

Элементы теории фредгольмовых отображений

<https://vk.com/fredholm>

11. Нелинейные фредгольмовы отображения

Рассмотрим отображение $f : E \rightarrow F$ (E, F – БП).

Пусть для любого $x \in E$ существует производная Фреше $f'(x) : E \rightarrow F$, являющаяся фредгольмовым оператором, причем $f'(x)$ непрерывна по x (как операторное отображение $f' : E \rightarrow L(E, F)$). Тогда отображение f называется **фредгольмовым отображением**.

Заметим, что, в силу того, что любые две точки $x_1, x_2 \in E$ можно соединить отрезком
 $\{(1-t)x_1 + tx_2 \mid t \in [0,1]\} \subset E$, $\operatorname{ind} f'(x_1) = \operatorname{ind} f'(x_2)$ (т. к. множество $\{f'((1-t)x_1 + tx_2)\}_{t \in [0,1]} \subset \Phi(E, F)$ является линейно связным, индекс на этом множестве постоянен). Таким образом, $\operatorname{ind} f'(x) = \operatorname{const}$ (на E), и это постоянное значение индекса называется **индексом фредгольмова отображения f** .

12. Фредгольмовы функционалы

Определение. Если значениями отображения являются числа, то отображение называется *функционалом*.

Рассмотрим гладкий функционал V на банаховом пространстве E . Предположим, что E непрерывно вложено в банахово пространство F , F непрерывно вложено в гильбертово пространство H и E плотно в H .

Замечание 1. Говорят, что банахово пространство E непрерывно вложено в банахово пространство F , если:

- 1) E является подмножеством F ;
- 2) из сходимости последовательности $\{x_n\} \subset E$ по норме пространства E следует сходимость этой последовательности по норме пространства F .

Замечание 2. Говорят, что пространство E плотно в пространстве H , если замыкание E по норме H совпадает с H , то есть для любой точки $a \in H$ существует последовательность $\{x_n\} \subset E$, сходящаяся к a по норме H .

Предположим также, что задано отображение
 $f : E \rightarrow F$, такое, что

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \langle f(x), h \rangle \quad \forall x \in E, \forall h \in E$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в ГП H).

Отображение $f : E \rightarrow F$ называется *градиентом функционала* V и обозначается $grad V$.

В этом случае говорят, что функционал V обладает *градиентной реализацией* в тройке пространств $\{E, F, H\}$.

Определение. Точка $x_0 \in E$ называется *критической точкой* функционала V , если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0)h = \langle f(x_0), h \rangle = 0$$

для любого $h \in E$.

Лемма. Точка $x_0 \in E$ является критической точкой функционала тогда и только тогда, когда $f(x_0) = 0$.

Доказательство.

Достаточность очевидна.

Необходимость. Если x_0 – критическая точка функционала V , то $\langle f(x_0), h \rangle = 0$ при всех $h \in E$.

В силу плотности E в H , существует последовательность $\{h_n\} \subset E$, сходящаяся к $f(x_0) \in F$ по норме H .

Учитывая, что $\langle f(x_0), h_n \rangle = 0$ при любом n , и используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим:

$$\begin{aligned} \|f(x_0)\|_H^2 &= \langle f(x_0), f(x_0) \rangle = |\langle f(x_0), f(x_0) \rangle - \langle f(x_0), h_n \rangle| = \\ &= |\langle f(x_0), f(x_0) - h_n \rangle| \leq \|f(x_0)\|_H \cdot \|f(x_0) - h_n\|_H \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Так как число $\|f(x_0)\|_H^2$ от n не зависит, то

$$\|f(x_0)\|_H^2 = 0. \text{ Таким образом, } f(x_0) = 0.$$

Лемма доказана.

Определение. Функционал V называется *фредгольмовым*, если его градиент $f : E \rightarrow F$ является фредгольмовым отображением. При этом *индексом функционала* V называют индекс отображения f .

13. Вычисление градиентов некоторых функционалов

Во всех рассматриваемых ниже примерах
 $H = L_2[0,1]$, E , F – вещественные банаховы линейные
пространства, E линейно и непрерывно вложено в F , F
линейно и непрерывно вложено в H .

Пример 1. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \frac{1}{2} \int_0^1 (Ax)x dt,$$

где $x \in E$, $A : E \rightarrow F$ – симметрический линейный непрерывный оператор (оператор называется *симметрическим*, если $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in E$).

Вычислим градиент функционала V .

Рассмотрим приращение функционала V :

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) &= \frac{1}{2} \langle A(x+h), x+h \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим приращение функционала V :

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) &= \frac{1}{2} \langle A(x+h), x+h \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle. \end{aligned}$$

В силу симметричности оператора A ,

$$\langle Ah, x \rangle = \langle h, Ax \rangle = \langle Ax, h \rangle.$$

Следовательно,

$$V(x+h) - V(x) = \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle.$$

Таким образом, $\text{grad}V(x) = Ax$, если $\langle Ah, h \rangle = o(\|h\|_E)$.

Используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим: $|<Ah, h>| \leq \|Ah\|_H \cdot \|h\|_H$.

Следовательно, $\frac{|<Ah, h>|}{\|h\|_E} \leq \|Ah\|_H \cdot \frac{\|h\|_H}{\|h\|_E} \leq k_1 \cdot k_2 \cdot \|Ah\|_H \leq$

$$\leq k_1 \cdot k_2 \cdot k_2 \cdot \|Ah\|_F \leq k_1 \cdot k_2^2 \cdot \|A\| \cdot \|h\|_E \rightarrow 0 \quad \text{при } \|h\|_E \rightarrow 0,$$

так как $\|h\|_F \leq k_1 \|h\|_E$, $\|h\|_H \leq k_2 \|h\|_F$

(в силу непрерывности вложений E в F и F в H).

Итак, $<Ah, h> = o(\|h\|_E)$.

Следовательно, $\text{grad } V(x) = Ax$.

