знать:

- число 10^N-1 записывается как *N* девяток: $10^N - 1 = \underbrace{9\ldots9}_N$
- число 10^N-10^M = $10^M \cdot (10^{N-M} - 1)$ записывается как *N-M* девяток, за которыми стоят *M* нулей: $10^N - 10^M = \underbrace{9\ldots9}_{N-M}\underbrace{0\ldots0}_M$
- число 2^N в двоичной системе записывается как единица и N нулей: $2^N = 1\underbrace{0\ldots0}_N$
- число 2^N-1 в двоичной системе записывается как *N* единиц: $2^N - 1 = \underbrace{1\ldots1}_N{}_2$
- число 2^N–2^K при *K* < *N* в двоичной системе записывается как *N*–*K* единиц и *K* нулей: $2^N - 2^K = \underbrace{1\ldots1}_{N-K}\underbrace{0\ldots0}_K{}_2$

Что нужно знать:

- поскольку $2^N + 2^N = 2 \cdot 2^N = 2^{N+1}$, получаем $2^N = 2^{N+1} - 2^N$, откуда следует, что $-2^N = -2^{N+1} + 2^N$
- число 3^N записывается в троичной системе как единица и N нулей: $3^N = {1\underbrace{0\ldots0}_{N}}_3$
- число 3^N-1 записывается в троичной системе как *N* двоек: $3^N - 1 = {\underbrace{2\ldots2}_{N}}_3$
- число $3^N – 3^M = 3^M \cdot (3^{N-M} – 1)$ записывается в троичной системе как *N-M* двоек, за которыми стоят *M* нулей: $3^N - 3^M = {\underbrace{2\ldots2}_{N-M}\underbrace{0\ldots0}_{M}}_3$

Что нужно знать:

- можно сделать аналогичные выводы для любой системы счисления с основанием *a*:
  - число a^N в системе счисления с основанием *a* записывается как единица и *N* нулей:
    $$a^N = 1\underbrace{0 \ldots 0}_{N}{}_a$$
  - число a^N-1 в системе счисления с основанием *a* записывается как *N* старших цифр этой системы счисления, то есть, цифр (*a*-1):
    $$a^N - 1 = \underbrace{(a-1)(a-1)\ldots(a-1)}_{N}{}_a$$
  - число $a^N - a^M = a^M \cdot (a^{N\text{-}M} - 1)$ записывается в системе счисления с основанием *a* как *N*-*M* старших цифр этой системы счисления, за
    $$a^N - a^M = \underbrace{(a-1)\ldots(a-1)}_{N-M}\underbrace{0\ldots0}_{M}{}_a$$

Пример 1

Значение арифметического выражения: $9^9 – 3^9 + 9^{19} – 19$ записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

- **Решение:**
- Приведём все числа к степеням тройки, учитывая, что $19=27-8=3^3-(2\cdot3^1+2\cdot3^0)$:
- $9^9 – 3^9 + 9^{19} – 19= (3^2)^9 – 3^9 + (3^2)^{19} – (3^3 – (2\cdot3^1 + 2\cdot3^0))$ $= 3^{18} – 3^9 + 3^{38} – 3^3 + 2\cdot3^1 + 2\cdot3^0$
- Перепишем выражение, располагая степени тройки в порядке убывания: $3^{18} – 3^9 + 3^{38} – 3^3 + 2\cdot3^1 + 2\cdot3^0 = 3^{38} + 3^{18} – 3^9 – 3^3 + 2\cdot3^1 + 2\cdot3^0$

Пример 1

- Сначала рассмотрим часть выражения, в которой имеется два расположенных подряд «минуса»: $3^{18} - 3^{9} - 3^{3}$:
  - найдём разность двух крайних чисел: $3^{18} – 3^{3}$, в её троичной записи 18 – 3=15 «двоек» и 3 «нуля»;
  - вычтем из этого числа значение 3^{9}: одна из «двоек» (на 10-й справа позиции) уменьшится на 1, остальные цифры не изменятся;
  - итак, троичная запись разности $3^{18} – 3^{9} – 3^{3}$ содержит 15 – 1=14 «двоек», одну «единицу» и 3 «нуля»
- Прибавим к полученному значению сумму: $2·3^{1} + 2·3^{0} = 22_{3}$. В троичной записи результата два крайних справа нуля заменяются на «двойки», остаётся один ноль. Общее количество «двоек»: 14+2=16.

Пример 1

- Прибавление значения 3^{38} не изменит количества «двоек» в троичном числе: слева от имеющихся цифр появятся ещё 38 – 18=20 «нулей» и одна «единица» – на 39-й справа позиции.
- Итак, результат, записанный в троичной системе, содержит 39 цифр. Его состав: 16 «двоек», 2 «единицы» (их позиции: 39-я и 10-я справа) и 21 «нуль» (39-16-2=21).

Ответ: 16.

Пример 2

Значение арифметического выражения:

$9^8 + 3^5 - 9$

записали в системе счисления с основанием 3. Сколько цифр «2» содержится в этой записи?

Пример 2

Решение:

- приведём все слагаемые к виду 3^N и расставим в порядке убывания степеней:
- $\mathbf{9^8 + 3^5 - 9 = 3^{16} + 3^5 - 3^2}$
- первое слагаемое, 3^{16}, даёт в троичной записи одну единицу – она нас не интересует
- пара $\mathbf{3^5 - 3^2}$ даёт 5 – 2 = 3 двойки

Ответ: 3.

Пример 3

Сколько значащих нулей в двоичной записи числа

$4^{512} + 8^{512} – 2^{128} – 250$

Решение:

Общая идея: количество значащих нулей равно количеству всех знаков в двоичной записи числа (его длине!) минус количество единиц

- приведём все числа к степеням двойки, учитывая, что $250 = 256 – 4 – 2 = 2^8 – 2^2 – 2^1$:

  $4^{512} + 8^{512} – 2^{128} – 250 = (2^2)^{512} + (2^3)^{512} – 2^{128} – 2^8 + 2^2 + 2^1 = 2^{1536} + 2^{1024} – 2^{128} – 2^8 + 2^2 + 2^1$

Пример 3

- старшая степень двойки – 2^{1536}, двоичная запись этого числа представляет собой единицу и 1536 нулей, то есть, состоит из 1537 знаков; таким образом, остаётся найти количество единиц
- вспомним, число $2^N–2^K$ при $K < N$ записывается как $N–K$ единиц и K нулей: $2^N - 2^K = \underbrace{1\ldots1}_{N-K}\underbrace{0\ldots0}_{K}$
- для того чтобы использовать это свойство, нам нужно представить заданное выражение в виде пар вида $2^N–2^K$, причём в этой цепочке степени двойки нужно выстроить по убыванию
- в нашем случае вы выражении

$$2^{1536} + 2^{1024} – 2^{128} – 2^8 + 2^2 + 2^1$$

стоит два знака «минус» подряд, это не позволяет сразу использовать формулу

Пример 3

- используем теперь равенство , так что $-2^{128} = -2^{129} + 2^{128}$; получаем $2^{1536} + 2^{1024} - 2^{129} + 2^{128} - 2^{8} + 2^{2} + 2^{1}$
- здесь две пары $2^{N}-2^{K}$, а остальные слагаемые дают по одной единице
- общее число единиц равно 1 + (1024 – 129) + (128 – 8) + 1 + 1 = 1018
- таким образом, количество значащих нулей равно 1537 – 1018 = 519

ответ: 519.

Пример 4

Сколько единиц в двоичной записи числа

$4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122$

- приведём все числа к степеням двойки, учитывая, что $122 = 128 - 4 - 2 = 2^7 - 2^2 - 2^1$:
  $4^{2015} + 8^{405} - 2^{150} - 122 = (2^2)^{2015} + (2^3)^{405} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1 = 2^{4030} + 2^{1215} - 2^{150} - 2^7 + 2^2 + 2^1$
- вспомним, число $2^N–2^K$ при $K < N$ записывается как $N–K$ единиц и K нулей:

$$2^N - 2^K = \underbrace{1\ldots1}_{N-K}\underbrace{0\ldots0}_{K}$$

- для того чтобы использовать это свойство, нам нужно представить заданное выражение в виде пар вида $2^N–2^K$, причём в этой цепочке степени двойки нужно выстроить по убыванию

Пример 4

- в нашем случае вы выражении

  $2^{4030} + 2^{1215} – 2^{150} – 2^{7} + 2^{2} + 2^{1}$

  стоит два знака «минус» подряд, это не позволяет сразу использовать формулу
- используем теперь равенство , так что $– 2^{150} = – 2^{151} + 2^{150}$; получаем $2^{4030} + 2^{1215} – 2^{151} + 2^{150} – 2^{7} + 2^{2} + 2^{1}$
- здесь две пары $2^{N}–2^{K}$, а остальные слагаемые дают по одной единице
- общее число единиц равно 1 + (1215 – 151) + (150 – 7) + 1 + 1 = 1210

  ответ: 1210.

Пример 5

Решите уравнение $121_x + 1 = 101_7$

Ответ запишите в троичной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

Решение:

- переведём все числа в десятичную систему счисления:

  $121_x = 1 \cdot x^2 + 2 \cdot x + 1, \quad 101_7 = 1 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7^1 + 1 \cdot 7^0 = 50$
- собирая всё в одно уравнение получаем

  $x^2 + 2x + 1 + 1 = 50 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 48 = 0$
- это уравнение имеет два решения, 6 и -8; основание системы счисления – натуральное число, поэтому ответ – 6
- переводим ответ в троичную систему: $6 = 2 \cdot 3^1 = 20_3$.

ответ: 20.

Пример 6

Сколько единиц в двоичной записи числа
$4^{2014} + 2^{2015} - 8$

Решение:

- приведём все числа к степеням двойки:
  $4^{2014} + 2^{2015} - 8 = (2^2)^{2014} + 2^{2015} - 2^3 = 2^{4028} + 2^{2015} - 2^3$
- вспомним, что число 2^N-1 в двоичной системе записывается как *N* единиц: $2^N - 1 = \underbrace{1\ldots1}_{N}$,
  а число $2^N - 2^K$ при $K < N$ записывается как $N-K$ единиц и *K* нулей: $2^N - 2^K = \underbrace{1\ldots1}_{N-K}\underbrace{0\ldots0}_{K}$
- согласно п. 2, число $2^{2015} - 2^3$ запишется как 2012 единиц и 3 нуля
- прибавление 2^{4028} даст ещё одну единицу, всего получается 2012 + 1 = 2013 единиц

ответ: 2013.

Пример 7

Решите уравнение $60_8 + x = 120_7$. Ответ запишите в шестеричной системе счисления. Основание системы счисления указывать не нужно.

- удобнее всего перевести все числа в десятичную систему, решить уравнение и результат перевести в шестеричную систему
  $60_8 = 6 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 48, \quad 120_7 = 1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 = 63$
- получаем
- уравнение приобретает вид $48 + x = 63$, откуда получаем $x = 15$
- переводим 15 в шестеричную систему счисления: $15 = 2 \cdot 6^1 + 3 \cdot 6^0 = 23_6$
- ответ: 23.

Пример 8

Запись десятичного числа в системах счисления с основаниями 3 и 5 в обоих случаях имеет последней цифрой 0. Какое минимальное натуральное десятичное число удовлетворяет этому требованию?

Решение

- если запись числа в системе счисления с основанием N заканчивается на 0, то это число делится на N нацело
- поэтому в данной задаче требуется найти наименьшее натуральное число, которое делится одновременно на 3 и на 5, то есть, делится на 15

очевидно, что это число 15.

Пример 9

Запись числа 67_{10} в системе счисления с основанием N оканчивается на 1 и содержит 4 цифры. Укажите основание этой системы счисления N.

Решение:

- поскольку запись в системе счисления с основанием N заканчивается на 1, то остаток от деления числа 67 на N равен 1, то есть при некотором целом k имеем $k\cdot N+1=67 \;\Rightarrow\; k\cdot N=66$
- следовательно, основание N – это делитель числа 66
- с другой стороны, запись числа содержит 4 цифры, то есть $1000_N \le 67 < 10000_N \;\Rightarrow\; N^3 \le 67 < N^4$

Пример 9

- выпишем кубы и четвертые степени первых натуральных чисел, которые являются делителями числа 66:

$$2^3 = 8,\ \ 3^3 = 27,\ \ 6^3 = 216,...$$

$$2^4 = 16,\ \ 3^4 = 81,...$$

- видим, что из этого списка только для числа N = 3 выполняется условие $N^3 \le 67 < N^4$
- таким образом, верный ответ – 3.
- можно сделать проверку, переведя число 67 в троичную систему $\mathbf{67_{10} = 2111_3}$

Пример 10

Запись числа 381_{10} в системе счисления с основанием N оканчивается на 3 и содержит 3 цифры. Укажите наибольшее возможное основание этой системы счисления N.

Решение:

- поскольку запись в системе счисления с основанием N заканчивается на 3, то остаток от деления числа 381 на N равен 3, то есть при некотором целом имеем $k \cdot N + 3 = 381 \Rightarrow k \cdot N = 378$
- следовательно, основание N – это делитель числа $378 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7$

Пример 10

- с другой стороны, запись числа содержит 3 цифры, то есть $100_N \le 381 < 1000_N \quad \Rightarrow \quad N^2 \le 381 < N^3$
- неравенство $N^2 \le 381$ дает $|N| \le 19$ (так как $19^2 = 361,\ 20^2 = 400$)
- неравенство $381 < N^3$ дает $8 \le N$ (так как $7^3 = 343,\ 8^3 = 512$)
- таким образом, $8 \le N \le 19$; в этом диапазоне делителями числа 378 являются числа
  - 9, при $N = 9$ получаем запись числа $381_{10} = 463_9$
  - 14, при $N = 14$ получаем запись числа $381_{10} = 1D3_{14}$
  - 18, при $N = 18$ получаем запись числа $381_{10} = 133_{18}$
- наибольшим из приведенных чисел – это 18 (можно было сразу искать подбором наибольший делитель числа 378, начиная с 19 «вниз», на уменьшение)

таким образом, верный ответ – 18.

Пример 11

Укажите через запятую в порядке возрастания все десятичные числа, не превосходящие 25, запись которых в системе счисления с основанием четыре оканчивается на 11?

Общий подход:

- вспомним алгоритм перевода числа из десятичной системы в систему с основанием N , из него следует, что младшая цифра результата – это остаток от деления исходного числа на N , а две младших цифры – это остаток от деления на N^2 и т.д.
- в данном случае N=4 , остаток от деления числа на N^2=16 должен быть равен 11_4 = 5
- потому задача сводится к тому, чтобы определить все числа, которые меньше или равны 25 и дают остаток 5 при делении на 16

Пример 11

Решение (через десятичную систему):

- общий вид чисел, которые дают остаток 5 при делении на 16: $k \cdot 16 + 5$
- где k – целое неотрицательное число (0, 1, 2, …)
- среди всех таких чисел нужно выбрать те, что меньше или равны 25 («не превосходят 25»); их всего $k=0$ два: 5 (при $k=1$) и 21 (при)
- таким образом, верный ответ – 5, 21 .