ГЛАВА I. МЕХАНИКА
§15. Механические колебания

О. И. Лубенченко
НИУ МЭИ
Кафедра физики им. В. А. Фабриканта
2020

§15. Механические колебания

I. Виды колебаний

Колебания — ФЯ — периодические изменения какой-либо ФВ во времени.

Колебательная система — система тел, в которой происходят колебания.

Колебания

свободные — колебательная система предоставлена самой себе

- ***незатухающие***: $W = \text{const}$
- ***затухающие***: $W \neq \text{const}$, $W\downarrow$

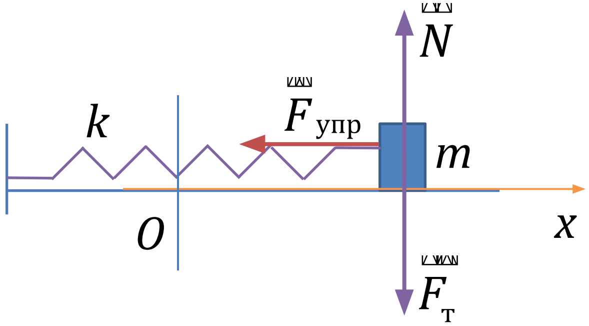
вынужденные — при периодическом внешнем воздействии

II. Свободные незатухающие (собственные) колебания

Пружинный маятник — груз (МТ) массы m, который может колебаться на пружине жёсткостью k.

Трения нет.

§15. Механические колебания



II закон Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}_т + \vec{N} + \vec{F}_{упр}$

$x: ma_x = -kx \qquad F_{упр\,x} = -kx$

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} \qquad m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\boxed{\frac{k}{m} \equiv \omega_0^2} \qquad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

— ***дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний***

Общее решение: $\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)}$ *— гармоническая функция*

$$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \qquad a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

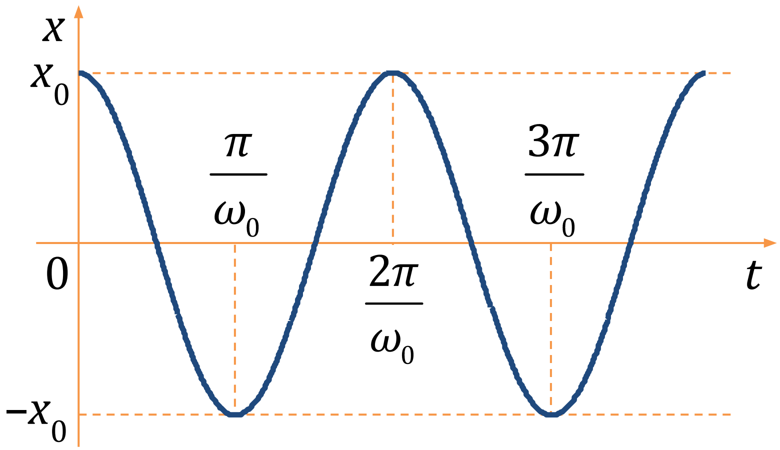
Подставим *начальные условия:* при $t = 0$ $x = x_0$, $v_x = 0$

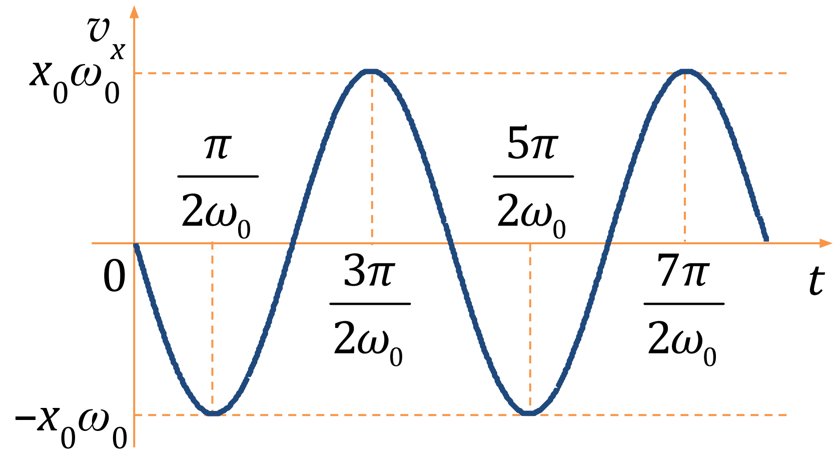
$$\begin{cases} x(0) = A\cos\varphi \\ v_x(0) = -A\omega_0 \sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_0 = A\cos\varphi \\ 0 = -A\omega_0 \sin\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ A = x_0 \end{cases}$$

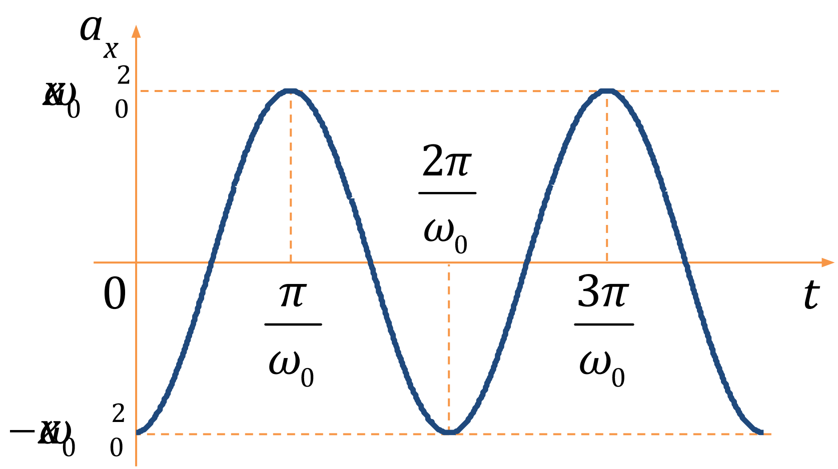
Частное решение: $x(t) = x_0 \cos\omega_0 t$

§15. Механические колебания

$$v_x(t) = -x_0\omega_0 \sin\omega_0 t \qquad a_x(t) = -x_0\omega_0^2 \cos\omega_0 t$$







§15. Механические колебания

A — ***амплитуда*** колебаний — максимальное отклонение колеблющейся величины от равновесного значения.

$\omega_о$ — ФВ — ***циклическая частота***

$$[\omega_0] = \frac{\text{рад}}{\text{с}} = \text{с}^{-1}$$

Выражение в скобках — ***фаза*** колебаний

φ — ***начальная фаза***

Период $T_о$ — ФВ — время, за которое колебательная система совершает одно полное колебание.

Частота $\nu_о$ — ФВ — число полных колебаний в единичный промежуток времени.

$$[\nu_0] = \text{Гц}$$

$$\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}} \qquad \boxed{\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T_0}}$$

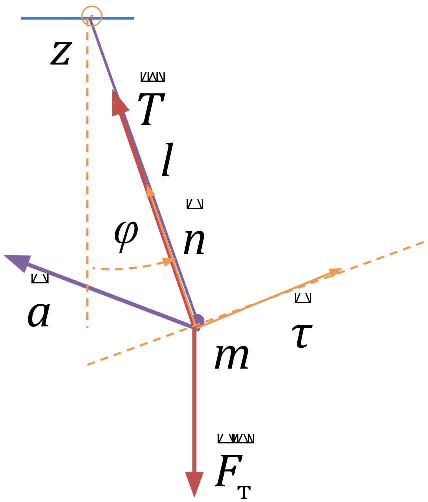
Энергия колебаний (механическая энергия колебательной системы):

$$W = W_к + W_п = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}$$

§15. Механические колебания

Примеры

1. Математический маятник



Математический маятник — МТ, подвешенная на невесомой нерастяжимой нити в однородном гравитационном поле.

II закон Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}_т + \vec{T}$

$$n: ma_n = T - F_т \cos\varphi$$

$$\tau: ma_\tau = -F_т \sin\varphi$$

$F_т = mg$ (закон всемирного тяготения)

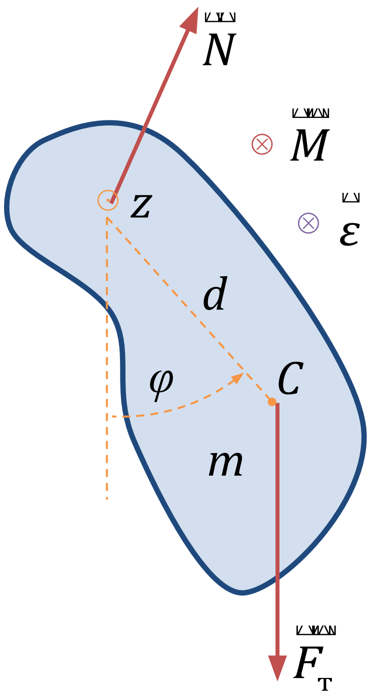
$$a_\tau = \varepsilon_z l \qquad \varepsilon_z = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$\cancel{m}\frac{d^2\varphi}{dt^2} l = -\cancel{m} g \sin\varphi \Rightarrow \frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

При *малых углах* $\sin\varphi \approx \varphi$ $\Rightarrow$ $\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0$ $\quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}}$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}$$

2. Физический маятник



Физический маятник — ТТ, которое может вращаться вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точки этого тела, не являющиеся его ЦМ, в однородном гравитационном поле.

ОУДВД: $I\vec{\varepsilon} = \vec{M}_{F_т} + \vec{M}_N$

$z: I_z \varepsilon_z = -F_т d \sin\varphi$

$F_т = mg$ (закон всемирного тяготения) $\qquad \varepsilon_z = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$

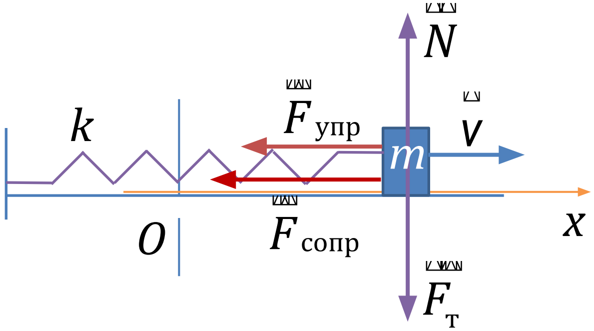
При *малых углах* $\sin\varphi \approx \varphi$ $\qquad \dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + \dfrac{mgd}{I}\varphi = 0$

$\omega_0 = \sqrt{\dfrac{mgd}{I}} \qquad T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{mgd}}}$

III. Свободные затухающие колебания

Рассмотрим пружинный маятник.

Сила вязкого трения $\vec{F}_{сопр} = -r\vec{v}$



II закон Ньютона: $m\vec{a} = \vec{F}_т + \vec{N} + \vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр}$

$$x: m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$\omega_0 \equiv \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ $\quad \boxed{\dfrac{r}{m} \equiv 2\beta}$ β — ***коэффициент затухания***

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0}$$

— ***дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний***

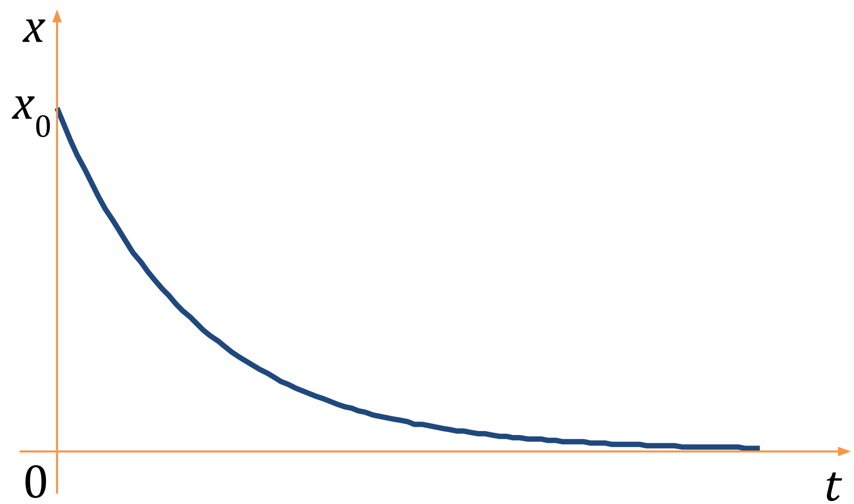
1. Сильное затухание ($\beta \geq \omega_0$)

Общее решение: $x(t) = A_1 e^{\left(-\beta+\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t} + A_2 e^{\left(-\beta-\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)t}$ — *апериодическое решение*

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}$$



2. Слабое затухание ($\beta < \omega_0$)

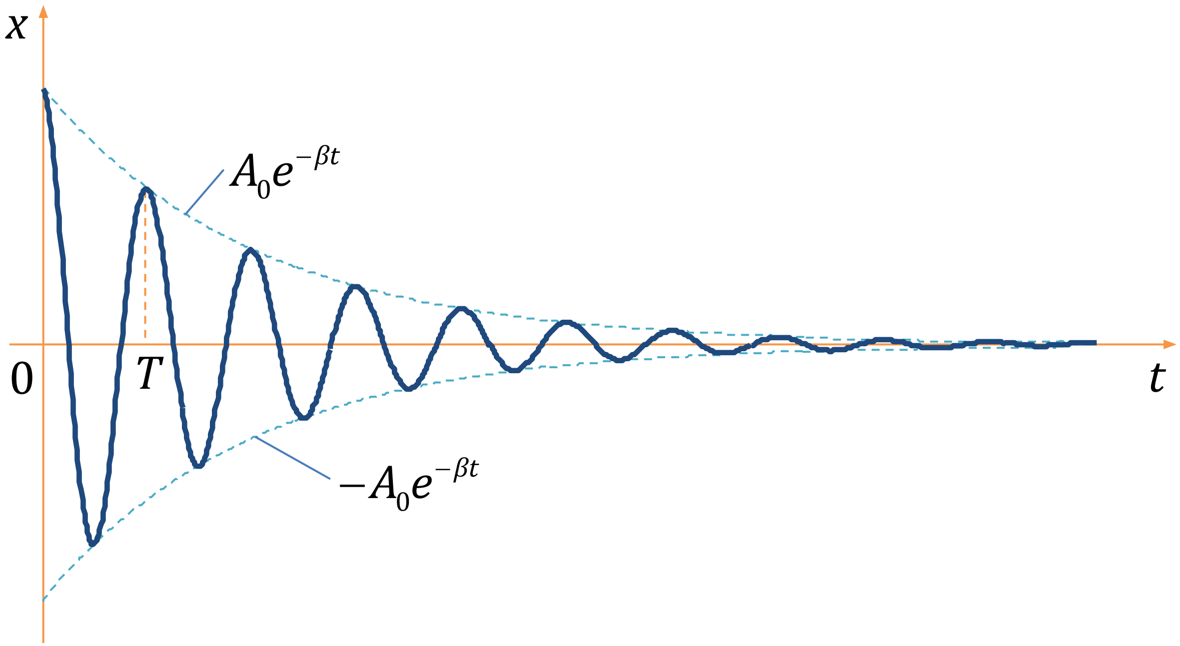
Общее решение: $\boxed{x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)}$

$$\lambda_{1,2} = -\beta \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ — ***циклическая частота затухающих колебаний***

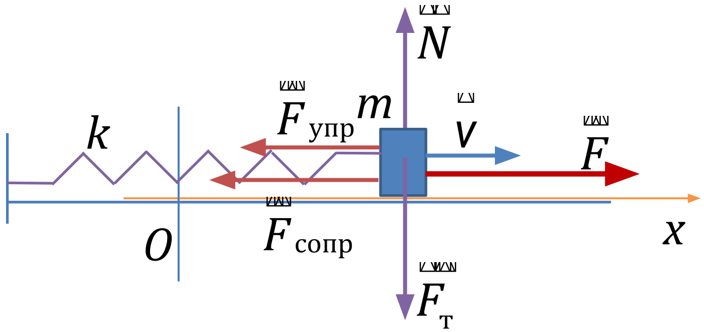
Амплитуда затухающих колебаний $\boxed{A(t) = A_0 e^{-\beta t}}$

Период затухающих колебаний (условный период) $\boxed{T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}}$



IV. Вынужденные колебания

Рассмотрим пружинный маятник, находящийся под воздействием, описываемым периодической силой $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \Omega t$



II закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_т + \vec{N} + \vec{F}_{упр} + \vec{F}_{сопр} + \vec{F}$$

$$x:\ m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos\Omega t$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos\Omega t$$

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 2\beta \equiv \frac{r}{m} \qquad \boxed{\frac{F_0}{m} \equiv f_0}$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\Omega t}$$

— ***дифференциальное уравнение вынужденных гармонических колебаний***

Общее решение (при $\beta < \omega_0$): $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

общее решение ОДУ

частное решение НДУ

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$x_1(t) = A_1 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi) \qquad x_2(t) = A_2\cos(\Omega t + \varphi_0)$$

$x_1(t)$ быстро затухает $\rightarrow$ циклическая частота вынужденных колебаний равна Ω

$$\frac{dx_2}{dt} = -A_2\Omega\sin\left(\Omega t + \varphi_0\right) \qquad \frac{d^2x_2}{dt^2} = -A_2\Omega^2\cos\left(\Omega t + \varphi_0\right)$$

$$-\Omega^2 A_2\cos\left(\Omega t + \varphi_0\right) - 2\beta\Omega A_2\sin\left(\Omega t + \varphi_0\right) + \omega_0^2 A_2\cos\left(\Omega t + \varphi_0\right) = f_0\cos\Omega t$$

$$f_0\cos\Omega t = f_0\cos\left(\Omega t + \varphi_0 - \varphi_0\right) = f_0\left[\cos\left(\Omega t + \varphi_0\right)\cos\varphi_0 + \sin\left(\Omega t + \varphi_0\right)\sin\varphi_0\right]$$

$$\begin{cases} -\Omega^2 A_2 + \omega_0^2 A_2 = f_0\cos\varphi_0 \\ -2\beta\Omega A_2 = f_0\sin\varphi_0 \end{cases} \Longrightarrow \boxed{\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{-2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}}$$

$$A_2 = \frac{f_0\cos\varphi_0}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi_0}} = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \Omega^2}\frac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{4\beta^2\Omega^2}{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2}}} = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}$$

$$\boxed{A_2 = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}}$$

$$\cos\left(\alpha - \beta\right) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$A_2(0)=\frac{f_0}{\omega_0^2}\qquad A_2(\infty)\to 0\qquad \frac{dA_2}{d\Omega}=0 \Longrightarrow \cancel{f_0}\,\frac{\cancel{\left(-\frac{1}{2}\right)}\left[\cancel{2}(\omega_0^2-\Omega^2)(-\cancel{2}\Omega)+\cancel{8}\,2\beta^2\Omega\right]}{\cancel{\left[(\omega_0^2-\Omega^2)^2+4\beta^2\Omega^2\right]^{3/2}}}=0$$

$$2\beta^2\Omega-(\omega_0^2-\Omega^2)\Omega=0 \Longrightarrow \Omega\left(2\beta^2-\omega_0^2+\Omega^2\right)=0$$

$\Omega_{\text{min}} = 0$

$\boxed{\Omega_{\text{рез}}=\sqrt{\omega_0^2-2\beta^2}}$ — ***резонансная циклическая частота***

Резонанс — ФЯ — резкое возрастание амплитуды вынужденных колебаний при приближении циклической частоты вынуждающей силы к резонансной циклической частоте.

Резонансные кривые