ГУАП Государственный университет аэрокосмического приборостроения

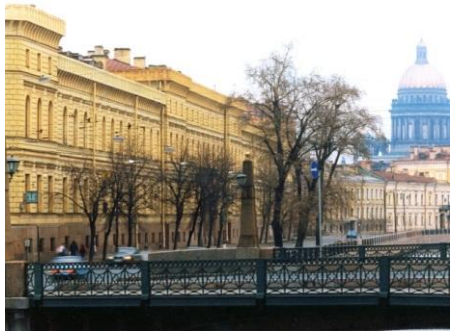
www.guap.ru

Информатика

Рождественская Ксения Николаевна

Кафедра 14

ksu.khramenkova@gmail.com



Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

$$x = (x_1, \ldots x_n) \qquad x_i \in \{0,1\}$$

Последовательность x – n-мерный двоичный вектор с элементами x_i

W(x) – вес вектора x – число его **ненулевых** элементов

Задача

Найти вес двоичного вектора $x = (x_1, \ldots x_n)$

Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

- **1 способ** – последовательное рассмотрение элементов вектора и сравнение их с нулем. Аналогично записи:

$$W(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Это решение **методом перебора**.

Имея конечное число элементов, рассматриваем их один за другим, при этом выполняя сравнение с нулем.

Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

Определения

- Обозначение O(…) является оценкой сложности алгоритма

$$f(n) = 2n + 1 \rightarrow O(n)$$

$$f(n) = 3n^3 + 5n^2 + 2 \rightarrow O(n^3)$$

$$f(n) = O(g(n)) \quad \text{если и} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = C > 0$$

n – размерность задачи

g(n) – некоторая известная функция (линейная, степенная, логарифмическая и пр.)

f(n) – сложность алгоритма (может рассматриваться число некоторых элементарных действий или объем данных)

Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

Определения

- Анализ сложности с точки зрения O(…) позволяет лишь оценить скорость роста функции f(n), т.е. нельзя определить точное значение числа шагов или ячеек памяти
- Такой анализ используется для сравнения двух алгоритмов, при оценке их реализуемости.

Возвращаемся к задаче

Найти вес двоичного вектора

$$x = (x_1, \ldots x_n)$$

Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

- **1 способ** – **метод перебора**. Требуется выполнить (n-1) сложений, размер требуемой памяти не изменяется с изменением n.

  Т.е. сложность данного алгоритма **O(n)** по времени и **O(1)** по памяти

Переформулируем постановку задачи

Существует ли более эффективный способ вычисления веса двоичного вектора,
при котором сложность по времени будет меньше, чем O(n)

?

Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

- **2 способ** – предвычисление веса для всех возможных наборов двоичных векторов длины n.

Адрес	$x=(x_1x_2x_3)$	W(x)
0	(000)	0
1	(001)	1
2	(010)	1
3	(011)	2
4	(100)	1
5	(101)	2
6	(110)	2
7	(111)	3

Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

- **2 способ** – предвычисление веса для всех возможных наборов двоичных векторов длины n.
- В общем случае объем такой таблицы составить 2^n ячеек памяти, для вычисления вектора нужна одна операция – обращение к таблице.

- Снизили временную сложность до **O(1)**
- Увеличили сложность по памяти до **O(2^n)**

т.е. неравноценно **меняем время на память**

Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

- **3 способ**
- Операция $(x-1) \wedge x$, где x – десятичное представление двоичного набора (x_1,…x_n)

приводит к тому, что обнуляется самая правая единица, т.е. кол-во единиц становится на 1 меньше

```
  10010100
-         1
  _________
  10010011
^ 10010100
  _________
  10010000
```

Тогда решить задачу можно за W(x) шагов, каждый раз сравнивая результат вычисления с 0

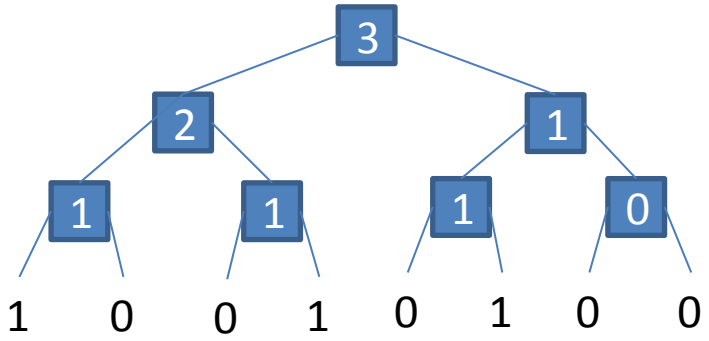
Каждый шаг это 4 операции: вычитание, побитовое умножение, увеличение счетчика, сравнение с нулем

Сложность такого алгоритма **O(W(x))** по времени и **O(1)** по памяти

Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

- **4 способ**
- переборный по времени алгоритм (1 способ) требовал (n-1) сложение



Листья – элементы вектора
Корень – сумма всех элементов

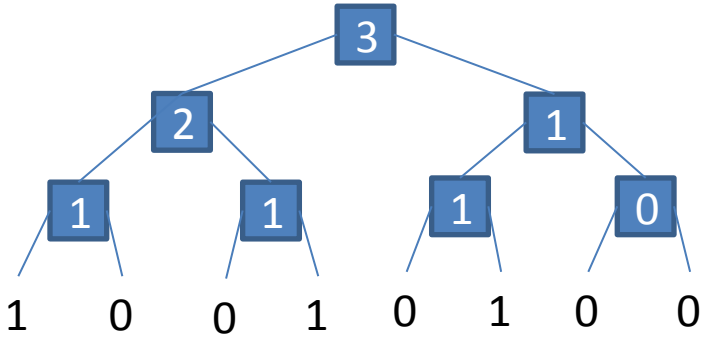
Появляется идея уменьшения числа сложений

Уменьшение сложности вычислений

Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

- Пусть x = 10010100
  - Складываем элементы на соседних позициях



Выделим из x позиции, имеющие **четные** и **нечетные** номера: умножим побитово вектор x на двоичную маску

$$m_1^{нч} = 01|01|01|01$$

$$x_1^{нч} = 00|01|01|00$$

$$m_1^{ч} = 10|10|10|10$$

и сдвинем результат на 1 бит вправо

$$x_1^{ч} = 01|00|00|00$$

Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

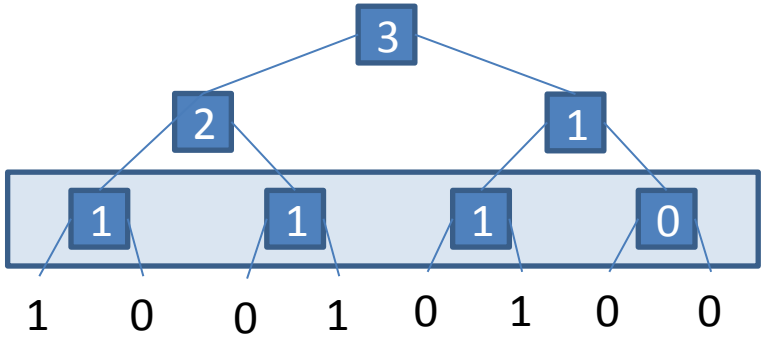
Вычисление веса двоичного вектора

- Пусть x = 10010100
  - Сумма десятичных представлений $x^{нч}_1$ и $x^{ч}_1$

даст вектор $x_1 = 01|01|01|00$

В десятичном представлении это последовательность

$(1|1|1|0)_{10}$



За одно десятичное сложение n-битных чисел выполнили n/2 сложений однобитных чисел

Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

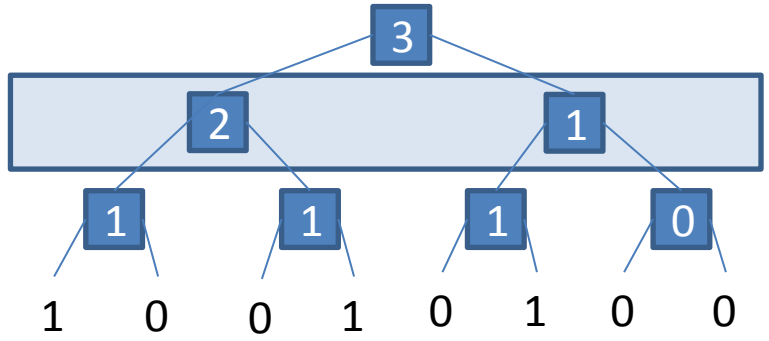
- Пусть x = 10010100
  - Аналогично за одно сложение можно вычислить результат второго уровня

$m_2^{нч} = 0011|0011$ $\quad$ $m_2^{ч} = 1100|1100$

и сдвинем результат на 2 бита вправо

$x_2^{нч} = 0001|0000$ $\quad$ $x_2^{ч} = 0001|0001$

$x_2 = 0010|0001 = (2|1)_{10}$



Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

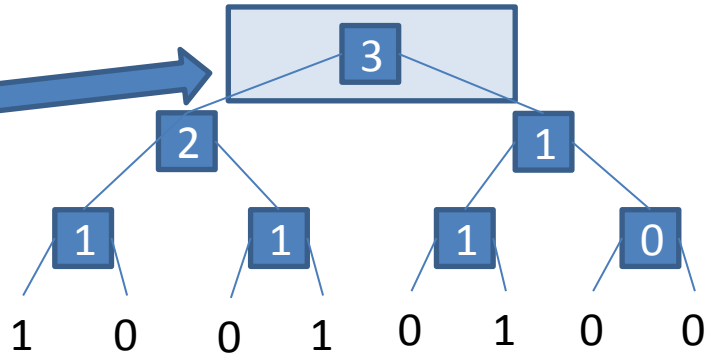
- Пусть x = 10010100
  - Последний шаг

$m_3^{нч} = 00001111$ $m_3^{ч} = 11110000$

и сдвинем результат на 4 бита вправо

$x_3^{нч} = 00000001$ $x_3^{ч} = 0000010$

$$x_3 = 00000011 = 3_{10}$$



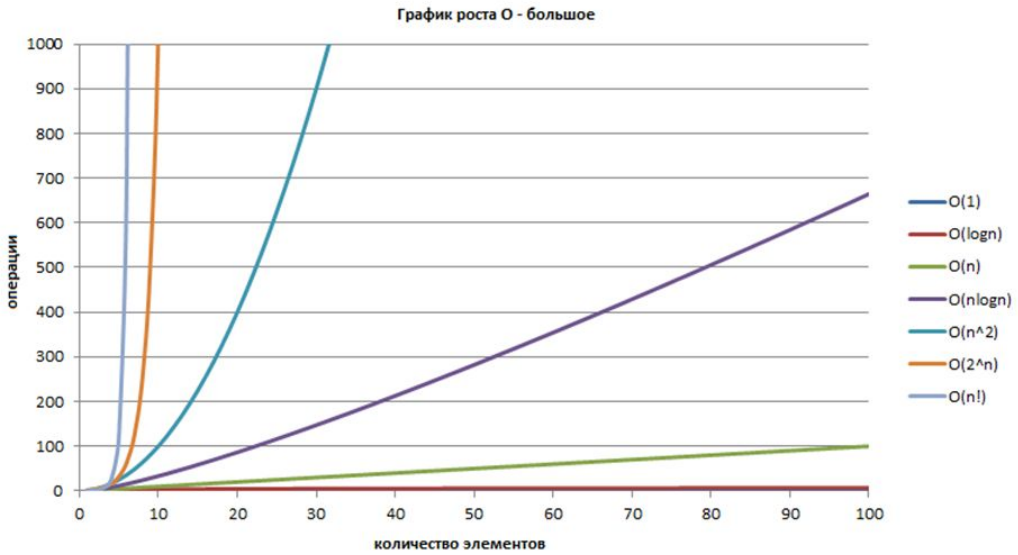
Ответ: W(x) = 3

Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

- 4й способ требует столько сложений, сколько уровней содержит дерево, это дает временную сложность O(log n).

Нашли решение задачи, гораздо более эффективное, чем переборные методы



Оценка эффективности алгоритмов по памяти и времени

Вычисление веса двоичного вектора

- Один из часто используемых методов построения алгоритмов – **декомпозиция**
- На примере 4го способа: структура дерева; если разобъем вектор на любое число частей, то вес вектора буде равен сумме весов этих частей.
  - **Уровни дерева** – это разбиения числа вектора x на 2,4,8 и т.д. частей. Такое разбиение можно проводить до тех пор, пока веса полученных подвекторов не смогут быть вычислены с помощью простой процедуры

т.е. ищем подзадачу такой размерности, которая имеет простое решение