

---

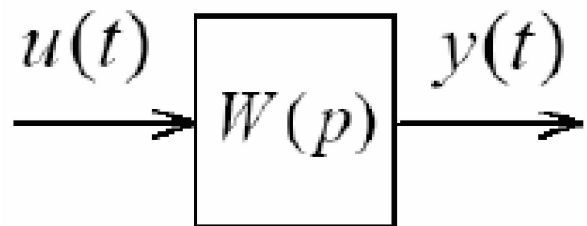
Тема 4.

Переход от передаточных функций к дифференциальным уравнениям и структурным схемам

---

## Передаточная функция без нулей

---



$$W(p) = \frac{b}{A(p)}$$

$$W(p) = \frac{b}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1}$$

$$[p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1]y(t) = bu(t)$$

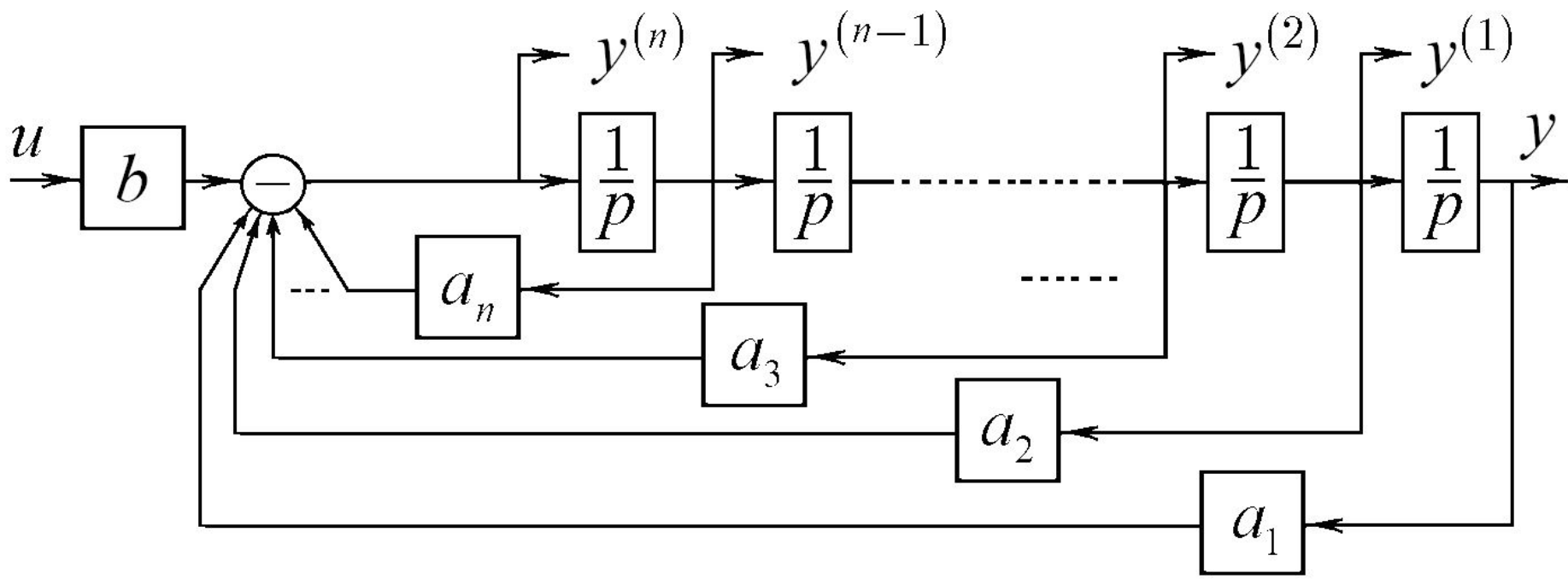
$$p = d / dt$$

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_2 y^{(1)} + a_1 y = bu$$

# Переход от дифференциального уравнения $n$ -го порядка к структурной схеме

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_2 y^{(1)} + a_1 y = bu$$

$$y^{(n)} = -a_1 y - \dots - a_{n-1} y^{(n-2)} - a_n y^{(n-1)} + bu$$

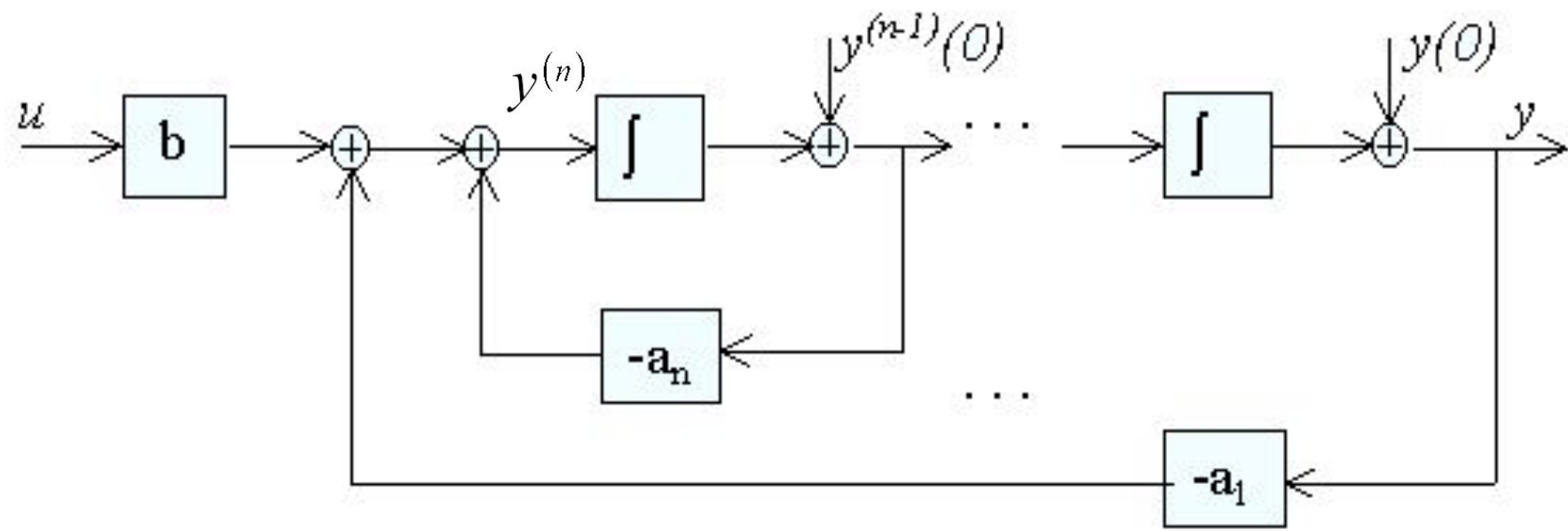


(при нулевых начальные условия)

# Переход от дифференциального уравнения $n$ -го порядка к структурной схеме

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_2 y^{(1)} + a_1 y = bu$$

$$y^{(n)} = -a_1 y - \dots - a_{n-1} y^{(n-2)} - a_n y^{(n-1)} + bu$$



(при ненулевых начальные условия)

# Переход к системе дифф.уравнений в форме Коши

---

Дифф.уравнение  $n$ -го порядка:

$$y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_2 y^{(1)} + a_1 y = bu$$

Система  $n$  дифф.уравнений 1-го порядка (форма Коши):

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ y &= CX \end{aligned} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y^{(1)} \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$


---

$$x_1 = y \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{y} = x_2 \Rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$

$$x_2 = \dot{y} \Rightarrow \dot{x}_2 = \ddot{y} = x_3 \Rightarrow \dot{x}_2 = x_3$$

# Матричная форма уравнений состояния

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\dot{x}_2 = x_3;$$

...

$$\dot{x}_n = -a_1 x_1 - a_2 x_2 - \dots - a_n x_n + bu$$

$$y = x_1$$

*Частный случай управляемой канонической формы для дифференциальных уравнений ОУ*

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix};$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b \end{bmatrix};$$

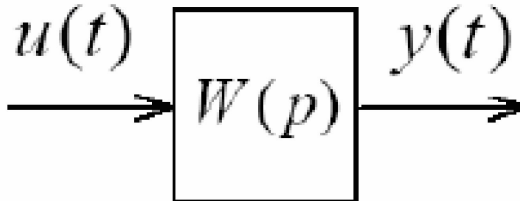
$$C = [1 \ 0 \ \dots \ 0],$$

$$\dim A = n \times n,$$

$$\dim B = n \times 1,$$


$$\dim C = 1 \times n.$$

## Передаточная функция с нулям



$$W(p) = \frac{b_n p^{n-1} + \dots + b_3 p^2 + b_2 p + b_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1}$$

$$y(t) = \frac{B(p)}{A(p)} u(t) \quad A(p)y(t) = B(p)u(t)$$

$$\begin{aligned}
 & y^{(n)} + a_n y^{(n-1)} + \dots + a_2 y^{(1)} + a_1 y \\
 & = b_n u^{(n-1)} + \dots + b_2 u^{(1)} + b_1 u
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 \dot{X} &= AX + Bu \\
 y &= CX
 \end{aligned}$$

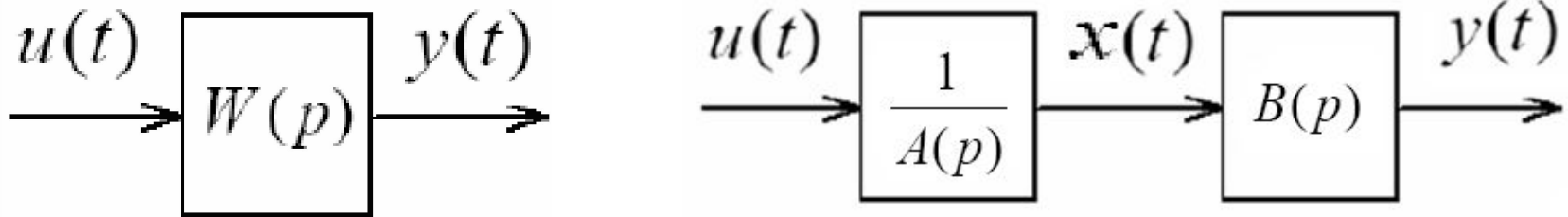
# Канонические формы для дифф.уравнений ОУ

---

- 1. Управляемая каноническая форма для дифференциальных уравнений ОУ**
- 2. Наблюдаемая каноническая форма для дифференциальных уравнений ОУ**



# Переход к управляемой канонической форме (1)



$$x(t) = \frac{1}{A(p)} u(t)$$

$$[p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1] x(t) = u(t)$$

$$x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^{(1)} + a_1 x = u$$

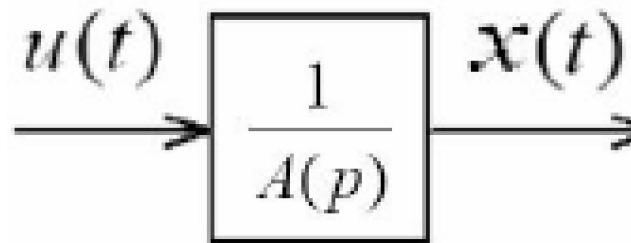
$$y(t) = B(p)x(t) \quad y(t) = [b_n p^{n-1} + \dots + b_3 p^2 + b_2 p + b_1] x(t)$$

$$y = b_n x^{(n-1)} + \dots + b_2 x^{(1)} + b_1 x$$

# Переход к управляемой канонической форме (2)

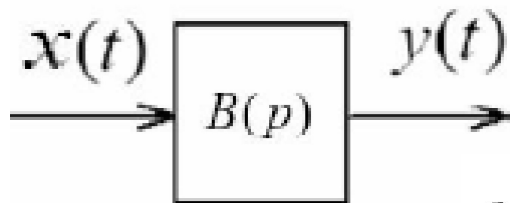
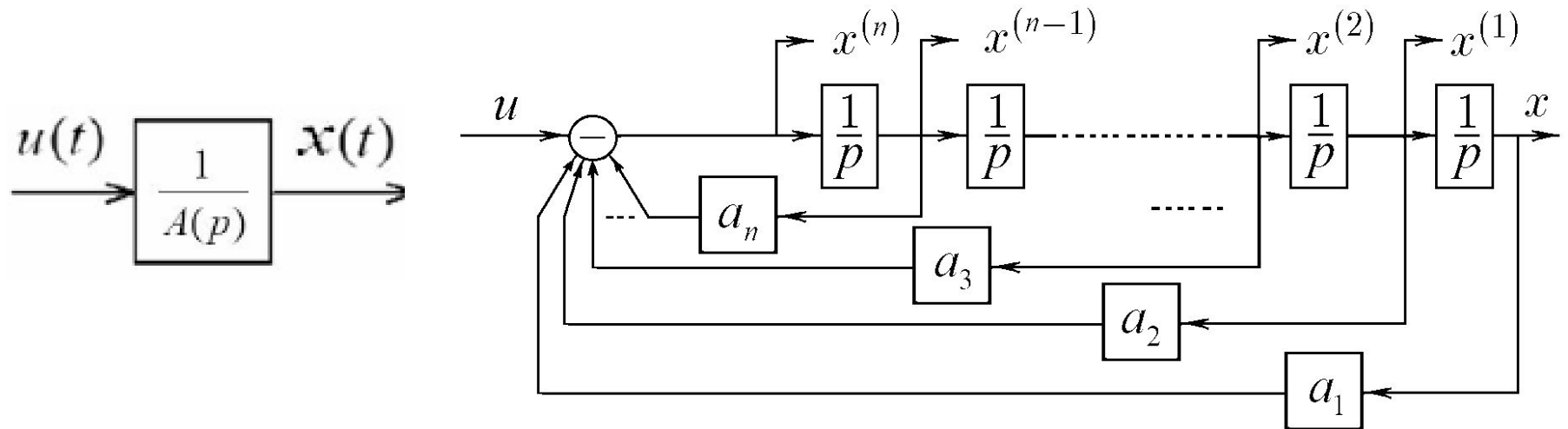
$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x^{(1)} \\ \vdots \\ x^{(n-2)} \\ x^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + \dots + a_2 x^{(1)} + a_1 x = u$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

# Переход к управляемой канонической форме (3)



$$y(t) = B(p)x(t)$$

$$y(t) = [b_n p^{n-1} + \dots + b_3 p^2 + b_2 p + b_1]x(t)$$

$$y = b_n x^{(n-1)} + \dots + b_2 x^{(1)} + b_1 x$$

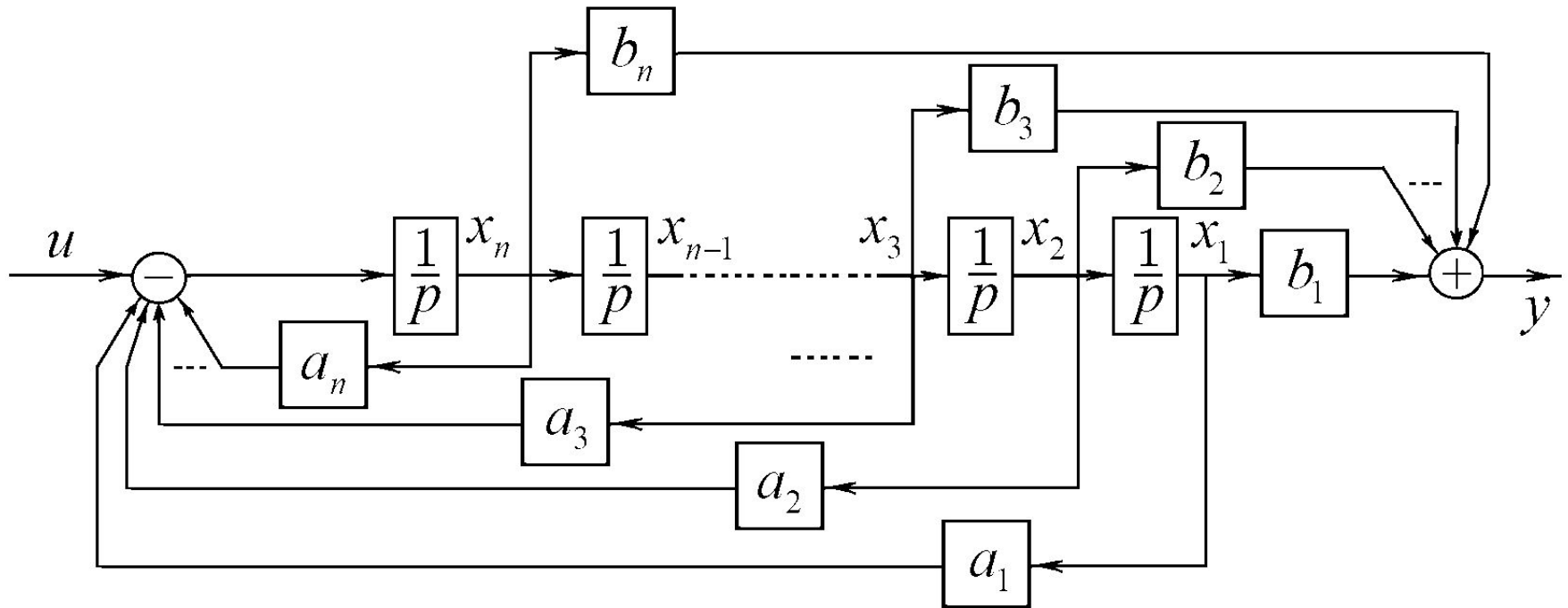
$$y = b_n x_n + \dots + b_2 x_2 + b_1 x_1$$

# Управляемая каноническая форма

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

# Структурная схема для управляемой канонической формы 13



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n-1} \ b_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix}$$

## Переход к наблюдаемой канонической форме (1)

A block diagram showing a transfer function  $W(p)$  in a box. An arrow labeled  $u(t)$  points into the box from the left, and an arrow labeled  $y(t)$  points out of the box to the right.

$$W(p) = \frac{b_n p^{n-1} + \dots + b_3 p^2 + b_2 p + b_1}{p^n + a_n p^{n-1} + \dots + a_3 p^2 + a_2 p + a_1}$$

$$y(t) = \frac{b_3 p^2 + b_2 p + b_1}{p^3 + a_3 p^2 + a_2 p + a_1} u(t)$$

$$y^{(3)} + a_3 y^{(2)} + a_2 y^{(1)} + a_1 y = b_3 u^{(2)} + b_2 u^{(1)} + b_1 u$$

## Переход к наблюдаемой канонической форме (2)

$$y^{(3)} + a_3 y^{(2)} + a_2 y^{(1)} + a_1 y = b_3 u^{(2)} + b_2 u^{(1)} + b_1 u$$

$$y^{(3)} + a_3 y^{(2)} + a_2 y^{(1)} - b_3 u^{(2)} - b_2 u^{(1)} = -a_1 y + b_1 u = x_1^{(1)}$$

$$y^{(2)} + a_3 y^{(1)} + a_2 y - b_3 u^{(1)} - b_2 u = x_1$$

$$y^{(2)} + a_3 y^{(1)} - b_3 u^{(1)} = x_1 - a_2 y + b_2 u = x_2^{(1)}$$

$$y^{(1)} + a_3 y - b_3 u = x_2$$

$$y^{(1)} = x_2 - a_3 y + b_3 u = x_3^{(1)}$$

$$y = x_3$$

$$\dot{x}_1 = -a_1 y + b_1 u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - a_2 y + b_2 u$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - a_3 y + b_3 u$$

$$y = x_3$$

## Переход к наблюдаемой канонической форме (3)

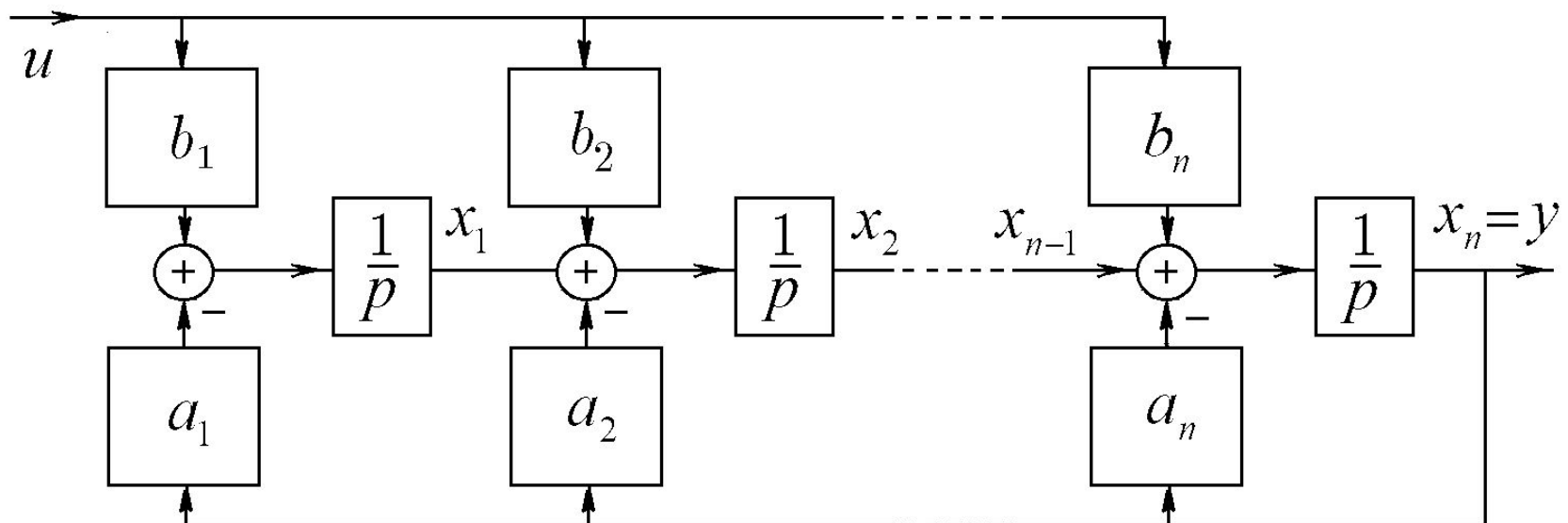
$$\dot{x}_1 = -a_1 x_3 + b_1 u$$

$$\dot{x}_2 = x_1 - a_2 x_3 + b_2 u$$

$$\dot{x}_3 = x_2 - a_3 x_3 + b_3 u$$

$$y = x_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_1 \\ 1 & 0 & -a_2 \\ 0 & 1 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} u$$





---

# Тема 5. Структурные преобразования

---