

ГЛАВА I. МЕХАНИКА

§15. Механические колебания

О. И. Лубенченко

НИУ МЭИ

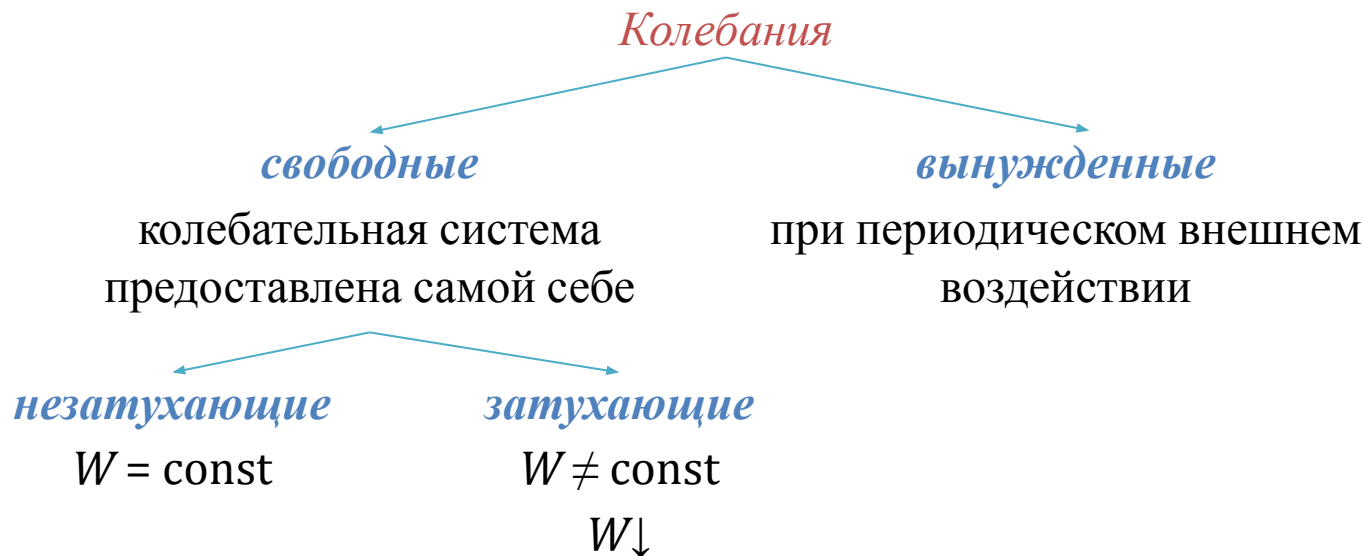
Кафедра физики им. В. А. Фабриканта

2020

I. Виды колебаний

Колебания — ФЯ — периодические изменения какой-либо ФВ во времени.

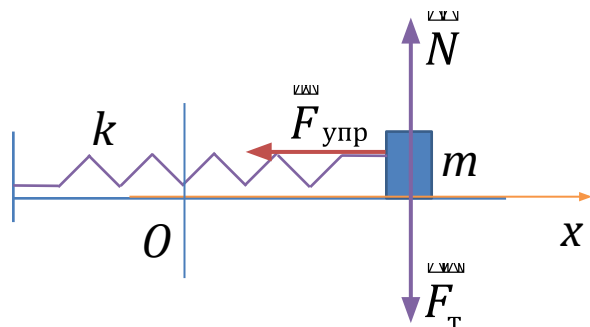
Колебательная система — система тел, в которой происходят колебания.



II. Свободные незатухающие (собственные) колебания

Пружинный маятник — груз (МТ) массы m , который может колебаться на пружине жёсткостью k .

Трения нет.



II закон Ньютона: $\vec{m}\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр}}$

$$x: ma_x = -kx \quad F_{\text{упр}x} = -kx$$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \quad m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\frac{k}{m} \equiv \omega_0^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

— дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний

Общее решение: $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$ — гармоническая функция

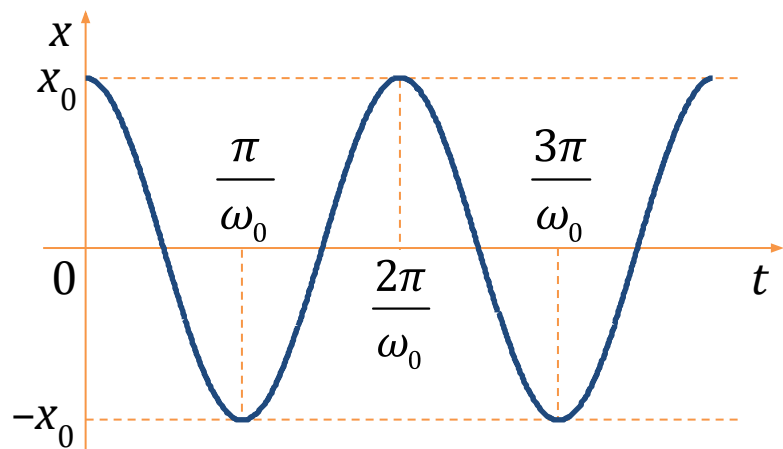
$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0) \quad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Подставим *начальные условия*: при $t = 0$ $x = x_0$, $v_x = 0$

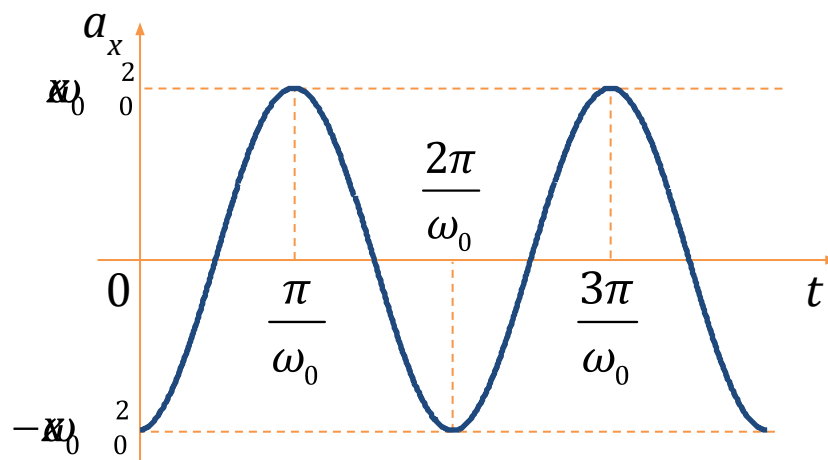
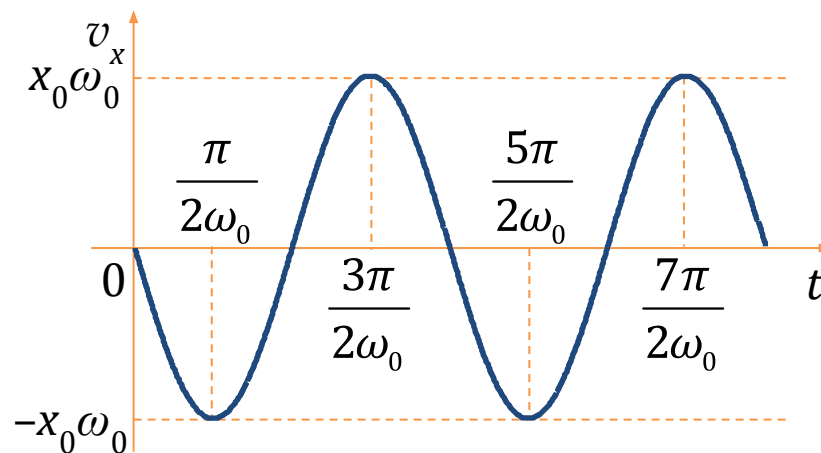
$$\begin{cases} x(0) = A \cos \varphi_0 \\ v_x(0) = -A\omega_0 \sin \varphi_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0 = A \cos \varphi_0 \\ 0 = -A\omega_0 \sin \varphi_0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ A = x_0 \end{cases}$$

Частное решение: $x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$

$$v_x(t) = -x_0 \omega_0 \sin \omega_0 t$$



$$a_x(t) = -\omega_0^2 x_0 \cos \omega_0 t$$



A — **амплитуда** колебаний — максимальное отклонение колеблющейся величины от равновесного значения.

ω_0 — ФВ — **циклическая частота**

$$[\omega_0] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$$

Выражение в скобках — **фаза** колебаний

φ — **начальная фаза**

Период T_0 — ФВ — время, за которое колебательная система совершает одно полное колебание.

Частота ν_0 — ФВ — число полных колебаний в единичный промежуток времени.

$$[\nu_0] = \text{Гц}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

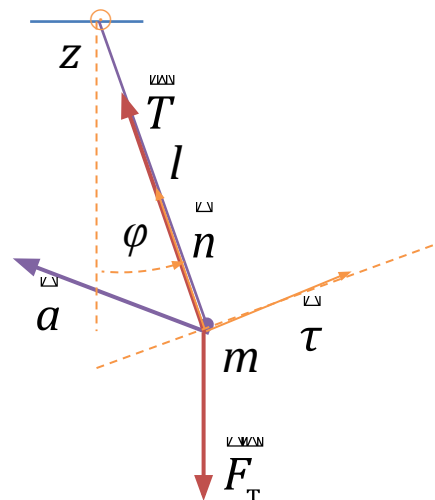
$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0}$$

Энергия колебаний (механическая энергия колебательной системы):

$$W = W_{\text{к}} + W_{\text{п}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}$$

ПРИМЕРЫ

1. Математический маятник



Математический маятник — МТ, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити в однородном гравитационном поле.

II закон Ньютона: $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_T + \mathbf{T}$

$$\varphi: ma_n = T - F_T \cos \varphi$$

$$\tau: ma_\tau = -F_T \sin \varphi$$

$$F_T = mg \text{ (закон всемирного тяготения)}$$

$$a_\tau l = z \quad \varepsilon_z = \frac{\phi^2}{dt^2}$$

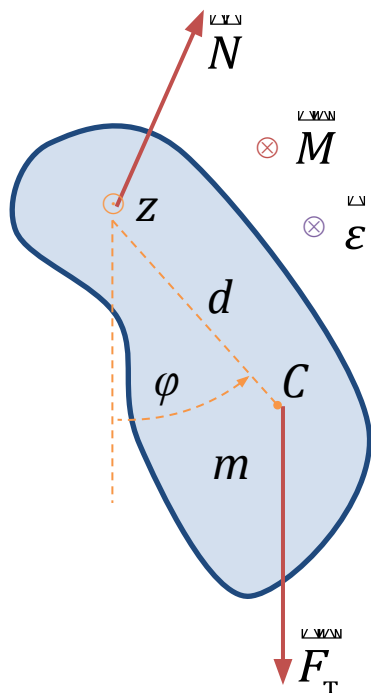
$$\phi \frac{\phi^2}{dt^2} l = -mg \sin \varphi \quad \longrightarrow \quad \frac{\phi^2}{dt^2} \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$$

При *малых углах* $\sin \varphi \approx \varphi \longrightarrow \frac{\phi^2}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \longrightarrow \mathbb{T}_0 = 2 \sqrt{\frac{l}{g}}$$

2. Физический маятник



Физический маятник — ТТ, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точки этого тела, не являющиеся его ЦМ, в однородном гравитационном поле.

ОУДВД: $\mathbf{L} = M_{F_T} + M_N$

$$z: I_z \ddot{\varphi} = -mgd \sin \varphi$$

$$F_T = mg \text{ (закон всемирного тяготения)} \quad \varepsilon_z = \frac{\ddot{\varphi}^2}{dt^2}$$

При *малых углах* $\sin \varphi \approx \varphi$ $\frac{\ddot{\varphi}^2}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \varphi = 0$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

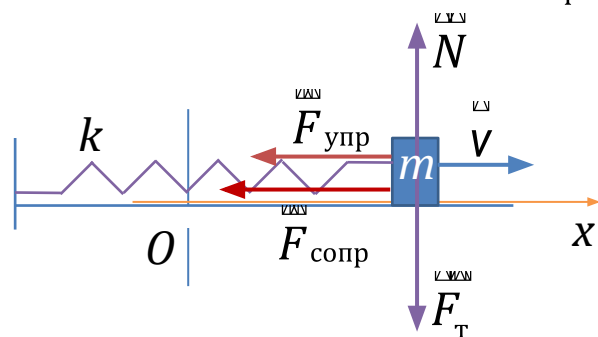
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\boxed{T_0 = 2 \sqrt{\frac{I}{mgd}}}$$

III. Свободные затухающие колебания

Рассмотрим пружинный маятник.

Сила вязкого трения $\vec{F}_{\text{сопр}} = -r\vec{v}$



II закон Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}}$

$$x: m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

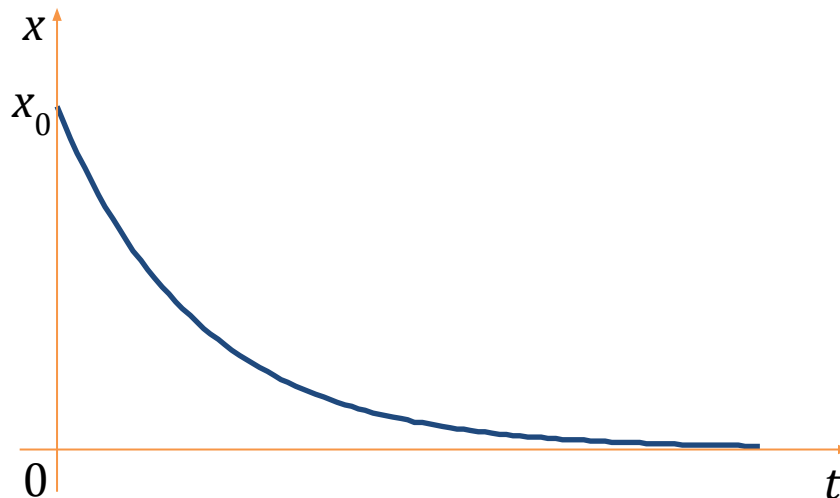
$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \boxed{\frac{r}{m} \equiv 2\beta} \quad \beta - \text{коэффициент затухания}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0} \quad - \text{дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний}$$

1. Сильное затухание ($\beta \geq \omega_0$)

Общее решение: $x(t) = A_1 e^{(-\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t} + A_2 e^{(-\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2})t}$

aperiodическое решение



$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$

2. Слабое затухание ($\beta < \omega_0$)

Общее решение: $x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$

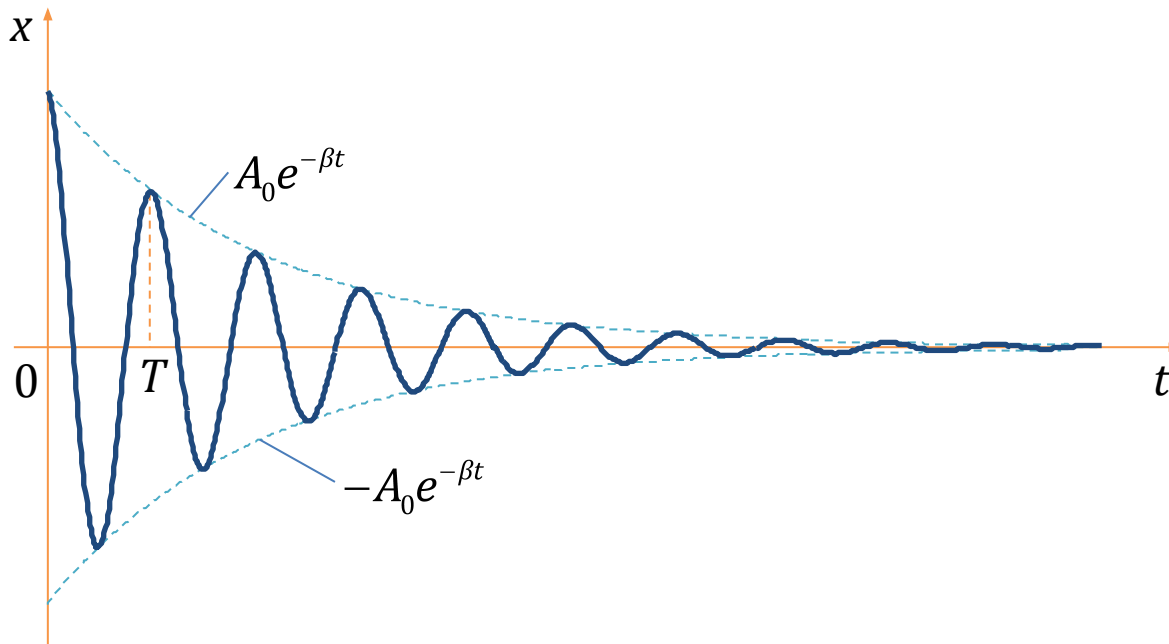
$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ — циклическая частота затухающих колебаний

Амплитуда затухающих колебаний $A(t) = A_0 e^{-\beta t}$

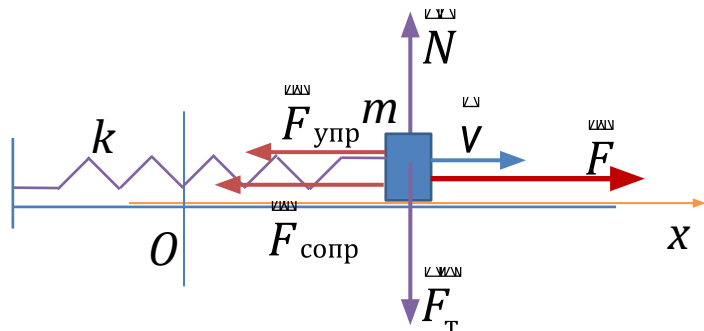
Период затухающих колебаний (условный период)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$



IV. Вынужденные колебания

Рассмотрим пружинный маятник, находящийся под воздействием, описываемым периодической силой $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos t$



II закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_T + \vec{N} + \vec{F}_{\text{упр}} + \vec{F}_{\text{сопр}} + \vec{F}$$

$$x \Omega m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \cos t$$

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad 2\beta \equiv \frac{r}{m} \quad \boxed{\frac{F_0}{m} \equiv f_0}$$

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos t}$$

– дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний

Общее решение (при $\beta < \omega_0$): $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

общее решение
ОДУ

$$x_1(t) = A_1 e^{-\beta t} \cos(\dots + \dots)$$

частное решение
НДУ

$$x_2(t) = A_2 \cos(t + \dots)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$x_1(t)$ быстро затухает \rightarrow циклическая частота вынужденных колебаний равна Ω

$$\frac{dx_2}{dt} = -\varphi_2 \Omega \sin(\Omega t + \varphi_0) \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\varphi_2 \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$$-\Omega^2 A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0) - 2\beta \Omega A_2 \sin(\Omega t + \varphi_0) + \Omega_0^2 A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0) = f_0 \cos \Omega t$$

$$f_0 \cos \Omega t = \Omega_0^2 A_2 \cos(\Omega t + \varphi_0) - 2\beta \Omega A_2 \sin(\Omega t + \varphi_0)$$

$$\begin{cases} -\Omega^2 A_2 \cos \varphi_0 + \Omega_0^2 A_2 \cos \varphi_0 = f_0 \cos \varphi_0 \\ -2\beta \Omega A_2 \sin \varphi_0 = f_0 \sin \varphi_0 \end{cases} \implies \boxed{\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{-2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$

$$A_2 = \frac{f_0 \cos \varphi_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{f_0}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_0}} = \frac{1}{\omega_0^2 - \Omega^2} \frac{f_0}{\sqrt{1 + \frac{4\beta^2 \Omega^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2}}} = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$$\boxed{A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$A_2(0) = \frac{f_0}{\omega_0^2} \quad A_2(\infty) \rightarrow 0 \quad \frac{dA_2}{d\Omega} = 0 \longrightarrow f_0 \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left[2(\omega_0^2 - 2\Omega)(-\Omega) + \beta^2 \right]}{\left[(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2 \right]^{3/2}} = 0$$

$$2\beta^2 \Omega - (\omega_0^2 - 2\Omega^2) = 0 \longrightarrow \Omega(2\beta^2 - \omega_0^2 + \Omega^2) = 0$$

$$\Omega_{\min} = 0$$

$$\boxed{\Omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}} \text{ — резонансная циклическая частота}$$

Резонанс — ФЯ — резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к резонансной циклической частоте.

Резонансные кривые

