$$\boxed{\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b};$$

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[p]{b} =$$ 

Преобразование иррациональных выражений

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m b^n}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

Выражения, содержащие корни, называют **выражения с радикалами** либо **иррациональные выражения**.

Формулы извлечения корня n-й степени:

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad (\sqrt[n]{a^n}) = a;$

2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$

4. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$

6. $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}.$

вы знаете: Способы вынесения множителя из-под знака корня, внесения множителя под знак корня, освобождение дроби от иррациональности в знаменателе.

В предыдущих параграфах данной главы рассмотрены понятия о корне n-й степени, степени с рациональным показателем и ее свойствах. Теперь рассмотрим их использование при тождественных преобразованиях иррациональных выражений.

ПРИМЕР

1. Выполним указанные действия: $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3})$.

Решение. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})(7\sqrt{2}+5\sqrt{3}) = 3\sqrt{2}\cdot 7\sqrt{2} - 2\sqrt{3}\cdot 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\cdot 5\sqrt{3} -$
$- 2\sqrt{3}\cdot 5\sqrt{3} = 21\cdot 2 - 14\sqrt{6} + 15\sqrt{6} - 10\cdot 3 = 12+\sqrt{6}$.

Ответ: $12+\sqrt{6}$.

ПРИМЕР

2. Выполним деление: $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx}$.

Решение. $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx} = 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} : \sqrt[3]{bx} - x\sqrt[3]{b} : \sqrt[3]{bx} =$
$= 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b^2x}} - x\sqrt[3]{\frac{b}{bx}} = 2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

Ответ: $2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

При преобразовании иррациональных выражений иногда необходимо извлечь корень n-й степени из выражения, значение которого может быть положительным или отрицательным.

При извлечении корня n-ой степени из выражения необходимо руководствоваться следующими правилами:

— если n — четное число, то значение корня берется со знаком модуля;

— если n — нечетное число, то значение корня берется без знака модуля.

ПРИМЕР

3. Вычислим значение выражения: $\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что $27+10\sqrt{2}=(\sqrt{2}+5)^2$; $27-10\sqrt{2}=(\sqrt{2}-5)^2$. Отсюда

$$\sqrt{27+10\sqrt{2}}+\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{\left(\sqrt{2}+5\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{2}-5\right)^2}=|\sqrt{2}+5|+|\sqrt{2}-5|=$$
$$=\sqrt{2}+5+5-\sqrt{2}=10.$$

Ответ: 10.

ПРИМЕР

4. Найдем значение выражения: $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}$.

Решение. Первый способ. Возведем данное выражение в квадрат:

$$\left(\sqrt{29-12\sqrt{5}}-\sqrt{29+12\sqrt{5}}\right)^2=29-12\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{\left(29-12\sqrt{5}\right)\left(29+12\sqrt{5}\right)}+29+12\sqrt{5}=$$

$$=58-2\sqrt{841-144\cdot 5}=58-2\sqrt{121}=58-22=36.$$

Следовательно, исходное выражение может быть равно 6 или -6; так как $\sqrt{29+12\sqrt{5}}>\sqrt{29-12\sqrt{5}}$, то данное выражение отрицательно.

Второй способ. Подкоренное выражение является полным квадратом.

$$\sqrt{29-12\sqrt{5}}=\sqrt{29-2\cdot 6\sqrt{5}}=\sqrt{29-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{5}}=\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{5}+3^2}=$$

$$=\sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\right)^2}=\left|2\sqrt{5}-3\right|=2\sqrt{5}-3.$$

Тогда наше выражение преобразуется следующим образом: $\sqrt{29-12\sqrt{5}}-$ $-\sqrt{29+12\sqrt{5}}=2\sqrt{5}-3-(2\sqrt{5}+3)=-6.$

Ответ: -6.

ПРИМЕР

5. Найдем значение выражения:

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+8}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+8}} \text{ при } x=3.$$

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) переменной $(2\sqrt{2}\,;+\infty)$. Вначале упростим данное выражение:

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2-4x\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2+4x\sqrt{2}+\left(2\sqrt{2}\right)^2}}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(x-2\sqrt{2}\right)^2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\sqrt{\left(x+2\sqrt{2}\right)^2}}=$$

$$=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\left|x-2\sqrt{2}\right|}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\left|x+2\sqrt{2}\right|}.$$

В области допустимых значений данного выражения выполняются оба неравенства $x-2\sqrt{2}>0, x+2\sqrt{2}>0$, поэтому можно записать, что $\left|x-2\sqrt{2}\right|=$ $=x-2\sqrt{2}$ и $\left|x+2\sqrt{2}\right|=x+2\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{\left|x-2\sqrt{2}\right|}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{\left|x+2\sqrt{2}\right|}=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}{x-2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}{x+2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}.$$

Поскольку $x=3$ лежит в области допустимых значений, то мы можем определить значение выражения, поставив вместо x его значение 3:

Тогда: $$\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\frac{1}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}=\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}-\frac{1}{\sqrt{\left(\sqrt{2}+1\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{\left(\sqrt{2}\right)^2-1}=2.$$

Ответ: 2.

ПРИМЕР

6. Разложим на множители: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$.

Решение. Используем способ группировки: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b} = (2 - 2\sqrt{ab}) + (b\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2(1 - \sqrt{ab}) + \sqrt{b}(\sqrt{ab} - 1) = 2(1 - \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 - \sqrt{ab}) = (1 - \sqrt{ab}) \cdot (2 - \sqrt{b})$.

Ответ: $(1 - \sqrt{ab})(2 - \sqrt{b})$.

ПРИМЕР

7. Сократим дробь: $\dfrac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение.

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[6]{x^4}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(x + 1 - 2\sqrt{x}\right)} =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[6]{x}\left(1 - \sqrt{x}\right)}$.

При преобразовании некоторых иррациональных выражений можно использовать способ *введения новой переменной.*

ПРИМЕР

9. Докажите тождество при допустимых значениях переменной: $\sqrt{\left(a^2+\frac{4}{a^2}\right)^2-8\left(a+\frac{2}{a}\right)^2+48}=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2$.

Решение. Введем обозначение $a+\frac{2}{a}=t$. Тогда $a^2+\frac{4}{a^2}=t^2-4$.

В этом случае выражение в левой части примет вид:

$$\sqrt{(t^2-4)^2-8t^2+48}=\sqrt{t^4-8t^2+16-8t^2+48}=\sqrt{t^4-16t^2+64}=\sqrt{(t^2-8)^2}=|t^2-8|.$$

Перейдем к первоначальной переменной:

$$\left|\left(a+\frac{2}{a}\right)^2-8\right|=\left|a^2+4+\frac{4}{a^2}-8\right|=\left|a^2-4+\frac{4}{a^2}\right|=\left|\left(a-\frac{2}{a}\right)^2\right|=\left(a-\frac{2}{a}\right)^2.$$

Ответ: $\left(a-\frac{2}{a}\right)^2$.

В отдельных случаях необходимо преобразовать иррациональное выражение, содержащее корень вида $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ (где A, B — положительные рациональные числа, B не является точным квадратом числа). Корень называют *сложным корнем* (*сложным радикалом*). Сложный корень $\sqrt{A+\sqrt{B}}$ может быть преобразован таким образом:

$$\sqrt{A+\sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}. \qquad (1)$$

Для доказательства равенства (1) возведем обе части равенства в квадрат, поскольку все корни арифметические.

Квадрат левой части: $\left(\sqrt{A+\sqrt{B}}\right)^2 = A+\sqrt{B}$.

Квадрат правой части: $\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} + \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2 =$

$$= \frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} + \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2} + 2\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} =$$

$$= A + \sqrt{A^2-\left(A^2-B\right)} = A+\sqrt{B}.$$

Так как при возведении в квадрат левой и правой частей получили одинаковые выражения, то, следовательно, равенство (1) верно.

Аналогично можно получить равенство:

$$\sqrt{A-\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}-\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}} \qquad (2)$$

ПРИМЕР

10. Вычислим значение выражения: $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Решение. Преобразуем второе слагаемое подкоренного выражения: $2\sqrt{2}=\sqrt{2^2\cdot 2}=\sqrt{8}$. Тогда данное выражение примет вид $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, где $A=3$, $B=8$. Теперь, применяя формулу (1), имеем:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{3+\sqrt{8}}=\sqrt{\frac{3+1}{2}}+\sqrt{\frac{3-1}{2}}=\sqrt{2}+1.$$

Ответ: $\sqrt{2}+1$.

Домашнее задание

Упражнения

А

Выполните действия (11.1—11.2):

11.1. 1) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$; 2) $\dfrac{11+\sqrt{21}}{11-\sqrt{21}}+\dfrac{11-\sqrt{21}}{11+\sqrt{21}}$;

3) $\dfrac{1}{11-2\sqrt{30}}-\dfrac{1}{11+2\sqrt{30}}$; 4) $\dfrac{5}{3+2\sqrt{2}}+\dfrac{5}{3-2\sqrt{2}}$.

11.2. 1) $\sqrt[4]{6+\sqrt{20}}\cdot\sqrt[4]{6-\sqrt{20}}$; 2) $\sqrt[4]{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt[4]{4-\sqrt{15}}$;

3) $\left(\sqrt{14}-3\sqrt{2}\right)^2+6\sqrt{28}$; 4) $\left(3\sqrt{5}+\sqrt{15}\right)^2-10\sqrt{27}$.

11.3. Используя формулы сложных корней упростите выражение:

1) $\sqrt{5+\sqrt{24}}$; 2) $\sqrt{6-\sqrt{20}}$; 3) $\sqrt{7-\sqrt{13}}$; 4) $\sqrt{8+\sqrt{28}}$;

5) $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$; 6) $\sqrt{6+3\sqrt{3}}$; 7) $\sqrt{10-2\sqrt{21}}$; 8) $\sqrt{11-2\sqrt{10}}$.

11.4. Упростите выражение: $\left(\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}-3}-\dfrac{\sqrt{m}}{\sqrt{m}+3}\right):\dfrac{2m}{m-6\sqrt{m}+9}$.

$$\sqrt[q]{c^{p}} = c^{p/q}$$

$$\sqrt[n]{|c|}$$

Спасибо за внимание!

$$\sqrt{a^{2}} = |a|,$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{если } n - \text{четное} \\ a, & \text{если } n - \text{нечетное} \end{cases}$$