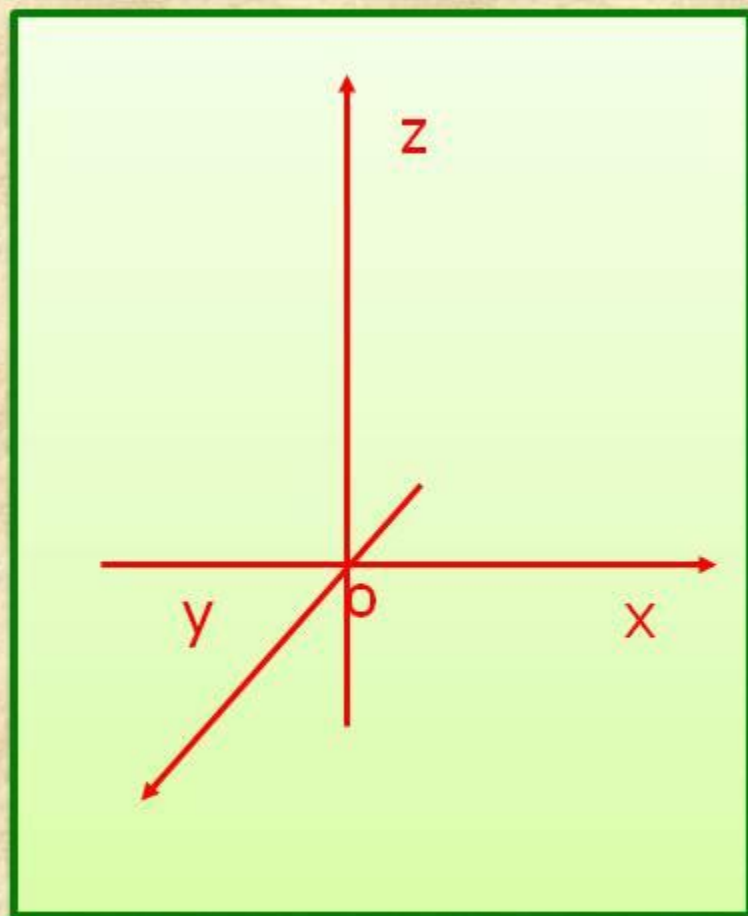


Прямоугольная (декартова)
система координат в
пространстве.

Формула расстояния между
двумя точками.

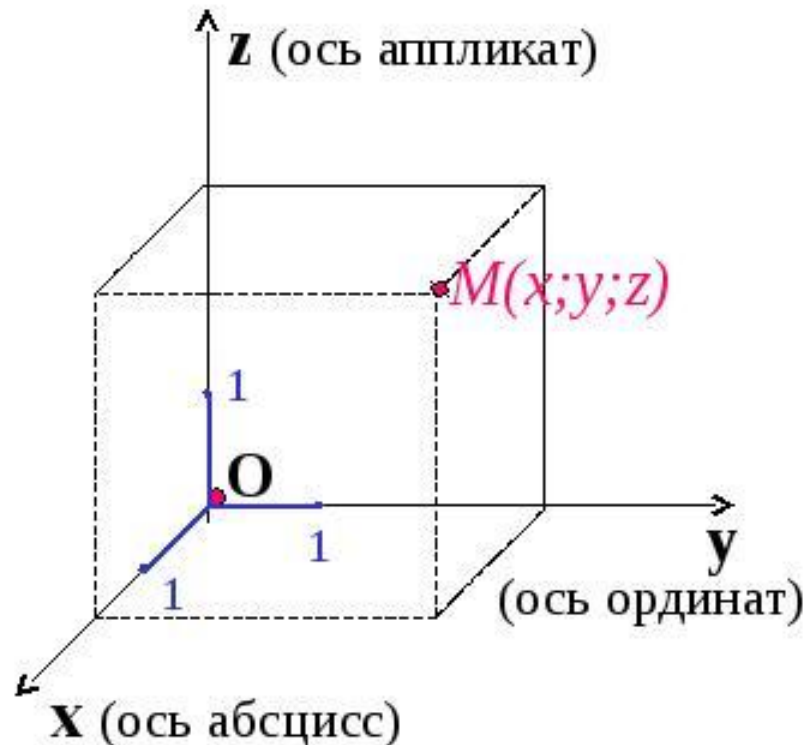
Декартова система координат



- система координат на плоскости или в пространстве, обычно с взаимно перпендикулярными осями и одинаковыми масштабами по осям - прямоугольные декартовы координаты. Названа по имени Р. Декарта.



Система координат в пространстве



- ✓ Каждой точке пространства сопоставляется тройка чисел $(x; y; z)$, где
 x -абсцисса точки,
 y -ордината точки,
 z -аппликата точки

8

Базис на плоскости и в пространстве.**Координаты вектора**

Линейным операциям над векторами

$$\bar{a} = (a_1; a_2; a_3) \quad \text{и} \quad \bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$$

$$1. \quad \bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$2. \quad \bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$3. \quad \lambda \bar{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$$

Если заданы координаты начала и конца вектора

$$A = (x_1; x_2; x_3) \quad \text{и} \quad B = (y_1; y_2; y_3)$$

тогда координаты вектора вычисляются:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; y_3 - x_3)$$

Длина вектора

$$A_1(x_1, y_1, z_1), A_2(x_2, y_2, z_2)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$|\overline{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Скалярное произведение векторов

$$\square \quad \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$$

Зная координаты векторов $\vec{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2; z_2)$, скалярное произведение можно рассчитать так:

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Тогда угол между двумя векторами можно рассчитать по формуле:

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Косинус угла между векторами

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\cos \alpha = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2} \sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2 + (z_2)^2}}$$

Пример 1

Вычислить угол между векторами:

1) $\vec{a} \{2; -2; 0\}$ и $\vec{b} \{4; 0; -4\}$

2) $\vec{a} \{-3; -3; 0\}$ и $\vec{b} \{\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$

Решение:

$$1) \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{2 \cdot 4 - 2 \cdot 0 - 4 \cdot 0}{\sqrt{4 + 4} \cdot \sqrt{16 + 16}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = \frac{1}{2}, \widehat{\vec{a} \vec{b}} \text{ — острый угол,}$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 60^\circ$$

$$2) \cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-3 \cdot \sqrt{2} - 3 \cdot \sqrt{2} + 0 \cdot 2}{\sqrt{9 + 9} \cdot \sqrt{2 + 2 + 4}} = \frac{-6\sqrt{2}}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

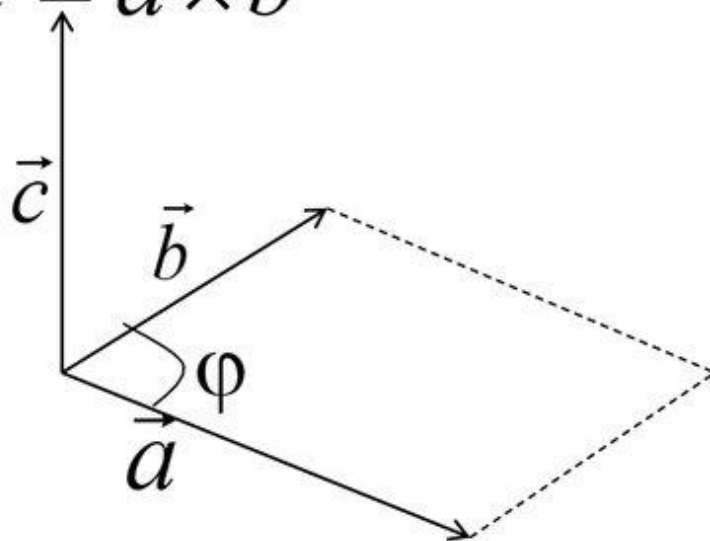
$$\cos(\widehat{\vec{a} \vec{b}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \widehat{\vec{a} \vec{b}} \text{ — тупой угол,}$$

$$\widehat{\vec{a} \vec{b}} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$$

Ответ: 1) 60° ; 2) 135°

Векторное произведение векторов:

- Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$



- Геометрическим смыслом длины векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах \vec{a} \vec{b}
-

Векторное произведение векторов

- Если заданы векторы

$$\vec{a} (x_a, y_a, z_a) \text{ и } \vec{b} (x_b, y_b, z_b)$$

в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

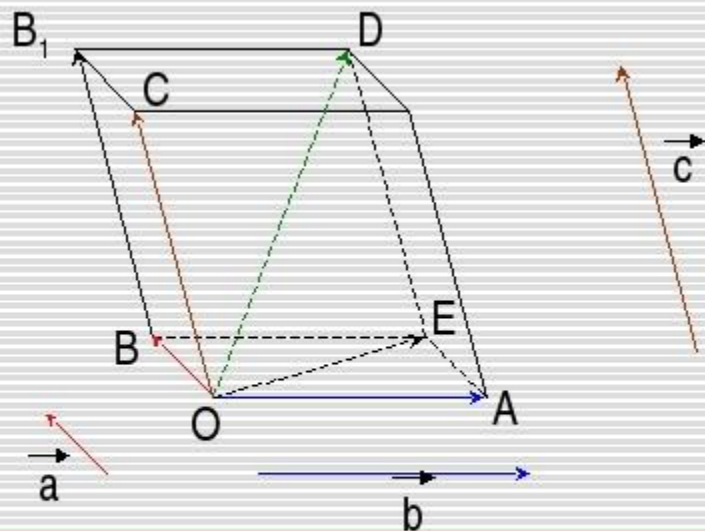
Условие коллинеарности двух векторов

Векторы $a = (x_1, y_1, z_1)$ и $b = (x_2, y_2, z_2)$
коллинеарны тогда и только тогда, когда их
соответствующие координаты
пропорциональны, т.е. когда справедливо
равенство

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Компланарные векторы

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же они будут лежать в одной плоскости.



$\vec{BB_1}$, \vec{OD} и \vec{OE} компланарны,
так как если отложить от точки O
Вектор, равный $\vec{BB_1}$, то получится
Вектор \vec{OC} , а векторы \vec{OC} , \vec{OD} и \vec{OE}
Лежат в одной плоскости OCE