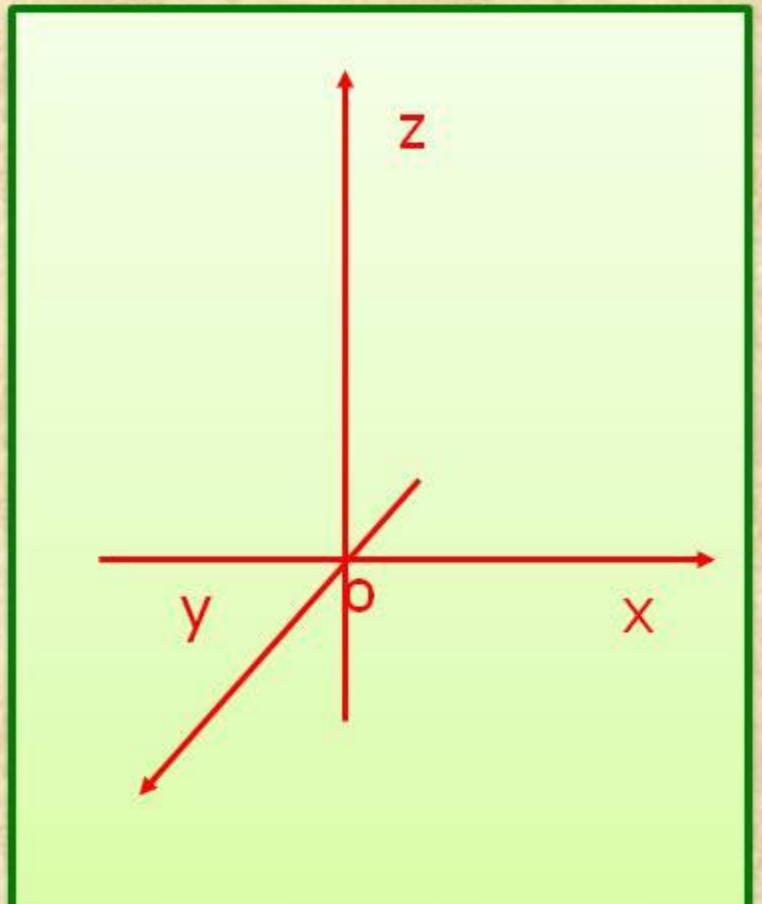
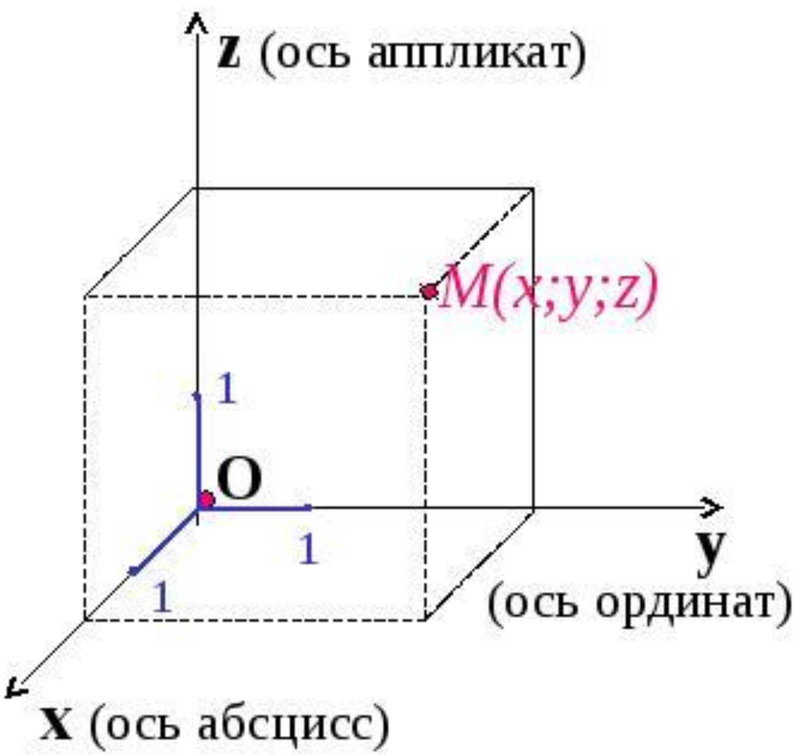
Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве. Формула расстояния между двумя точками.

Декартова система координат



- система координат на плоскости или в пространстве, обычно с взаимно перпендикулярными осями и одинаковыми масштабами по осям - прямоугольные декартовы координаты. Названа по имени Р. Декарта.

Система координат в пространстве



- Каждой точке пространства сопоставляется тройка чисел *(x;y;z)*, где

  x-абсцисса точки,

  y-ордината точки,

  z-аппликата точки

Базис на плоскости и в пространстве. Координаты вектора

Линейным операциям над векторами

$\bar{a} = (a_1; a_2; a_3)$ и $\bar{b} = (b_1; b_2; b_3)$

1. $\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$

2. $\bar{a} - \bar{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$

3. $\lambda \bar{a} = (\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)$

Если заданы координаты начала и конца вектора

$A = (x_1; x_2; x_3)$ и $B = (y_1; y_2; y_3)$

тогда координаты вектора вычисляются:

$$\bar{a} = \overline{AB} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; y_3 - x_3)$$

Длина вектора

$$A_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\ A_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

$$|\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Скалярное произведение векторов

- $$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}})$$

Зная координаты векторов $\vec{\mathrm{a}}(\mathrm{x}_1; \mathrm{y}_1; \mathrm{z}_1)$ и $\vec{\mathrm{b}}(\mathrm{x}_1; \mathrm{y}_2; \mathrm{z}_2)$, скалярное произведение можно рассчитать так:

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Тогда угол между двумя векторами можно рассчитать по формуле:

$$\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

Косинус угла между векторами

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \overrightarrow{|a|} \cdot |\vec{b}| cos\alpha$$

$$\vec{a} \cdot \overrightarrow{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

$$\cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\overrightarrow{|a|}|\vec{b}|}$$

$$cos\alpha = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2}\sqrt{(x_2)^2 + (y_2)^2 + (z_2)^2}}$$

Пример 1

Вычислить угол между векторами:

1) $\vec{a}\,\{2; -2; 0\}$ и $\vec{b}\,\{4; 0; -4\}$

2) $\vec{a}\,\{-3; -3; 0\}$ и $\vec{b}\,\{\sqrt{2}; \sqrt{2}; 2\}$

Решение:

$$1)\ \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{2\cdot 4 - 2\cdot 0 - 4\cdot 0}{\sqrt{4+4}\cdot\sqrt{16+16}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \frac{1}{2}$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ — острый угол, $\boxed{\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 60°}$

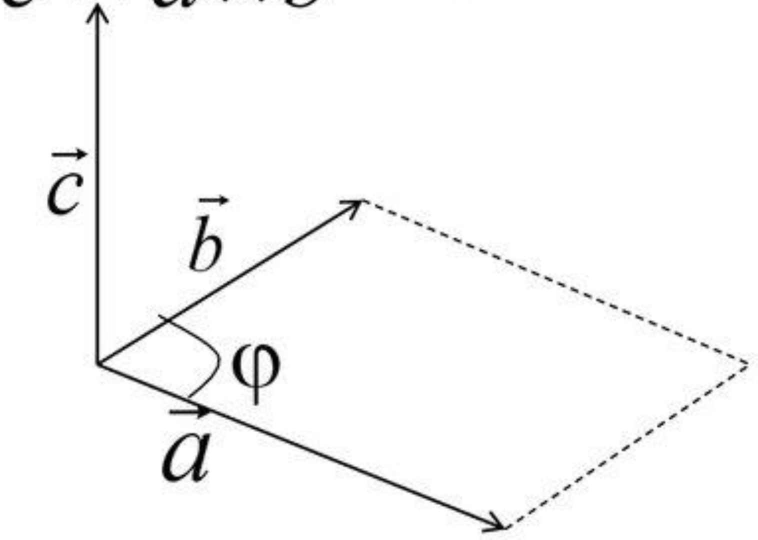
$$2)\ \cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} = \frac{-3\cdot\sqrt{2} - 3\cdot\sqrt{2} + 0\cdot 2}{\sqrt{9+9}\cdot\sqrt{2+2+4}} = \frac{-6\sqrt{2}}{12} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\cos(\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\widehat{\vec{a}\,\vec{b}}$ — тупой угол, $\boxed{\widehat{\vec{a}\,\vec{b}} = 180° - 45° = 135°}$

Ответ: 1) 60°; 2) 135°

Векторное произведение векторов:

- Обозначается: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ или $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$



- Геометрическим смыслом длины векторного произведения векторов является площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ $\vec{b}$

Векторное произведение векторов

- Если заданы векторы

$\vec{a}\ (x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b}\ (x_b, y_b, z_b)$

в декартовой прямоугольной системе координат с единичными векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, то

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

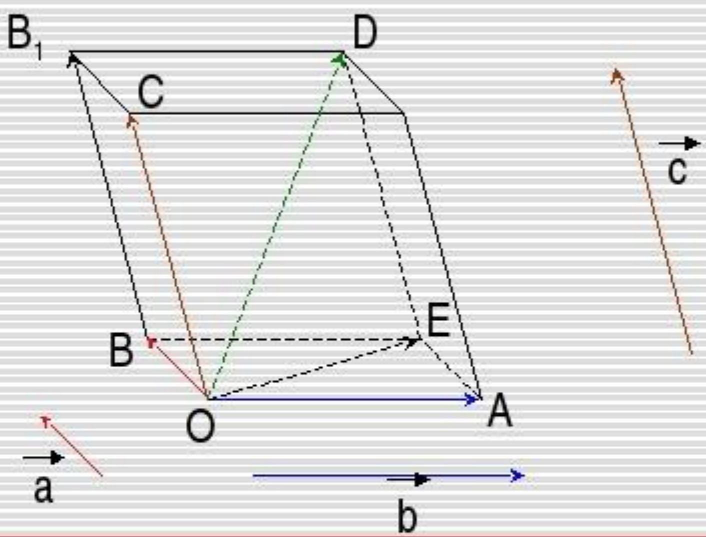
Условие коллинеарности двух векторов

Векторы $a = (x_1, y_1, z_1)$ и $b = (x_2, y_2, z_2)$ **коллинеарны** тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е. когда справедливо равенство

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

Компланарные векторы

Векторы называются компланарными, если при откладывании их от одной и той же они будут лежать в одной плоскости.



$\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$ компланарны,
так как если отложить от точки О
Вектор, равный $\overrightarrow{BB_1}$, то получится
Вектор $\overrightarrow{OC}$, а векторы $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{OE}$
Лежат в одной плоскости ОСЕ