Элементы теории фредгольмовых отображений

https://vk.com/fredholm

11. Нелинейные фредгольмовы отображения

Рассмотрим отображение $f : E \to F$ (E, F – БП). Пусть для любого $x \in E$ существует производная Фреше $f'(x) : E \to F$, являющаяся фредгольмовым оператором, причем $f'(x)$ непрерывна по x (как операторное отображение $f' : E \to \mathrm{L}(E, F)$). Тогда отображение f называется **фредгольмовым отображением.**

Заметим, что, в силу того, что любые две точки $x_1, x_2 \in E$ можно соединить отрезком $\{(1-t)x_1 + tx_2 \mid t \in [0,1]\} \subset E$, $\operatorname{ind} f'(x_1) = \operatorname{ind} f'(x_2)$ (т. к. множество $\{f'((1-t)x_1 + tx_2)\}_{t\in[0,1]} \subset \Phi(E,F)$ является линейно связным, индекс на этом множестве постоянен). Таким образом, $\operatorname{ind} f'(x) = const$ (на E), и это постоянное значение индекса называется **индексом фредгольмова отображения f.**

12. Фредгольмовы функционалы

Определение. Если значениями отображения являются числа, то отображение называется *функционалом*.

Рассмотрим гладкий функционал V на банаховом пространстве E. Предположим, что E непрерывно вложено в банахово пространство F, F непрерывно вложено в гильбертово пространство H и E плотно в H.

Замечание 1. Говорят, что банахово пространство E непрерывно вложено в банахово пространство F, если:

1) E является подмножеством F;

2) из сходимости последовательности $\{x_n\} \subset E$ по норме пространства E следует сходимость этой последовательности по норме пространства F.

Замечание 2. Говорят, что пространство E плотно в пространстве H, если замыкание E по норме H совпадает с H, то есть для любой точки $a \in H$ существует последовательность $\{x_n\} \subset E$, сходящаяся к a по норме H.

Предположим также, что задано отображение $f : E \to F$, такое, что

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = < f(x), h > \quad \forall x \in E, \forall h \in E$$

($< \cdot , \cdot >$ – скалярное произведение в ГП H).

Отображение $f : E \to F$ называется *градиентом функционала* V и обозначается $grad V$.

В этом случае говорят, что функционал V обладает *градиентной реализацией* в тройке пространств $\{E, F, H\}$.

Определение. Точка $x_0 \in E$ называется *критической точкой* функционала V, если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0)h = < f(x_0), h > = 0$$

для любого $h \in E$.

Лемма. Точка $x_0 \in E$ является критической точкой функционала тогда и только тогда, когда $f(x_0) = 0$.

Доказательство.

Достаточность очевидна.

Необходимость. Если x_0 – критическая точка функционала V, то $< f(x_0), h > = 0$ при всех $h \in E$.

В силу плотности E в H, существует последовательность $\{h_n\} \subset E$, сходящаяся к $f(x_0) \in F$ по норме H.

Учитывая, что $< f(x_0), h_n > = 0$ при любом n, и используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим:

$$\|f(x_0)\|_H^2 = < f(x_0), f(x_0) > = \left| < f(x_0), f(x_0) > - < f(x_0), h_n > \right| =$$

$$= \left| < f(x_0), f(x_0) - h_n > \right| \le \|f(x_0)\|_H \cdot \|f(x_0) - h_n\|_H \to 0$$

при $n \to \infty$.

Так как число $\|f(x_0)\|_H^2$ от n не зависит, то $\|f(x_0)\|_H^2 = 0$. Таким образом, $f(x_0) = 0$.

Лемма доказана.

Определение. Функционал V называется ***фредгольмовым***, если его градиент $f : E \to F$ является фредгольмовым отображением. При этом *индексом функционала* V называют индекс отображения f.

13. Вычисление градиентов некоторых функционалов

Во всех рассматриваемых ниже примерах $H = L_2[0,1]$, E, F – вещественные банаховы линейные пространства, E линейно и непрерывно вложено в F, F линейно и непрерывно вложено в H.

Пример 1. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2} < Ax, x > = \frac{1}{2}\int_0^1 (Ax)x\,dt,$$

где $x \in E$, $A: E \to F$ – симметрический линейный непрерывный оператор (оператор называется *симметрическим*, если $< Ax, y > = < x, Ay >$ $\forall\, x, y \in E$).

Вычислим градиент функционала V.

Рассмотрим приращение функционала V:

$$V(x+h) - V(x) = \frac{1}{2} < A(x+h), x+h > - \frac{1}{2} < Ax, x > =$$

$$= \frac{1}{2} < Ax, h > + \frac{1}{2} < Ah, x > + \frac{1}{2} < Ah, h >.$$

Рассмотрим приращение функционала V:

$$V(x+h)-V(x) = \frac{1}{2}<A(x+h),\, x+h> - \frac{1}{2}<Ax,\, x> =$$

$$= \frac{1}{2}<Ax,\, h> + \frac{1}{2}<Ah,\, x> + \frac{1}{2}<Ah,\, h>.$$

В силу симметричности оператора A, $<Ah,\, x> = <h, Ax> = <Ax,\, h>$.

Следовательно, $V(x+h)-V(x) = <Ax,\, h> + \frac{1}{2}<Ah,\, h>.$

Таким образом, $gradV(x) = Ax$, если $<Ah,\, h> = o(\|h\|_E)$.

Используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим: $\left|< Ah, h >\right| \le \|Ah\|_H \cdot \|h\|_H$.

Следовательно, $\dfrac{\left|< Ah, h >\right|}{\|h\|_E} \le \|Ah\|_H \cdot \dfrac{\|h\|_H}{\|h\|_E} \le k_1 \cdot k_2 \cdot \|Ah\|_H \le$

$\le k_1 \cdot k_2 \cdot k_2 \cdot \|Ah\|_F \le k_1 \cdot k_2^2 \cdot \|A\| \cdot \|h\|_E \to 0$ при $\|h\|_E \to 0$,

так как $\|h\|_F \le k_1 \|h\|_E$, $\|h\|_H \le k_2 \|h\|_F$

(в силу непрерывности вложений E в F и F в H).

Итак, $< Ah, h > = o(\|h\|_E)$.

Следовательно, $grad\, V(x) = Ax$.