

$$\boxed{\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a-b} \neq \sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b};$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[p]{b} = \text{☠}$$

Преобразование иррациональных

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad \text{выражений}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[mn]{a^m b^n}$$

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$



Выражения, содержащие корни, называют
выражения с радикалами либо иррациональные
выражения.

Формулы извлечения корня n-й степени:

1. $(\sqrt[n]{a})^n = a, \quad (\sqrt[n]{a^n}) = a;$

2. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b};$

3. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$

4. $(\sqrt[n]{a})^k = \sqrt[n]{a^k};$

5. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a};$

6. $\sqrt[np]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^k}.$

вы знаете:

Способы вынесения множителя из-под знака корня, внесения множителя под знак корня, освобождение дроби от иррациональности в знаменателе.

В предыдущих параграфах данной главы рассмотрены понятия о корне n -й степени, степени с рациональным показателем и ее свойствах. Теперь рассмотрим их использование при тождественных преобразованиях иррациональных выражений.

ПРИМЕР

1. Выполним указанные действия: $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3})$.

Решение. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})(7\sqrt{2} + 5\sqrt{3}) = 3\sqrt{2} \cdot 7\sqrt{2} - 2\sqrt{3} \cdot 7\sqrt{2} + 3\sqrt{2} \cdot 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 21 \cdot 2 - 14\sqrt{6} + 15\sqrt{6} - 10 \cdot 3 = 12 + \sqrt{6}$.

Ответ: $12 + \sqrt{6}$.

ПРИМЕР

2. Выполним деление: $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx}$.

Решение. $\left(2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} - x\sqrt[3]{b}\right) : \sqrt[3]{bx} = 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b}} : \sqrt[3]{bx} - x\sqrt[3]{b} : \sqrt[3]{bx} =$
 $= 2ab\sqrt[3]{\frac{x^2}{b^2x}} - x\sqrt[3]{\frac{b}{bx}} = 2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

Ответ: $2a\sqrt[3]{bx} - \sqrt[3]{x^2}$.

При преобразовании иррациональных выражений иногда необходимо извлечь корень n -й степени из выражения, значение которого может быть положительным или отрицательным.

При извлечении корня n -ой степени из выражения необходимо руководствоваться следующими правилами:

— если n — четное число, то значение корня берется со знаком модуля;

— если n — нечетное число, то значение корня берется без знака модуля.

ПРИМЕР

3. Вычислим значение выражения: $\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$.

Решение. Заметим, что $27 + 10\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 5)^2$; $27 - 10\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 5)^2$. Отсюда

$$\sqrt{27 + 10\sqrt{2}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2} + 5)^2} + \sqrt{(\sqrt{2} - 5)^2} = |\sqrt{2} + 5| + |\sqrt{2} - 5| =$$
$$= \sqrt{2} + 5 + 5 - \sqrt{2} = 10.$$

Ответ: 10.

ПРИМЕР

4. Найдем значение выражения: $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 + 12\sqrt{5}}$.

Решение. Первый способ. Возведем данное выражение в квадрат:

$$\begin{aligned} (\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 + 12\sqrt{5}})^2 &= 29 - 12\sqrt{5} - 2 \cdot \sqrt{(29 - 12\sqrt{5})(29 + 12\sqrt{5})} + 29 + 12\sqrt{5} = \\ &= 58 - 2\sqrt{841 - 144 \cdot 5} = 58 - 2\sqrt{121} = 58 - 22 = 36. \end{aligned}$$

Следовательно, исходное выражение может быть равно 6 или -6; так как $\sqrt{29 + 12\sqrt{5}} > \sqrt{29 - 12\sqrt{5}}$, то данное выражение отрицательно.

Второй способ. Подкоренное выражение является полным квадратом.

$$\begin{aligned} \sqrt{29 - 12\sqrt{5}} &= \sqrt{29 - 2 \cdot 6\sqrt{5}} = \sqrt{29 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5}} = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 3 \cdot 2\sqrt{5} + 3^2} = \\ &= \sqrt{(2\sqrt{5} - 3)^2} = |2\sqrt{5} - 3| = 2\sqrt{5} - 3. \end{aligned}$$

Тогда наше выражение преобразуется следующим образом: $\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} - \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} = 2\sqrt{5} - 3 - (2\sqrt{5} + 3) = -6$.

Ответ: -6.

ПРИМЕР

5. Найдем значение выражения:

$$\frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 - 4x\sqrt{2} + 8}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 + 4x\sqrt{2} + 8}} \text{ при } x = 3.$$

Решение. Область допустимых значений (ОДЗ) переменной $(2\sqrt{2}; +\infty)$. Вначале упростим данное выражение:

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 - 4x\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 + 4x\sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x - 2\sqrt{2})^2}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{(x + 2\sqrt{2})^2}} = \\ & = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{|x - 2\sqrt{2}|} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{|x + 2\sqrt{2}|}. \end{aligned}$$

В области допустимых значений данного выражения выполняются оба неравенства $x - 2\sqrt{2} > 0, x + 2\sqrt{2} > 0$, поэтому можно записать, что $|x - 2\sqrt{2}| = x - 2\sqrt{2}$ и $|x + 2\sqrt{2}| = x + 2\sqrt{2}$. Следовательно,

$$\frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{|x - 2\sqrt{2}|} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{|x + 2\sqrt{2}|} = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{x - 2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{x + 2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}.$$

Поскольку $x = 3$ лежит в области допустимых значений, то мы можем определить значение выражения, поставив вместо x его значение 3:

$$\begin{aligned} \text{Тогда: } & \frac{1}{\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} - \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \\ & = \frac{\sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 1}{(\sqrt{2})^2 - 1} = 2. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

ПРИМЕР

6. Разложим на множители: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b}$.

Решение. Используем способ группировки: $2 + b\sqrt{a} - 2\sqrt{ab} - \sqrt{b} = (2 - 2\sqrt{ab}) + (b\sqrt{a} - \sqrt{b}) = 2(1 - \sqrt{ab}) + \sqrt{b}(\sqrt{ab} - 1) = 2(1 - \sqrt{ab}) - \sqrt{b}(1 - \sqrt{ab}) = (1 - \sqrt{ab}) \cdot (2 - \sqrt{b})$.

Ответ: $(1 - \sqrt{ab})(2 - \sqrt{b})$.

ПРИМЕР

7. Сократим дробь: $\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение.
$$\frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1) - 2\sqrt[6]{x^4}} = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(x+1-2\sqrt{x})} =$$

$$= \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}(1 - \sqrt{x})^2} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}(1 - \sqrt{x})}$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt[6]{x}(1 - \sqrt{x})}$.

При преобразовании некоторых иррациональных выражений можно использовать способ *введения новой переменной*.

ПРИМЕР

9. Докажите тождество при допустимых значениях пере-

менной:
$$\sqrt{\left(a^2 + \frac{4}{a^2}\right)^2 - 8\left(a + \frac{2}{a}\right)^2 + 48} = \left(a - \frac{2}{a}\right)^2.$$

Решение. Введем обозначение $a + \frac{2}{a} = t$. Тогда $a^2 + \frac{4}{a^2} = t^2 - 4$.

В этом случае выражение в левой части примет вид:

$$\sqrt{(t^2 - 4)^2 - 8t^2 + 48} = \sqrt{t^4 - 8t^2 + 16 - 8t^2 + 48} = \sqrt{t^4 - 16t^2 + 64} = \sqrt{(t^2 - 8)^2} = |t^2 - 8|.$$

Перейдем к первоначальной переменной:

$$\left| \left(a + \frac{2}{a}\right)^2 - 8 \right| = \left| a^2 + 4 + \frac{4}{a^2} - 8 \right| = \left| a^2 - 4 + \frac{4}{a^2} \right| = \left| \left(a - \frac{2}{a}\right)^2 \right| = \left(a - \frac{2}{a}\right)^2.$$

Ответ: $\left(a - \frac{2}{a}\right)^2$.

В отдельных случаях необходимо преобразовать иррациональное выражение, содержащее корень вида $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ (где A, B — положительные рациональные числа, B не является точным квадратом числа). Корень называют *сложным корнем (сложным радикалом)*. Сложный корень $\sqrt{A + \sqrt{B}}$ может быть преобразован таким образом:

$$\sqrt{A + \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}. \quad (1)$$


Для доказательства равенства (1) возведем обе части равенства в квадрат, поскольку все корни арифметические.

Квадрат левой части: $(\sqrt{A + \sqrt{B}})^2 = A + \sqrt{B}.$

Квадрат правой части: $\left(\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} + \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}\right)^2 =$

$$= \frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2} + \frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2} + 2\sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \cdot \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} =$$

$$= A + \sqrt{A^2 - (A^2 - B)} = A + \sqrt{B}.$$

Так как при возведении в квадрат левой и правой частей получили одинаковые выражения, то, следовательно, равенство (1) верно. 

Аналогично можно получить равенство:

$$\sqrt{A - \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} - \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}} \quad (2)$$

ПРИМЕР

10. Вычислим значение выражения: $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$.

Решение. Преобразуем второе слагаемое подкоренного выражения:

$2\sqrt{2} = \sqrt{2^2 \cdot 2} = \sqrt{8}$. Тогда данное выражение примет вид $\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}$, где $A = 3$, $B = 8$. Теперь, применяя формулу (1), имеем:

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{\frac{3+1}{2}} + \sqrt{\frac{3-1}{2}} = \sqrt{2} + 1.$$

Ответ: $\sqrt{2} + 1$.

Домашнее задание

Упражнения

А

Выполните действия (11.1—11.2):

11.1. 1) $\frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}};$

2) $\frac{11 + \sqrt{21}}{11 - \sqrt{21}} + \frac{11 - \sqrt{21}}{11 + \sqrt{21}};$

3) $\frac{1}{11 - 2\sqrt{30}} - \frac{1}{11 + 2\sqrt{30}};$

4) $\frac{5}{3 + 2\sqrt{2}} + \frac{5}{3 - 2\sqrt{2}}.$

11.2. 1) $\sqrt[4]{6 + \sqrt{20}} \cdot \sqrt[4]{6 - \sqrt{20}};$

2) $\sqrt[4]{4 + \sqrt{15}} \cdot \sqrt[4]{4 - \sqrt{15}};$

3) $(\sqrt{14} - 3\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{28};$

4) $(3\sqrt{5} + \sqrt{15})^2 - 10\sqrt{27}.$

11.3. Используя формулы сложных корней упростите выражение:

1) $\sqrt{5 + \sqrt{24}};$

2) $\sqrt{6 - \sqrt{20}};$

3) $\sqrt{7 - \sqrt{13}};$

4) $\sqrt{8 + \sqrt{28}};$

5) $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}};$

6) $\sqrt{6 + 3\sqrt{3}};$

7) $\sqrt{10 - 2\sqrt{21}};$

8) $\sqrt{11 - 2\sqrt{10}}.$

11.4. Упростите выражение: $\left(\frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m} - 3} - \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m} + 3}\right) : \frac{2m}{m - 6\sqrt{m} + 9}.$

$$\sqrt[q]{c^p} = c^{p/q}$$

$$\sqrt[n]{|c|}$$

Спасибо
за внимание!

$$\sqrt{a^2} = |a|,$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a|, & \text{если } n \text{ — четное} \\ a, & \text{если } n \text{ — нечетное} \end{cases}$$