

2.9 Электрические цепи со взаимной индукцией

2.9.1 Явления самоиндукции и взаимной индукции

Явление самоиндукции – явление наведения ЭДС в элементе (катушке) электрической цепи при изменении тока этого элемента.

$$e_L = -L \frac{di}{dt} \text{ - ЭДС самоиндукции}$$

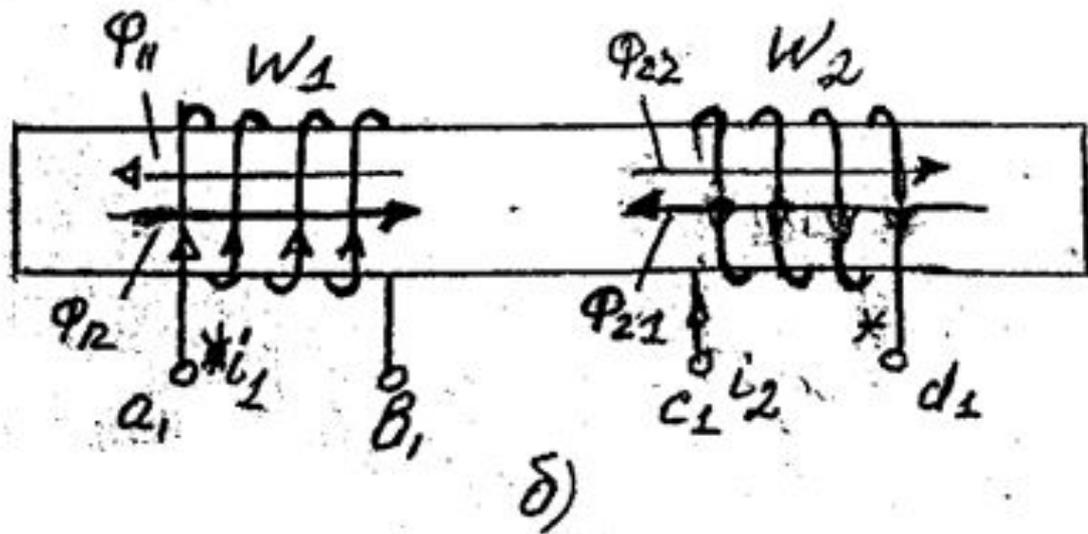
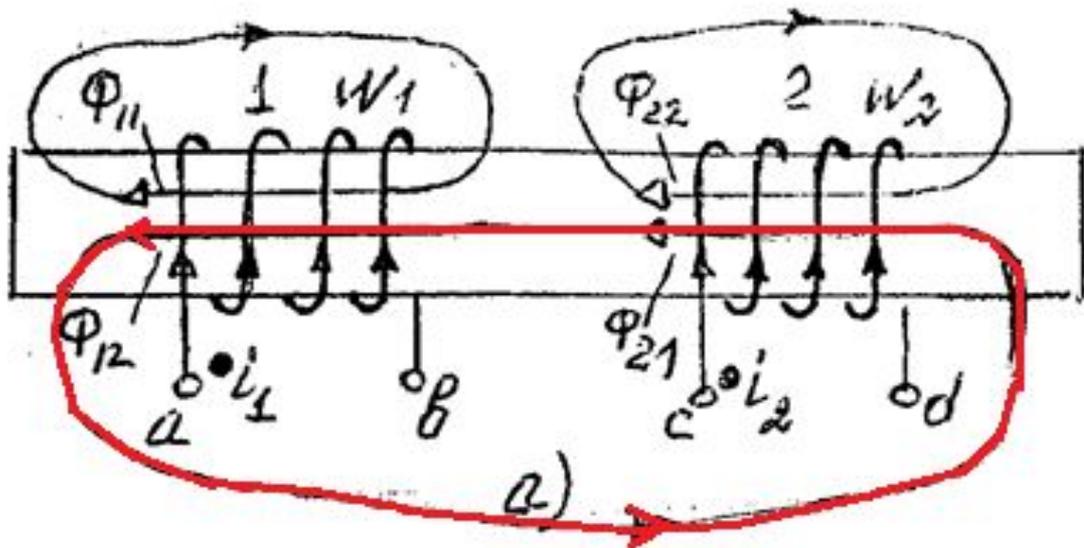
$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt} \text{ - напряжение на элементе, обусловленное явлением самоиндукции}$$

L [Гн] – индуктивность.

Индуктивно связанные цепи – цепи, в которых наводятся ЭДС взаимной индукции.

M [Гн] – взаимная индуктивность – характеристика явления взаимной индукции.

Источником магнитного поля является электрический ток, при этом магнитное поле создается как внутри проводника с током, так и вне проводника (в окружающем проводник пространстве), благодаря чему и возможно явление взаимной индукции.



W_1, W_2 – ЧИСЛО ВИТКОВ
 СООТВЕТСТВЕННО
 катушки 1 и 2;
 i_1, i_2 – переменные
 (синусоидальные)
 токи катушек 1 и 2 ($\sim i_1$;
 $\sim i_2$);
 На рисунке а, б
 приведены две
 индуктивно-
 связанные катушки,
 так как переменное
 магнитное поле,
 созданное током i_1
 катушки 1, пересекает
 (пронизывает) витки
 катушки 2 и
 индуцирует (наводит)
 в ней ЭДС взаимной
 индукции и наоборот

$\sim i_1$ \rightarrow $\Phi_{11} \rightarrow \Psi_{11} = w_1 \Phi_{11}$ Магнитный поток катушки 1, созданный собственным током i_1 .

$\Phi_{21} \rightarrow \Psi_{21} = w_2 \Phi_{21}$ Магнитный поток, созданный током i_1 , но пронизывающий катушку 2

$\sim i_2$ \rightarrow $\Phi_{22} \rightarrow \Psi_{22} = w_2 \Phi_{22}$ Магнитный поток от переменного тока i_2 , пересекающий витки w_2 катушки 2

$\Phi_{12} \rightarrow \Psi_{12} = w_1 \Phi_{12}$ Магнитный поток тока i_2 , пронизывающий витки w_1 катушки 1

Взаимная индукция – явление изменения ЭДС в элементе электрической цепи (ЭЦ) при изменении потокосцепления взаимной индукции Ψ_{km} в элементе K , обусловленного током в другом элементе m .

Цепи, в которых наводится ЭДС взаимной индукции, называются цепями со взаимной индукцией. Φ_{kk} , Ψ_{kk} – потокосцепление (полный поток) катушки K , созданный собственным током i_k и сцепленное со всеми витками w_k катушки K ; $\Psi_{km} = w_k \Phi_{km}$, Ψ_{km} [Вебер] – взаимное потокосцепление, созданное током i_m катушки m и сцепленное с витками w_k катушки K .

$$e_{M21} = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -w_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

взаимной индукции, индуцированная током i_1 в катушке 2;

$$u_{M21} = -e_{M21} = \frac{d\Psi_{21}}{dt} = w_2 \frac{d\Phi_{21}}{dt} = M_{21} \frac{di_1}{dt}$$

Напряжение взаимной индукции в катушке 2 от тока i_1 ;

$$e_{M12} = -\frac{d\Psi_{12}}{dt} = -w_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

ЭДС взаимной индукции, наведенная в катушке 1 током i_2 ;

$$u_{M12} = -e_{M12} = \frac{d\Psi_{12}}{dt} = w_1 \frac{d\Phi_{12}}{dt} = M_{12} \frac{di_2}{dt}$$

Напряжение взаимной индукции на катушке 1 от тока i_2 катушки 2

В линейных цепях

$$M_{21} = M_{12} = M$$

- принцип взаимности

Коэффициент индуктивной связи

$$K = \frac{M}{\sqrt{L_1 \cdot L_2}} = \frac{\omega M}{\sqrt{\omega L_1 \cdot \omega L_2}} = \frac{x_M}{\sqrt{x_{L1} \cdot x_{L2}}} < 1$$

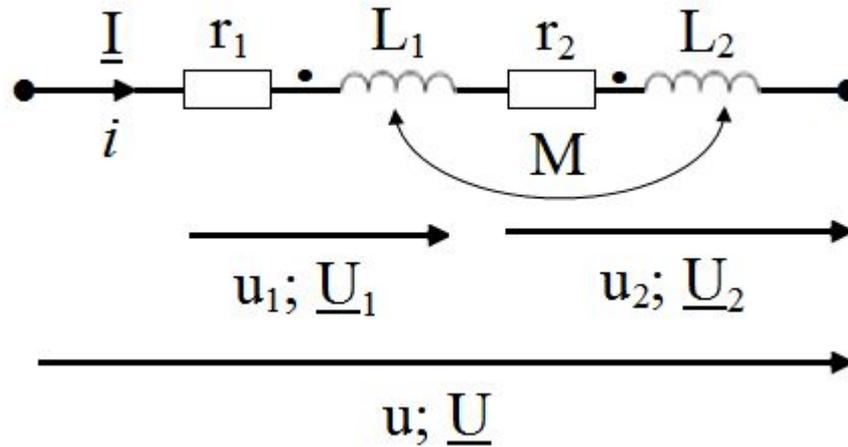
где $x_M = \omega M$ [Ом] – сопротивление взаимной индукции.

Одноименные зажимы индуктивно связанных элементов (катушек) – такие зажимы (выводы, полюсы), при одинаковом направлении токов i_1 и i_2 относительно которых, магнитные потоки самоиндукции ($\Phi_{11}; \Phi_{22}$) и взаимной индукции ($\Phi_{12}; \Phi_{21}$) в каждой катушке складываются (рис.

а) Одноименные зажимы обозначаются на схемах точкой или звездочкой.

2.9.2 Неразветвленные цепи со взаимной индукцией

а) Согласное включение — такое соединение индуктивно-связанных катушек (элементов), при котором токи одинаково ориентированы (направлены) относительно одноименных зажимов.



При согласном включении напряжения самоиндукции $L \frac{di}{dt}$ и взаимной индукции $M \frac{di}{dt}$ имеют одинаковые знаки.

Мгновенные значения напряжений (мгновенные напряжения) на катушках

$$u_1 = r_1 i + L_1 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \text{ - на первой катушке;}$$

$$u_2 = r_2 i + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} \text{ - на второй катушке;}$$

$$u = u_1 + u_2 = (r_1 + r_2)i + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} + 2M \frac{di}{dt} \text{ - общее}$$

напряжение
(напряжение
цепи)

Комплексные действующие значения напряжений (комплексные действующие напряжения)

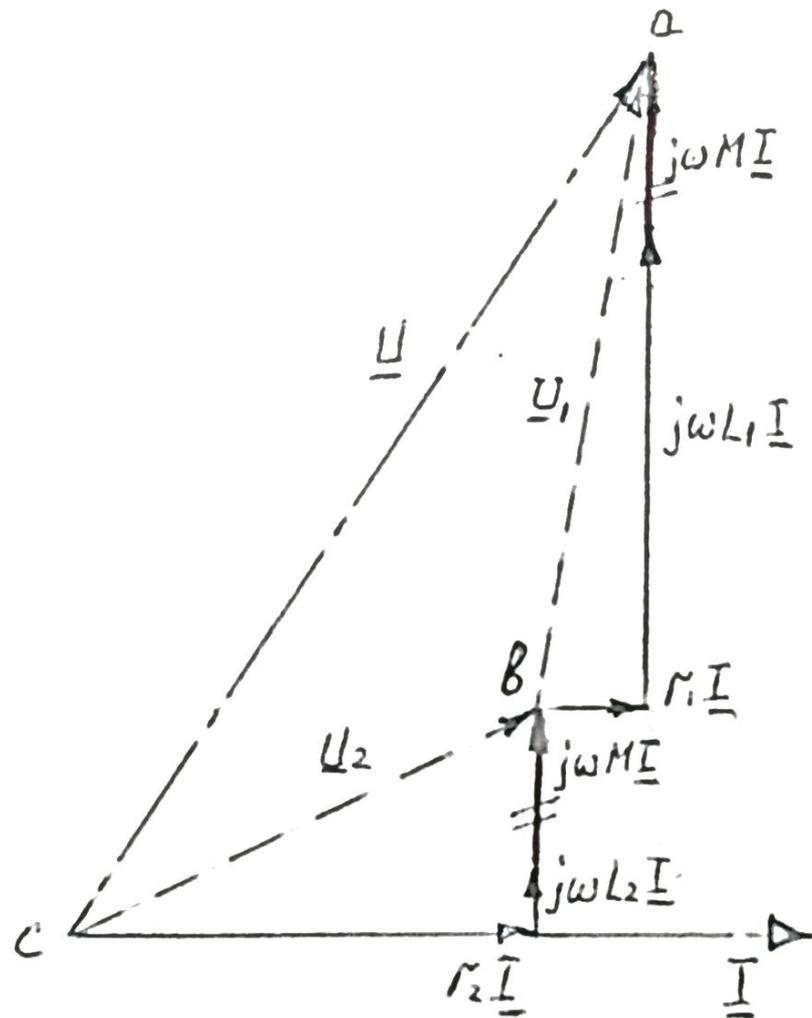
$\underline{U}_1 = r_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} + j\omega M \underline{I}$ - напряжение на I-ой катушке;

$\underline{U}_2 = r_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} + j\omega M \underline{I}$ - напряжение на II-ой катушке;

$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = [(r_1 + r_2) + j(\omega L_1 + \omega L_2 + 2\omega M)] \underline{I} =$
 $= [(r_1 + r_2) + j(x_{L1} + x_{L2} + 2x_M)] \underline{I} = [(r_1 + r_2) + jx_c] \underline{I} =$
 $= \underline{z}_c \underline{I}$, - общее напряжение цепи;

где $\underline{z}_c = [(r_1 + r_2) + jx_{\text{согл}}]$ – комплексное сопротивление цепи при согласном включении;

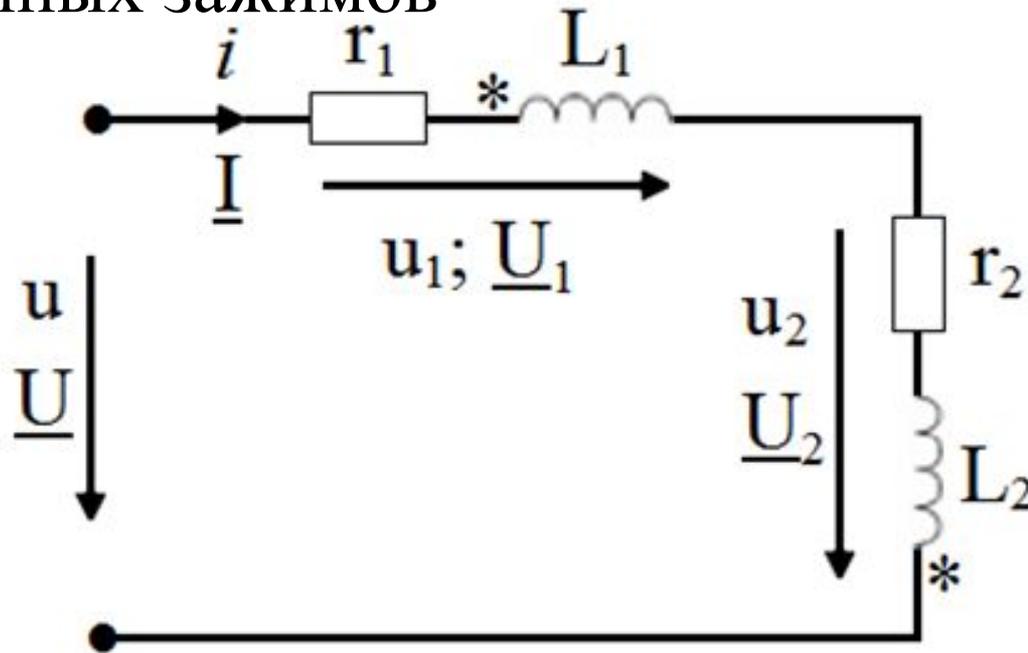
$x_{\text{согл}} = (x_{L1} + x_{L2} + 2x_M)$ – реактивное сопротивление цепи при согласном включении катушек.



Векторная диаграмма (ВД) тока и напряжений цепи при согласном включении

ВД напряжений строится по уравнению $\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = (r + j\omega L_1 + j\omega M)\underline{I} + (r + j\omega L_2 + j\omega M)\underline{I}$ относительно комплексного вектора тока \underline{I} , при этом напряжение на резисторе r_k ($k=1,2$) совпадает по фазе с током \underline{I} , напряжения самоиндукции на L_k и взаимной индукции M опережают ток на 90° .

б) Встречное включение – такое соединение индуктивно-связанных элементов (катушек), при котором токи по разному направлены относительно одноименных зажимов



При встречном включении напряжения самоиндукции $L \frac{di}{dt}$ и взаимной индукции $M \frac{di}{dt}$ имеют разные знаки

Мгновенные напряжения

$$u_1 = r_1 i + L_1 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \quad \text{- на первой катушке;}$$

$$u_2 = r_2 i + L_2 \frac{di}{dt} - M \frac{di}{dt} \quad \text{- на второй катушке;}$$

$$u = u_1 + u_2 = (r_1 + r_2) i + (L_1 + L_2) \frac{di}{dt} - 2M \frac{di}{dt}$$

- общее напряжение цепи.

Комплексные действующие напряжения

$\underline{U}_1 = r_1 \underline{I} + j\omega L_1 \underline{I} - j\omega M \underline{I}$ - напряжение на I-ой катушке;

$\underline{U}_2 = r_2 \underline{I} + j\omega L_2 \underline{I} - j\omega M \underline{I}$ - напряжение на II-ой катушке;

$\underline{U} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 = [(r_1 + r_2) + j(\omega L_1 + \omega L_2 - 2\omega M)] \underline{I} =$
 $= [(r_1 + r_2) + j(x_{L1} + x_{L2} - 2x_M)] \underline{I} = [(r_1 + r_2) + jx_B] \underline{I} =$
 $= \underline{z}_B \underline{I}$, - общее напряжение цепи;

где $\underline{z}_B = [(r_1 + r_2) + jx_B]$ - комплексное сопротивление цепи при встречном включении;

$x_B = (x_{L1} + x_{L2} - 2x_M)$ - реактивное сопротивление цепи при встречном включении катушек.

$$z_c = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (x_{L1} + x_{L2} + 2x_M)^2}$$
 — полное сопротивление цепи при согласном включении (модуль комплексного сопротивления);

$$z_в = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (x_{L1} + x_{L2} - 2x_M)^2}$$
 — полное сопротивление цепи при встречном включении (модуль комплексного сопротивления).

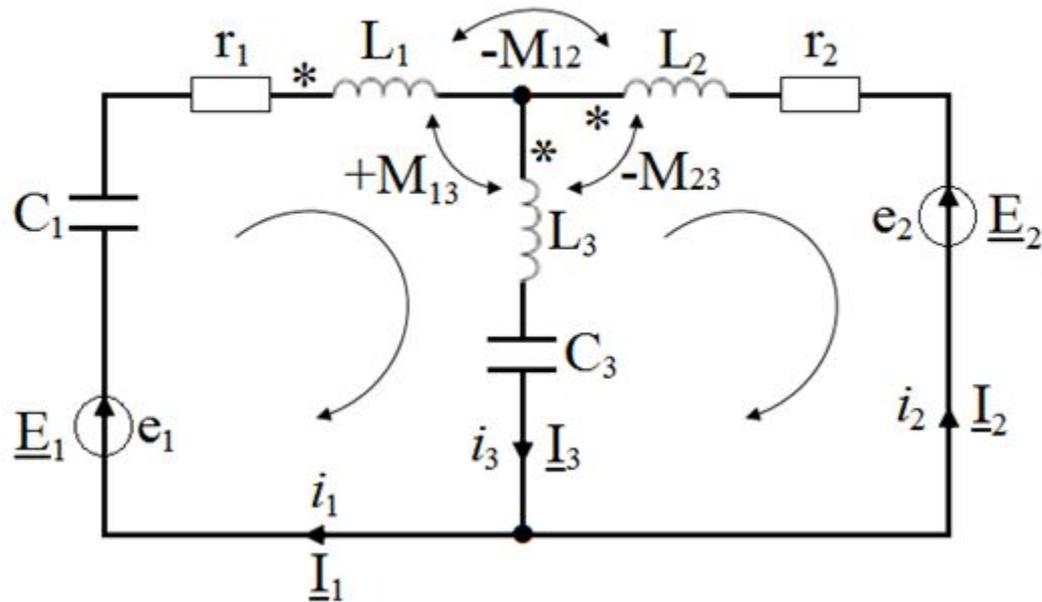
$$Z_C > Z_B$$

- условие, позволяющее экспериментально определить одноименные зажимы индуктивно-связанных элементов (катушек).

$$X_C - X_B = 4X_M \Rightarrow X_M = \frac{X_C - X_B}{4} \quad (\text{по этим формулам})$$

экспериментально можно найти взаимную индуктивность М)

2.9.3 Разветвленная цепь со взаимной индукцией



$y = 2$ - число
 $b = 3$ - число ветвей;
 $n = 1$ - число уравнений
 $m = 2$ - число уравнений
 ИЗК.

Катушки 1 и 2 включены встречно, 2 и 3 – встречно, 1 и 3 – согласно.

Поэтому $(L_1 \frac{di_1}{dt})$ и $(M_{13} \frac{di_3}{dt})$, $(L_3 \frac{di_3}{dt})$ и $(M_{13} \frac{di_1}{dt})$, имеют одинаковые знаки (согласное включение).

При встречном включении

$(L_1 \frac{di_1}{dt})$ и $(M_{12} \frac{di_2}{dt})$, $(L_2 \frac{di_2}{dt})$ и $(M_{12} \frac{di_1}{dt})$, а также

$(L_2 \frac{di_2}{dt})$ и $(M_{23} \frac{di_3}{dt})$, $(L_3 \frac{di_3}{dt})$ и $(M_{23} \frac{di_2}{dt})$ имеют разные знаки.

направления токов ветвей и охода контуров выораны произвольно.

Уравнения для мгновенных значений тока, ЭДС

$$\begin{cases} i_1 + i_2 - i_3 = 0 \\ r_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int i_1 dt + L_1 \frac{di_1}{dt} + M_{13} \frac{di_3}{dt} - M_{12} \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C_3} \int i_3 dt + L_3 \frac{di_3}{dt} + M_{13} \frac{di_1}{dt} - M_{23} \frac{di_2}{dt} = e_1 \\ -r_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M_{12} \frac{di_1}{dt} - M_{23} \frac{di_3}{dt} - \frac{1}{C_3} \int i_3 dt - L_3 \frac{di_3}{dt} - M_{13} \frac{di_1}{dt} + M_{23} \frac{di_2}{dt} = -e_2 \end{cases}$$

Уравнения для комплексных действующих значений тока,

ЭДС

$$\begin{cases} \underline{I}_1 + \underline{I}_2 - \underline{I}_3 = 0 \\ (r_1 + jx_{L1} - jx_{C1})\underline{I}_1 + jx_{M13}\underline{I}_3 - jx_{M12}\underline{I}_2 + (jx_{L3} - jx_{C3})\underline{I}_3 + jx_{13}\underline{I}_1 - jx_{23}\underline{I}_2 = \underline{E}_1 \\ -(r_2 + jx_{L2})\underline{I}_2 + jx_{12}\underline{I}_1 + jx_{23}\underline{I}_3 - (jx_{L3} - jx_{C3})\underline{I}_3 - jx_{13}\underline{I}_1 + jx_{23}\underline{I}_2 = -\underline{E}_2 \end{cases}$$

где $x_{L1} = \omega L_1$; $x_{L2} = \omega L_2$; $x_{L3} = \omega L_3$ – индуктивные сопротивления

$$x_{C1} = \frac{1}{\omega C_1}; \quad x_{C3} = \frac{1}{\omega C_3}$$

1-ой, 2-ой и 3-ей ветвей; емкостные сопротивления 1-ой и 3-ей ветвей;

$$x_{M13} = x_{13} = \omega M_{13}; \quad x_{M23} = x_{23} = \omega M_{23}; \quad x_{M12} = x_{12} = \omega M_{12}$$

– индуктивные сопротивления взаимной индукции соответственно между катушками 1 и 3; 2 и 3; 1 и 2.

Контрольные вопросы

- 1 Что такое явления самоиндукции и взаимной индукции?
- 2 Что такое индуктивно связанные элементы (катушки)?
- 3 Назовите причину возникновения явления взаимной индукции.
- 4 Что такое одноименные зажимы?
- 5 Что такое собственные потоки Φ (собственные потокосцепления)?
- 6 Что такое взаимные потоки Φ (взаимные потокосцепления)?
- 7 Дать определение согласного включения индуктивно связанных элементов.
- 8 Дать формулировку встречного включения индуктивно связанных катушек.
- 9 Написать формулу комплексного и полного сопротивления последовательной цепи при согласном включении индуктивно связанных катушек.
- 10 Написать формулу комплексного и полного сопротивления последовательной цепи при встречном включении индуктивно связанных катушек.
- 11 Написать формулу сопротивления взаимной индукции x_M .
- 12 Как рассчитывается коэффициент K индуктивной связи?