Дифференциальные уравнения (продолжение)

План лекции

I. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными (примеры)
II. Линейные однородные уравнения 1-ого порядка.
III. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.
IV. Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-ого порядка с постоянными коэффициентами.

I. Примеры

1. $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$

Найти общий интеграл.

Поделим обе части на $(x+1)^3 \cdot (y-2)^2 \neq 0$
чтобы разделить переменные.

$$\frac{dy}{(y-2)^2} - \frac{dx}{(x+1)^3} = 0$$ Проинтегрируем обе части:

$$\int \frac{dy}{(y-2)^2} - \int \frac{dx}{(x+1)^3} = C \quad (C - const) \Rightarrow$$

$$\int (y-2)^{-2} \cdot d(y-2) - \int (x+1)^{-3} \cdot d(x+1) \Rightarrow$$

$$-\frac{1}{y-2} + \frac{1}{2(x+1)^2} = C$$ - общий интеграл

После нехитрых преобразований можно разрешить это уравнение относительно у и получить общее решение.

2. $y = y' \cos^2 x \ln y$

Перепишем уравнение, заменив y' на $\dfrac{dy}{dx}$:

$$y = \frac{dy}{dx} \cos^2 x \ln y \quad \Big| \cdot dx$$

$$y dx = \cos^2 x \ln y \, dy \quad \Big| \; : y \cos^2 x \neq 0$$

$$\frac{dx}{\cos^2 x} = \ln y \cdot \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{\ln y dy}{y} \Rightarrow$$

$$\mathrm{tg} x = \int \ln y d(\ln y) \Rightarrow \mathrm{tg} x = \frac{1}{2} \ln^2 y + C$$ - общий интеграл

3. $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$

Приведем уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, вынося общие множители за скобки:

$$y(1+x)dx+x(1-y)dy=0 \qquad |:(yx)$$

$$\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0 \;\Rightarrow\; \int\frac{1+x}{x}dx+\int\frac{1-y}{y}dy=C \;\Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=C \;\Rightarrow$$

$$\int\frac{dx}{x}+\int dx+\int\frac{dy}{y}-y=C \;\Rightarrow$$

$\ln|x|+x+\ln|y|-y=C$ - общий интеграл

4. Найти частный интеграл уравнения

удовлетворяющий начальному условию

$$ydx + \text{ctg}x \cdot dy = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

Найдем вначале общий интеграл.

$$ydx + \text{ctg}x \cdot dy = 0 \qquad | : (y\text{ctg}x \neq 0)$$

$$\frac{dx}{\text{ctg}x} + \frac{dy}{y} = 0 \Rightarrow \int \text{tg}x dx + \int \frac{dy}{y} = C \quad \Rightarrow$$

$$-\ln|\cos x| + \ln|y| = C \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{\cos x}\right| = C \quad \Rightarrow$$

$$\left|\frac{y}{\cos x}\right| = e^c \Rightarrow \left|\frac{y}{\cos x}\right| = C_1 \Rightarrow \frac{y}{\cos x} = \pm C_1 \quad \Rightarrow$$

$$\frac{y}{\cos x} = C_2 \quad \Rightarrow \quad y = C_2 \cos x$$ - общее решение

$$\left(C_1 = e^c \ , C_2 = \pm C_1\right).$$

Используя начальное условие, подставляем в общее решение значения

$$x = \frac{\pi}{3}, \ \ y = -1$$

$$-1 = C_2 \cos\frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad C_2 = -2$$

Найденное значение константы C_2 подставляем в общее решение

$$y = -2\cos x$$ - искомое частное решение

<u>II. Линейные однородные дифференциальные уравнения 1-ого порядка.</u>

Дифференциальное уравнение называется **<u>линейным</u>**, если оно линейно (т.е. первой степени) относительно искомой функции y и её производной y'

Общий вид линейного уравнения:

$$y' + P(x) \cdot y = Q(x)$$

Рассмотрим случай однородного уравнения, когда $Q(x) = 0$, т.е.:

$$y' + P(x) \cdot y = 0$$

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = 0 \mid \cdot \frac{dx}{dy} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} + P(x)dx = 0$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} + \int P(x) = C \Rightarrow \ln|y| + \int P(x)dx = C$$

$$\ln|y| = C - \int P(x)dx \Rightarrow |y| = e^{C-\int P(x)dx} \Rightarrow$$

$$|y| = e^{C} \cdot e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y \pm C_1 \cdot e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow$$

$$y = C_2 e^{-\int P(x)dx}$$

(здесь $C_1 = e^{C}, C_2 = \pm C_1$)

<u>Пример.</u>

$y' - y\mathrm{ctg}x = 0$ Найти общее решение.

Здесь $P(x) = -\mathrm{ctg}x$ и тогда

$$y = Ce^{\int \mathrm{ctg}x dx} \Rightarrow y = C^{\ln|\sin x|} \Rightarrow y = C|\sin x| \Rightarrow$$

$y = \pm C \sin x \Rightarrow y = C_1 \sin x$ - искомое общее решение

$(C_1 = \pm C)$

III. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

Уравнение вида $y^{(n)} = f(x)$ решается последовательным n-кратным интегрированием.

Умножаем обе части уравнения на dx:

$$y^{(n)}dx = f(x)dx$$

Интегрируем:

$$\int y^{(n)}dx = \int f(x)dx$$

Получаем уравнение (n-1)-го порядка:

$y^{(n-1)} = F_1(x) + C_1$, где $F_1(x)$ первообразная для f(x)

Снова умножаем обе части на dx и интегрируем:

$y^{(n-2)} = \int (F_1(x) + C_1)dx$ или

$y^{(n-2)} = F_2(x) + C_1 x + C_2$ и т.д.

Общее решение будет зависеть от n произвольных констант

Пример.

$$y''' = 60x^2 \quad \Big| \cdot dx$$

$$y'''dx = 60x^2 dx \Rightarrow \int y'''dx = \int 60x^2 dx$$

$$y'' = 60\int x^2 dx \Rightarrow y'' = 60 \cdot \frac{x^3}{3} + C_1$$

$$y'' = 20x^3 + C_1 \quad \Big| \cdot dx \Rightarrow$$

$$y''dx = (20x^3 + C_1)dx \Rightarrow \int y''dx = \int (20x^3 + C_1)dx$$

$$y' = 5x^4 + C_1 x + C_2 \quad \Big| \cdot dx$$

$$y'dx = (5x^4 + C_1 x + C_2)dx \Rightarrow \int y'dx = \int (5x^4 + C_1 x + C_2)dx$$

$$y = x^5 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

IV. Линейные однородные дифференциальные уравнения II-ого порядка с постоянными коэффициентами.

Такими уравнениями называются уравнения вида:

$$a_0 y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \qquad (1)$$

в котором все члены имеют первую степень относительно функции и её производных, а коэффициенты a_0, a_1, a_2 - постоянные $(a_0 \neq 0)$

Для отыскания общего решения уравнения составляется **характеристическое** уравнение:

$$a_0 r^2 + a_1 r + a_2 = 0 \qquad (2)$$

которое получается из уравнения (1) заменой в нём производных искомой функции соответствующими степенями r, причём сама функция заменяется единицей.

Общее решение имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

где y_1 и y_2 - линейно независимые частные решения уравнения **(1)**,

а C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Строится общее решение в зависимости от дискриминанта D квадратного уравнения **(2):**

1) $D > 0$

В этом случае имеем 2 различных действительных корня r_1 и r_2 , и общее решение имеет вид:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$$

2) $D = 0$

В этом случае имеем единственный действительный корень r_0 , и общее решение имеет вид: $y = (C_1 + C_2 x) e^{r_0 x}$

3) $D < 0$

В этом случае имеем пару комплексных сопряженных корней $r_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ где $i = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, α и β - действительные числа.

Общее решение имеет вид:

$$y = e^{\alpha x} \cdot \left(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x\right)$$

<u>Примеры выделения чисел α и β :</u>

1. $r_{1,2} = -2 \pm \sqrt{-5} = -2 \pm \sqrt{5 \cdot (-1)} = -2 \pm \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1} =$

$= -2 \pm \sqrt{5} \cdot i \quad \Rightarrow \quad \alpha = -2, \quad \beta = \sqrt{5}$

2. $r_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \quad \Rightarrow$

$\alpha = \dfrac{1}{2}, \quad \beta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Примеры интегрирования уравнений

1. $y'' - 5y' - 6y = 0$, $y = y(x)$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 - 5r - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} r_1 = 6 \\ r_2 = -1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad D > 0$$

Имеем случай 1) $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^{-x}$ - общее решение

2. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$, $y = y(x)$

Характеристическое уравнение:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; (r+2)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; r = -2 \Rightarrow D = 0.$$

Имеем случай 2). Общее решение запишется:

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{-2x}$$

3. $$\frac{d^2S}{dt^2}-6\frac{dS}{dt}+13S=0 \quad , \ S=S(t).$$

Характеристическое уравнение:

$$r^2-6r+13=0\,, \qquad D=36-52=-16<0.$$ Имеем случай 3).

$$r_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{-16}}{2}=\frac{6}{2}\pm\frac{4\cdot\sqrt{-1}}{2}=3\pm 2i \ \Rightarrow\ \alpha=3,\ \beta=2.$$

Общее решение:

$$S=e^{3t}\left(C_1\cos 2t+C_2\sin 2t\right)$$

4. Найти частное решение уравнения $y''+2y'+2y=0$

с начальными условиями $y(0)=1,\ y'(0)=1.$

Найдём общее решение. Характеристическое уравнение:

$$r^2+2r+2=0,\quad D=2^2-4\cdot 1\cdot 2=-4<0 \ \Rightarrow$$

имеем 2 комплексных корня

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{-4}}{2}=-\frac{2}{1}\pm\frac{2\sqrt{-1}}{2}=-1\pm i \ \Rightarrow\ \alpha=-1,\ \beta=1$$

Общее решение:

$$y = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) \quad - \quad *$$

$$y' = e^{-x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right) + e^{-x}\left(-C_1 \sin x + C_2 \cos x\right)$$

В эти 2 равенства подставляем 2 начальных условия

$$x = 0,\ \ y = 1 \qquad x = 0,\ \ y' = 1:$$

$$\begin{cases} 1 = e^{0}\left(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) \\ 1 = e^{0}\left(C_2 \cos 0 + C_2 \sin 0\right) + e^{0}\left(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0\right) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 1 = -C_1 + C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 2 \end{cases}$$

Найденные значения C_1 и C_2 подставляем в общее решение $(*)$:

$$y = e^{-x}\left(\cos x + 2\sin x\right)$$ - искомое частное решение.