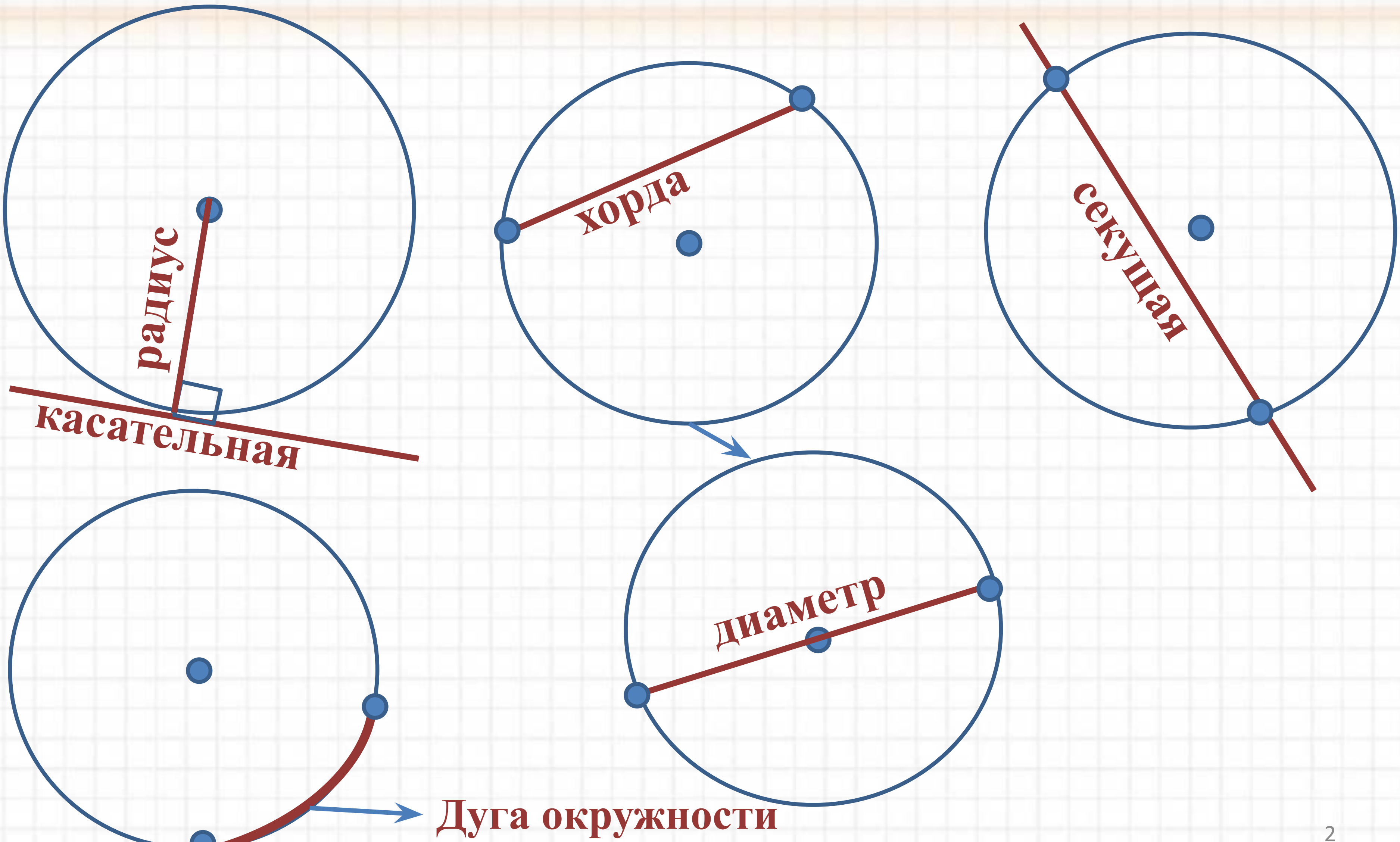
Линии и углы в окружности

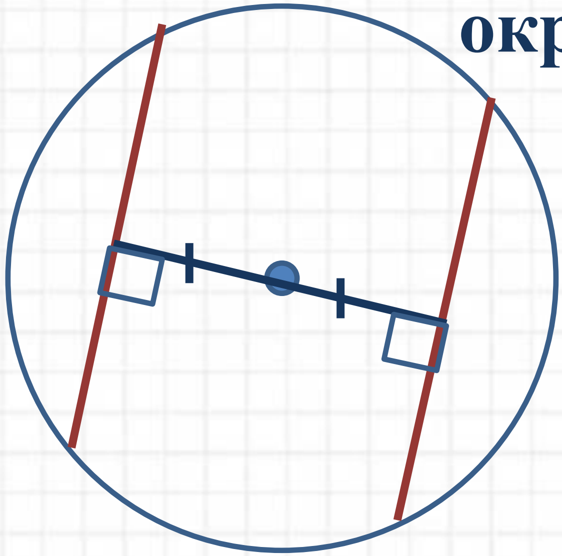
Автор: И.А.Громова, учитель математики
МБОУ СОШ № 7 г.Шарья Костромской области

О линиях… Нам известно…



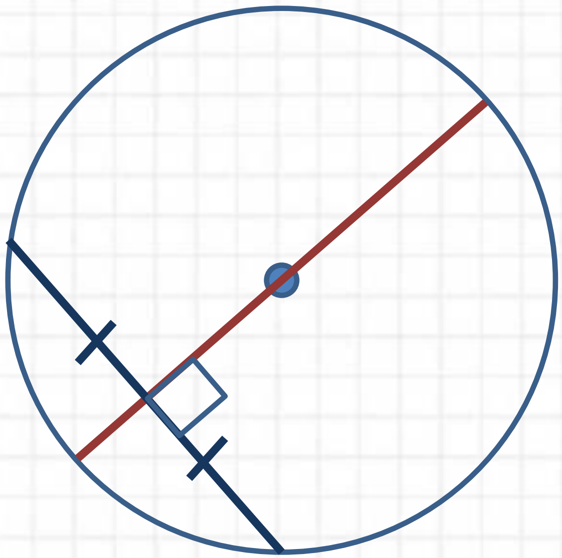
О линиях в окружности…

Если хорды равноудалены от центра окружности,



то они равны

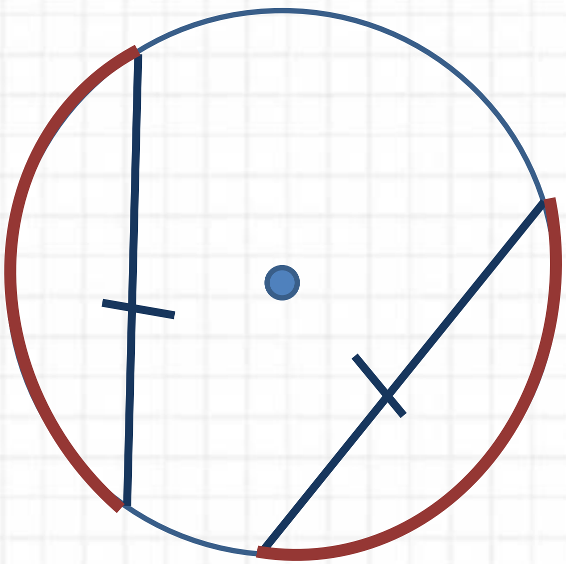
Если диаметр делит хорду пополам,



то он перпендикулярен данной хорде

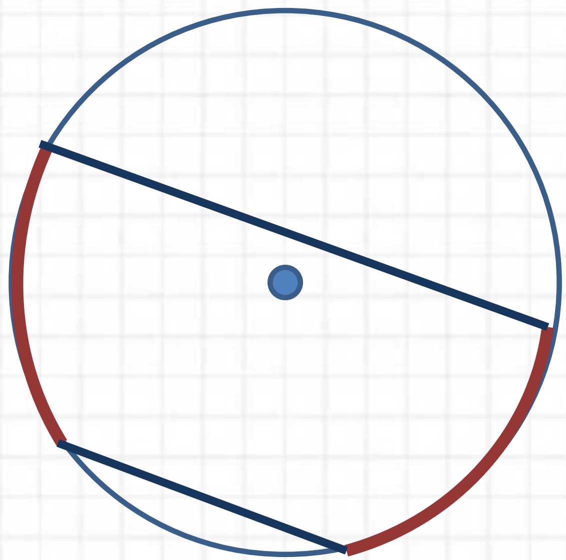
О линиях в окружности…

Равные дуги стягиваются



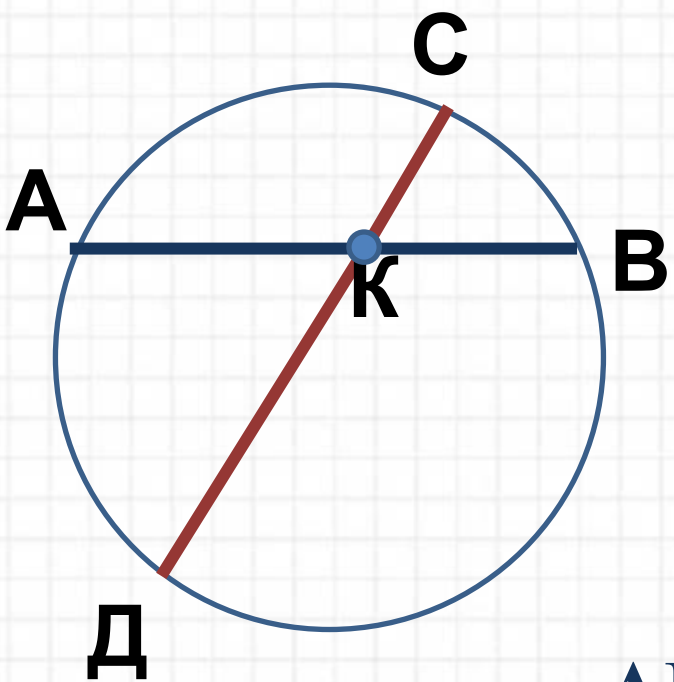
равными хордами

Дуги, заключенные между параллельными хордами,



равны

О линиях в окружности…



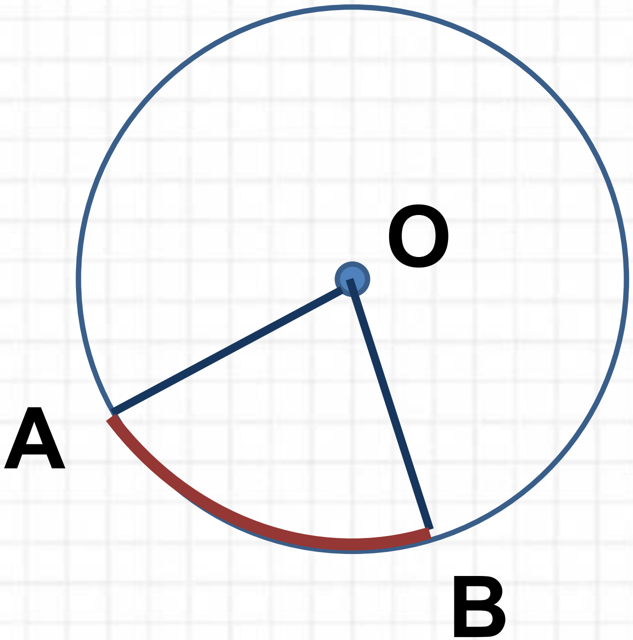
Произведение отрезков **одной** из двух пересекающихся **хорд** равно произведению отрезков **другой хорды**

$$AK \cdot KB = CK \cdot KД$$

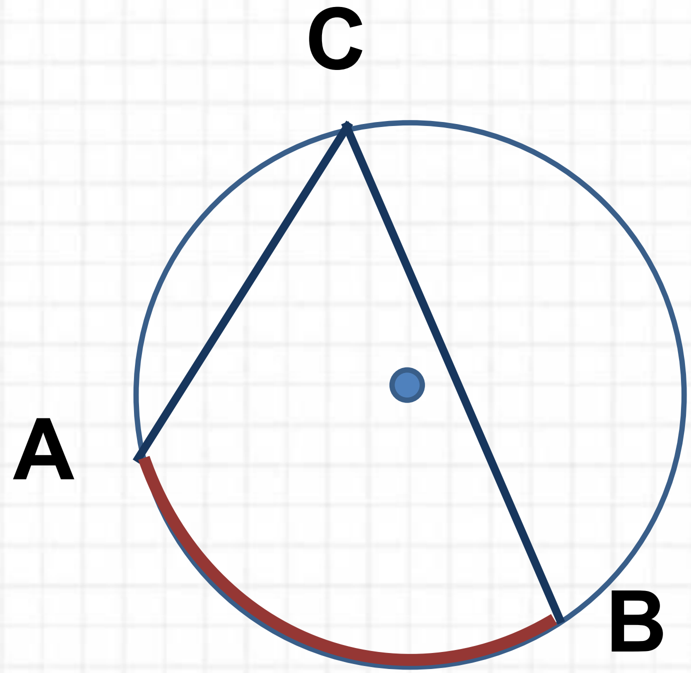
Об углах…   Нам известно…

Об углах в окружности…

Градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается



$\angle AOB = \smile AB$

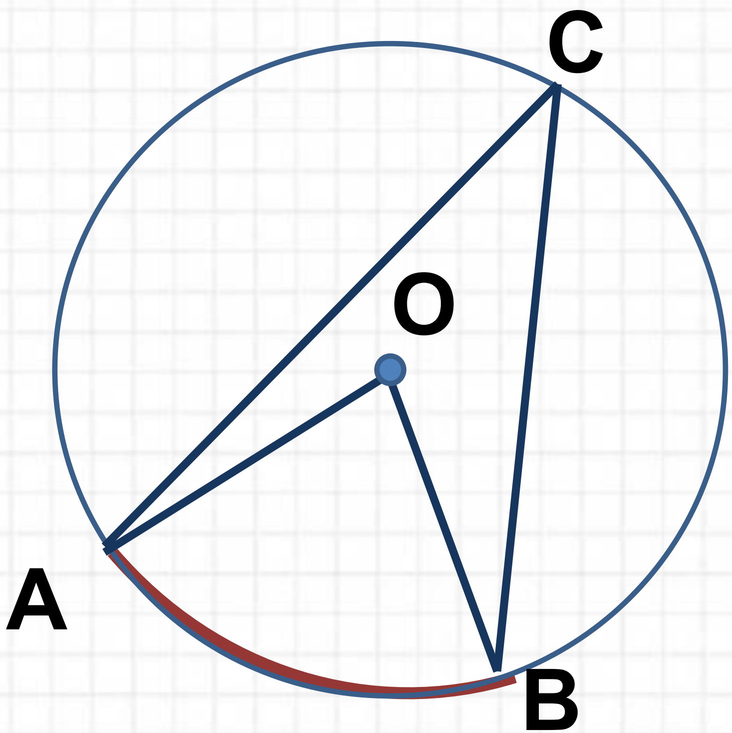


Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается

$\angle ACB = \smile \frac{1}{2} AB$

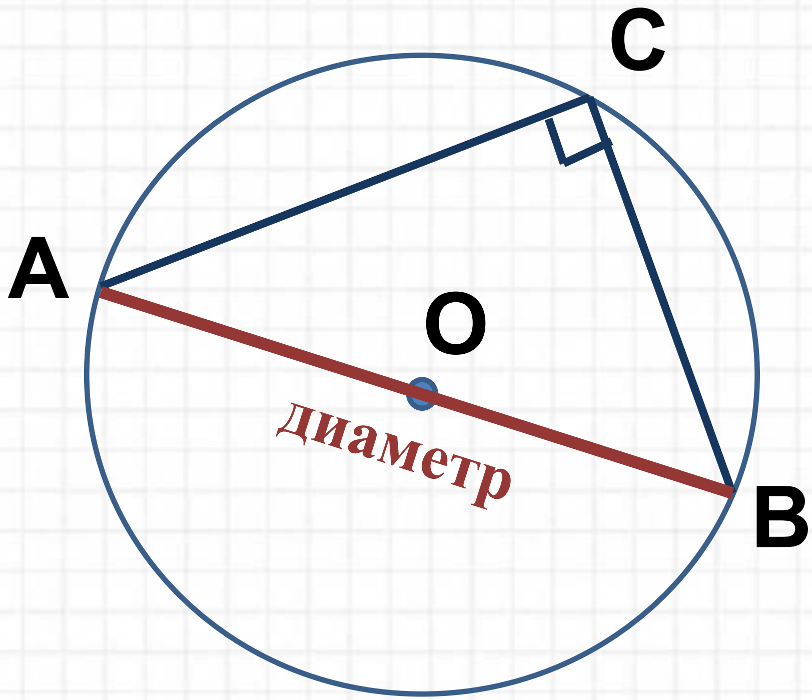
Об углах в окружности…

Вписанный и центральный углы, опираются на одну дугу



$\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$

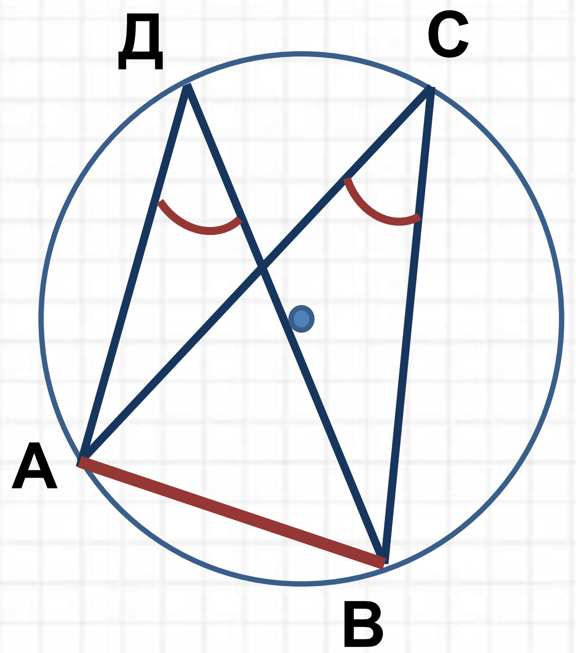
Вписанный угол, опирающийся на полуокружность - прямой



$\angle ACB = 90°$

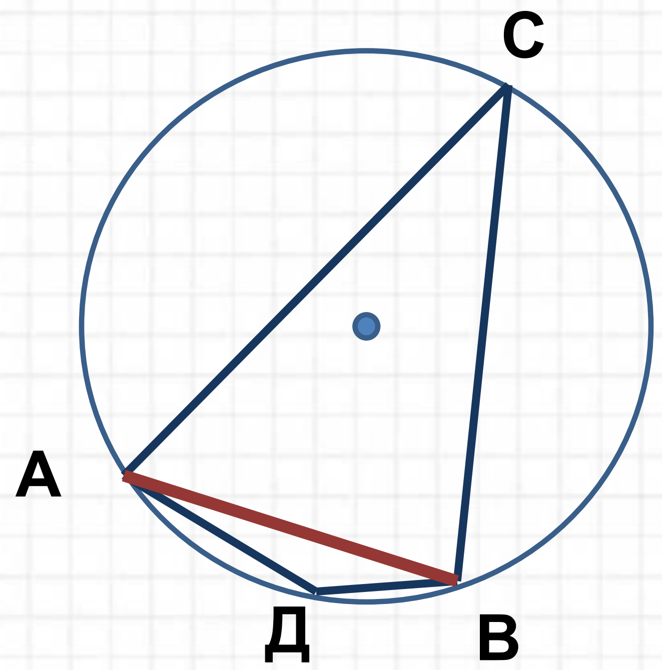
Об углах в окружности…

Вписанные углы опираются на одну хорду, вершины – по одну сторону от хорды



$\angle ACB = \angle ADB$

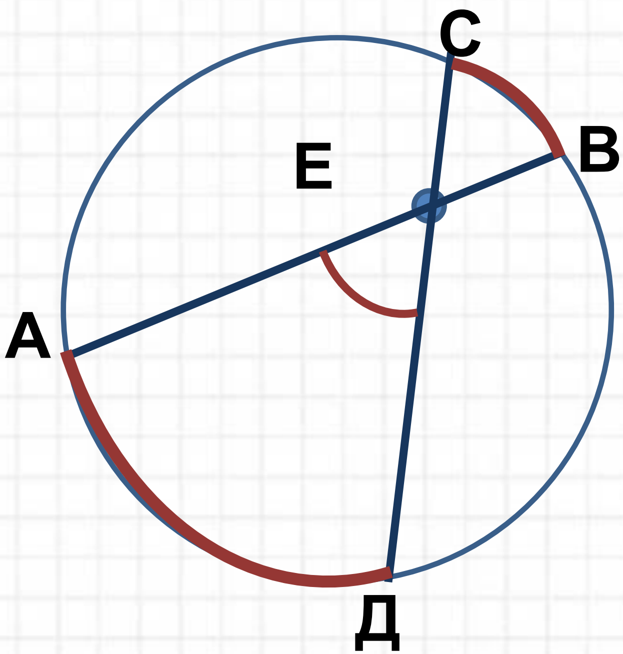
Вписанные углы опираются на одну хорду, вершины – по разные стороны от хорды



$\angle ACB + \angle ADB = 180°$

Теоремы об углах и не только…

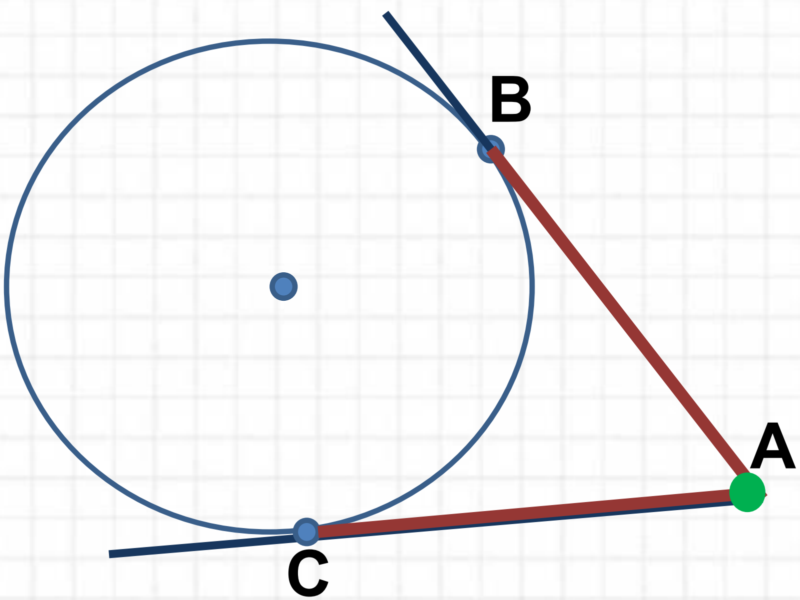
Угол между двумя пересекающимися хордами



измеряется полусуммой заключенных между ними дуг

$\angle АЕД = \frac{1}{2}(\smile АД + \smile ВС)$

Если из одной точки проведены две касательные,

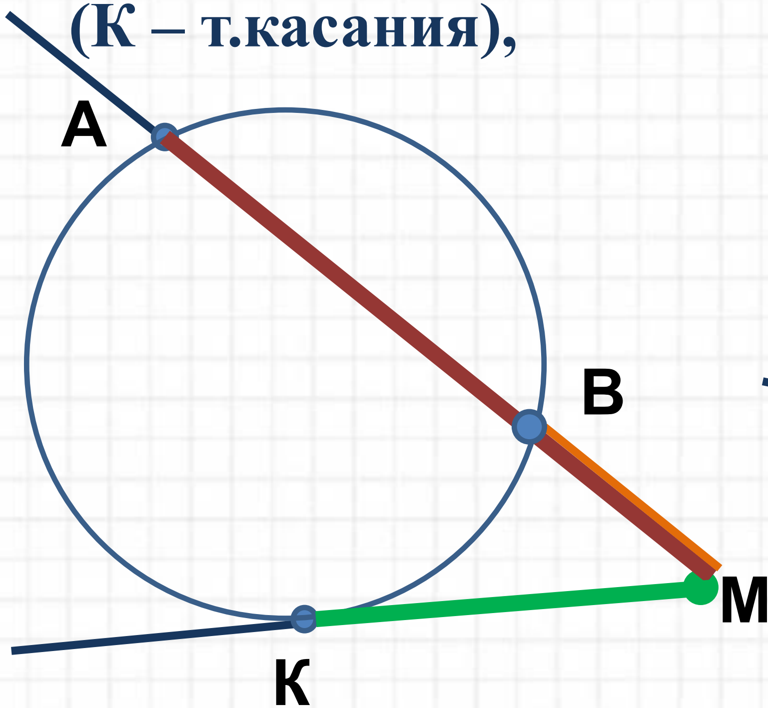


то отрезки касательных равны между собой

$АВ = АС$

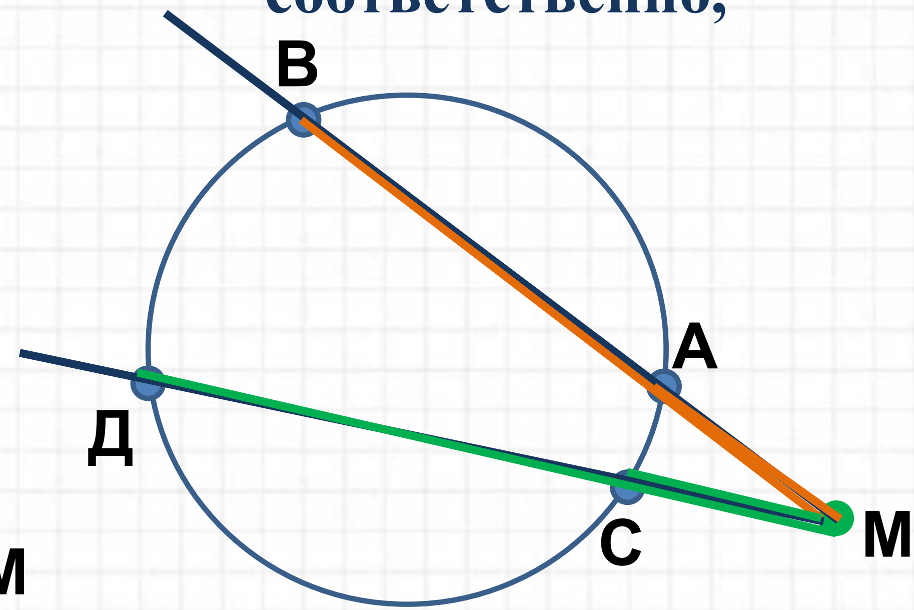
Теоремы об отрезках

Если через т. М проведены **секущая**, пересекающая Окр. в точках А и В, **и касательная** МК (К – т.касания),



то $MA \cdot MB = MK^2$

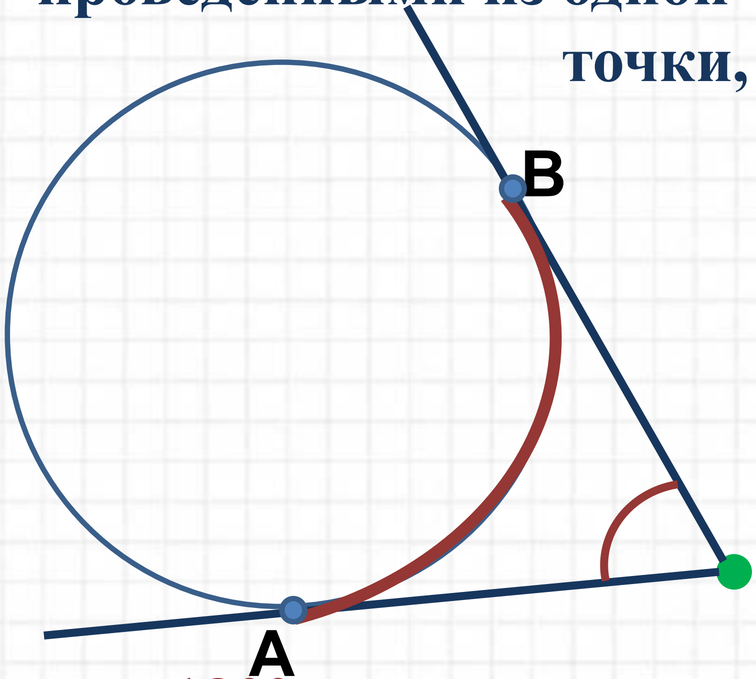
Если из т. М проведены две **секущие**, пересекающие Окр. в точках А и В, С и Д соответственно,



то $MA \cdot MB = MC \cdot MД$

Теоремы об углах

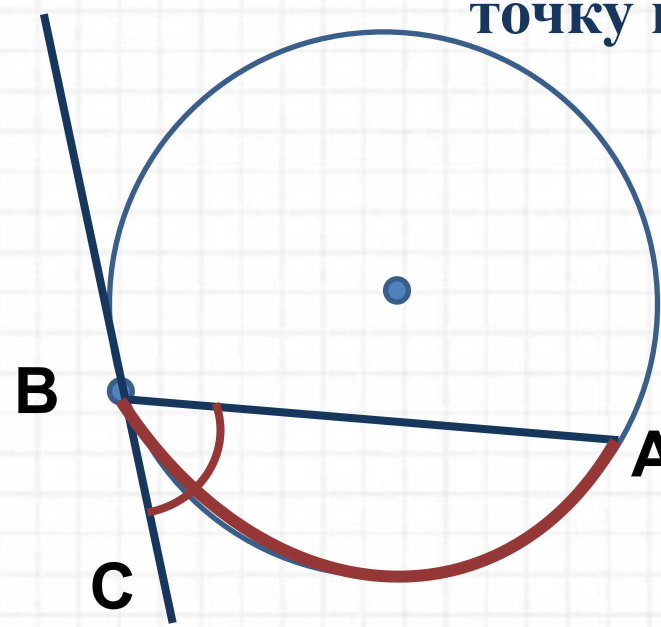
Угол между касательными, проведенными из одной точки,



равен 180° минус величина дуги меньшей полуокружности, заключенной между касательными

$$\angle AMB = \frac{1}{2}(180° - \smile AB)$$

Угол между касательной и хордой, проходящей через точку касания,

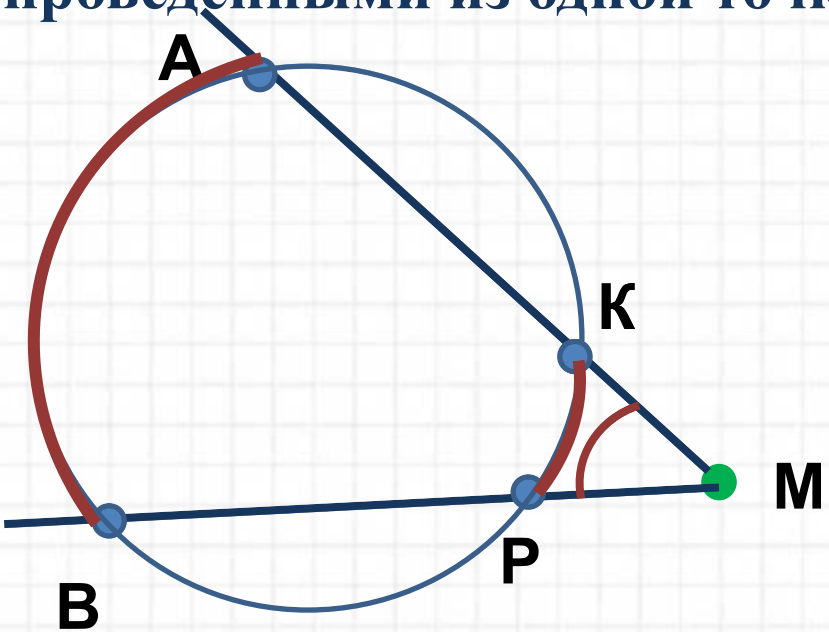


измеряется половиной заключенной в нем дуги

$$\angle ABC = \frac{1}{2} \smile AB$$

Теоремы об углах

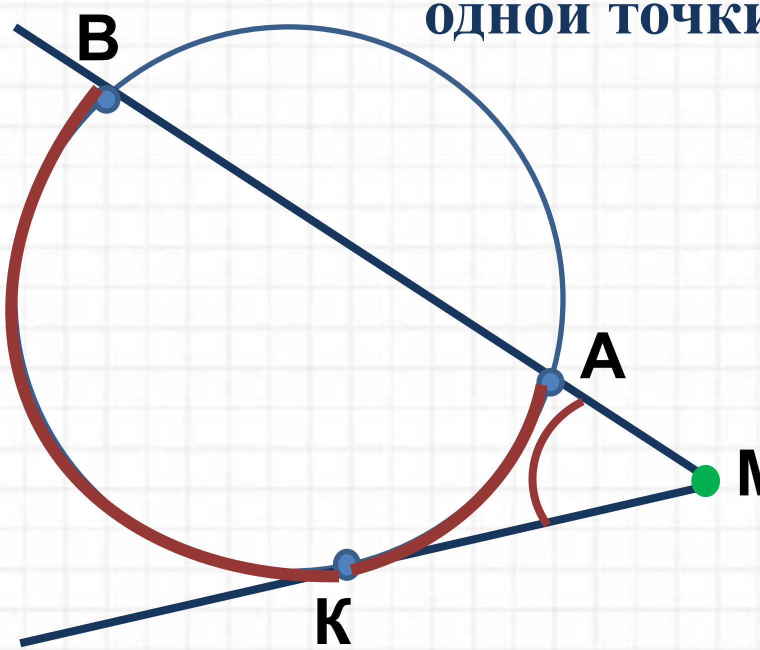
Угол между секущими, проведенными из одной точки,



измеряется полуразностью заключенных внутри него дуг

$$\angle AMB=\frac{1}{2}(\smile AB-\smile PK)$$

Угол между касательной и секущей, проведенными из одной точки,



измеряется полуразностью заключенных внутри него дуг

$$\angle BMK=\frac{1}{2}(\smile BK-\smile AK)$$

Проверь себя…

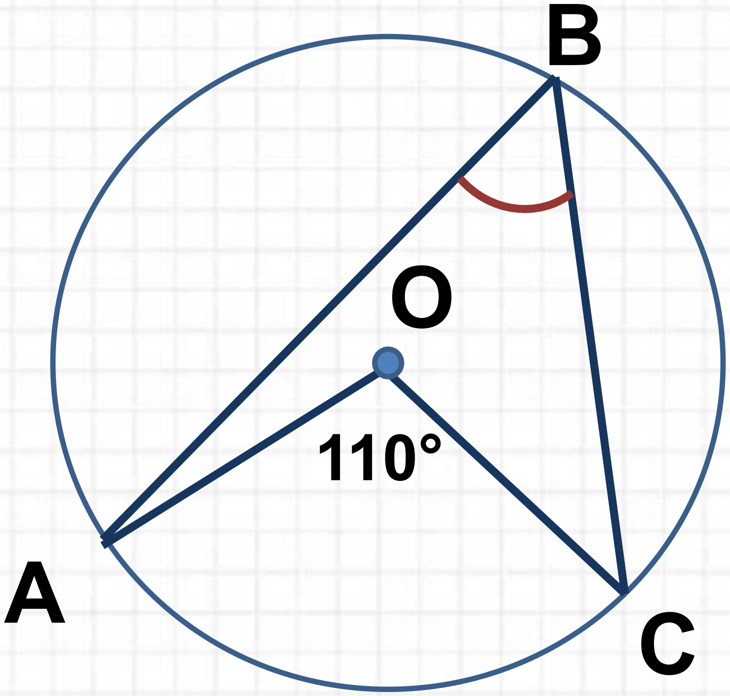
Ответы

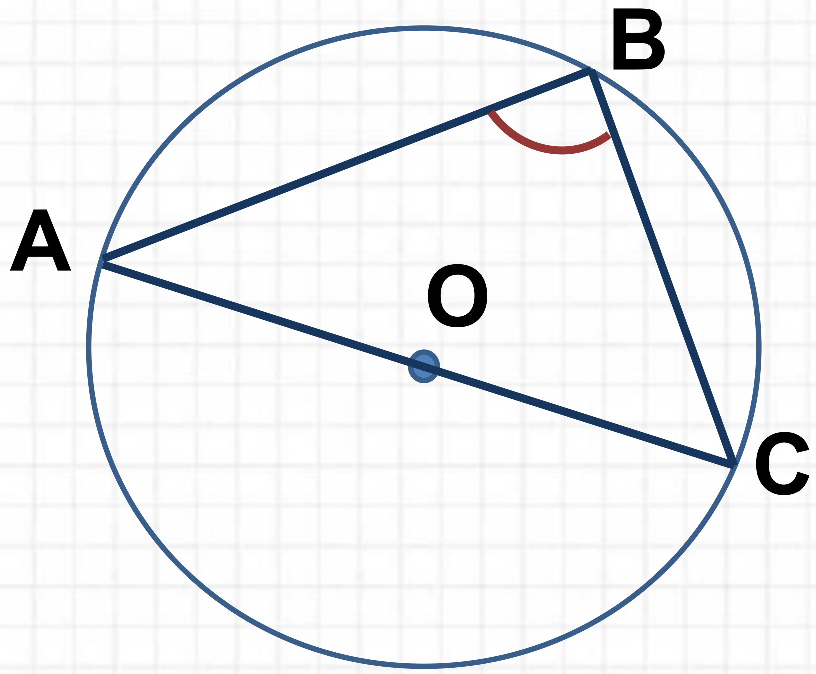
1. Нет
2. Да
3. Нет
4. Нет
5. Нет
6. Нет
7. Да
8. Да

1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны.
2. Если вписанный угол равен 30°, то дуга окружности, на которую опирается этот угол, равна 60°.
3. Если дуга окружности составляет 80°, то центральный угол, опирающийся на эту же дугу, равен 40°.
4. Вписанные углы окружности равны.
5. Если вписанный угол равен 30°, то центральный угол равен 60°.
6. Вписанный угол в два раза меньше центрального угла.
7. Вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой.
8. Если вершины вписанных углов, опирающихся на одну хорду, лежат по одну сторону от данной хорды, то эти вписанные углы равны.

Тренировочные задачи

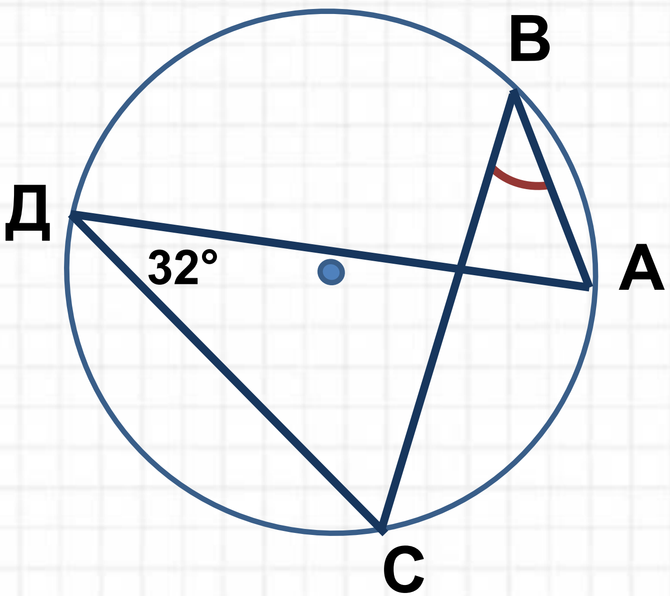
Найти градусную меру угла **ABC** (О – центр окружности)

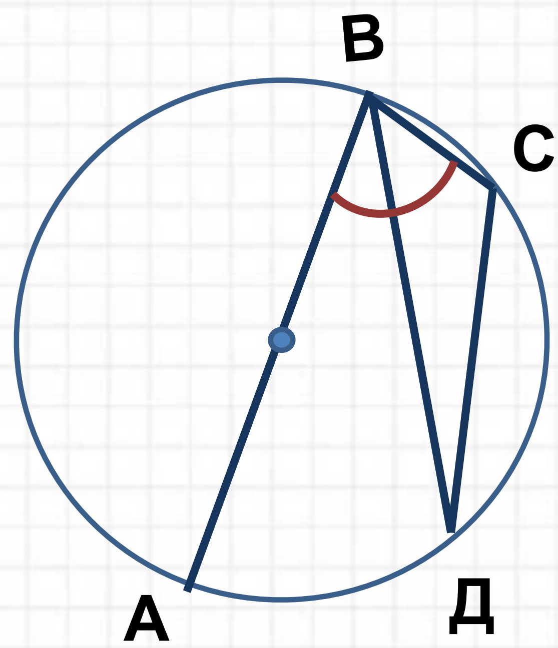




Тренировочные задачи

Найти градусную меру угла **АВС** (О – центр окружности)

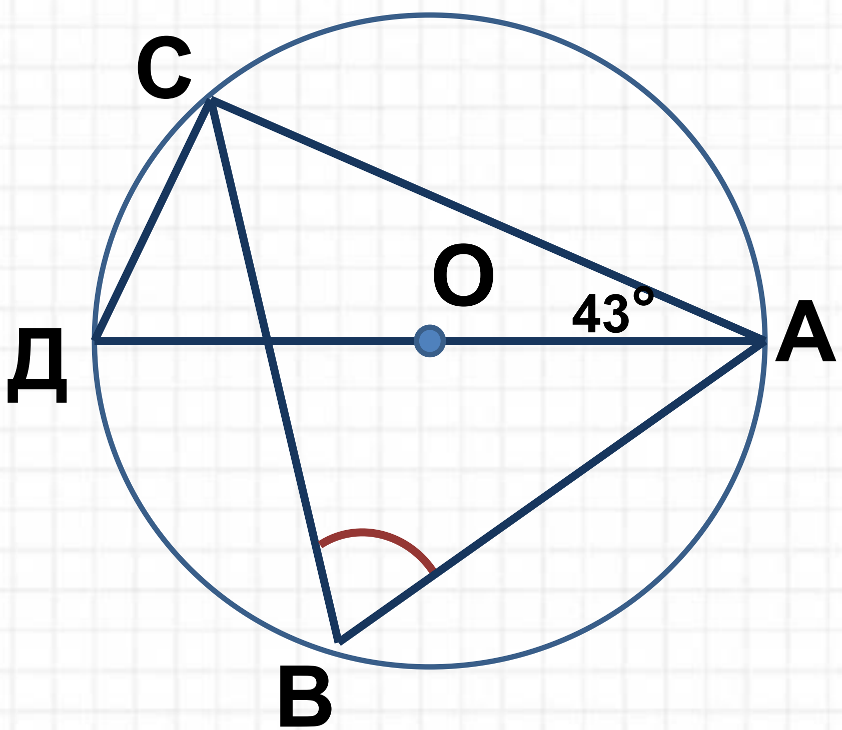


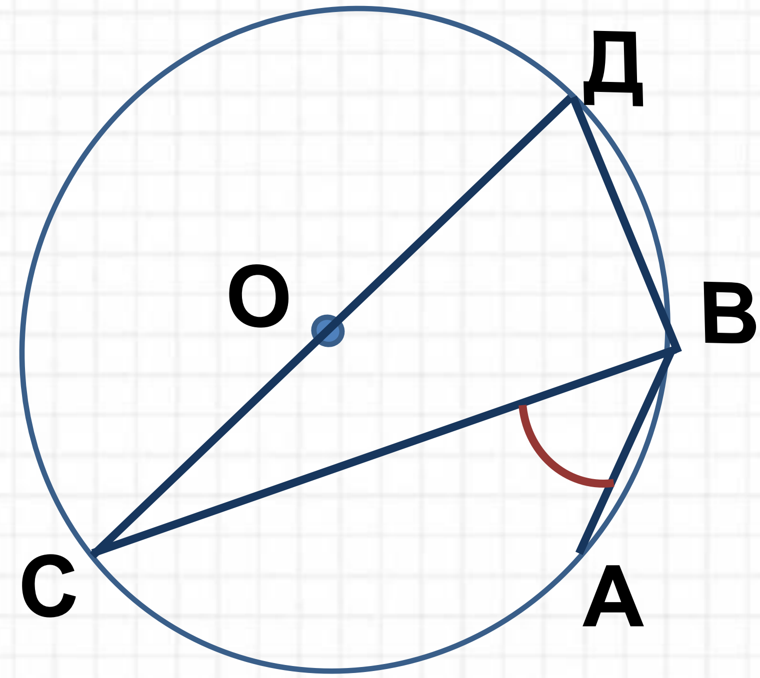


Угол ВДС = 24°

Тренировочные задачи

Найти градусную меру угла **ABC** (О – центр окружности)

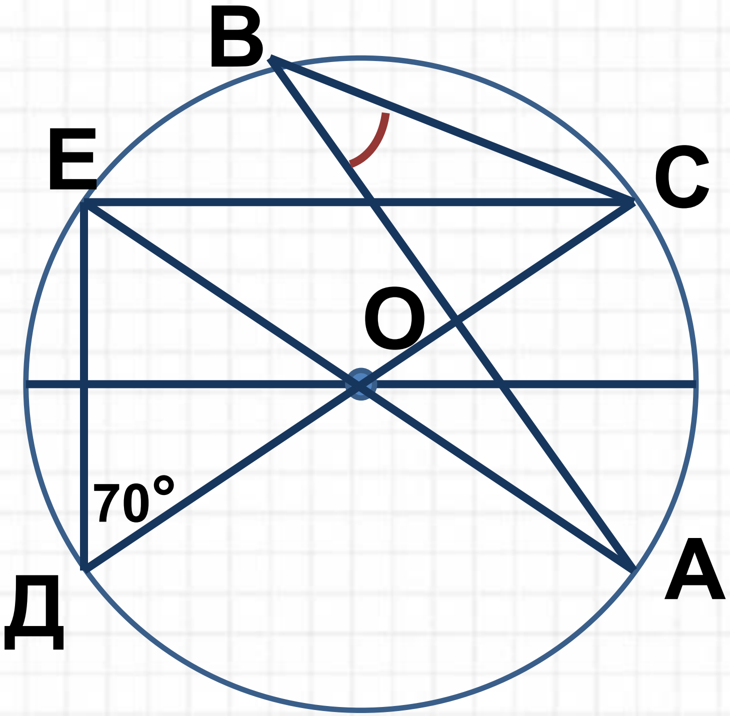


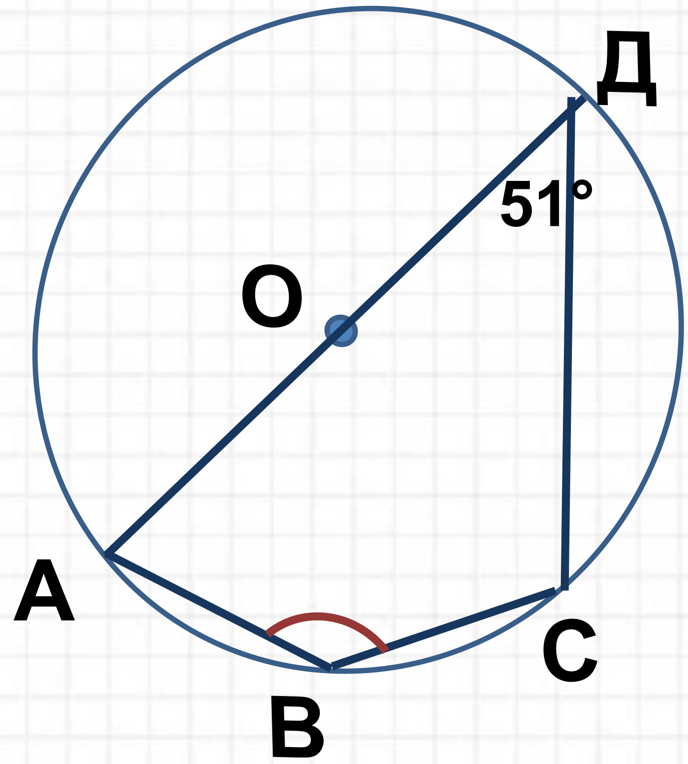


Угол ДВА = 120°

Тренировочные задачи

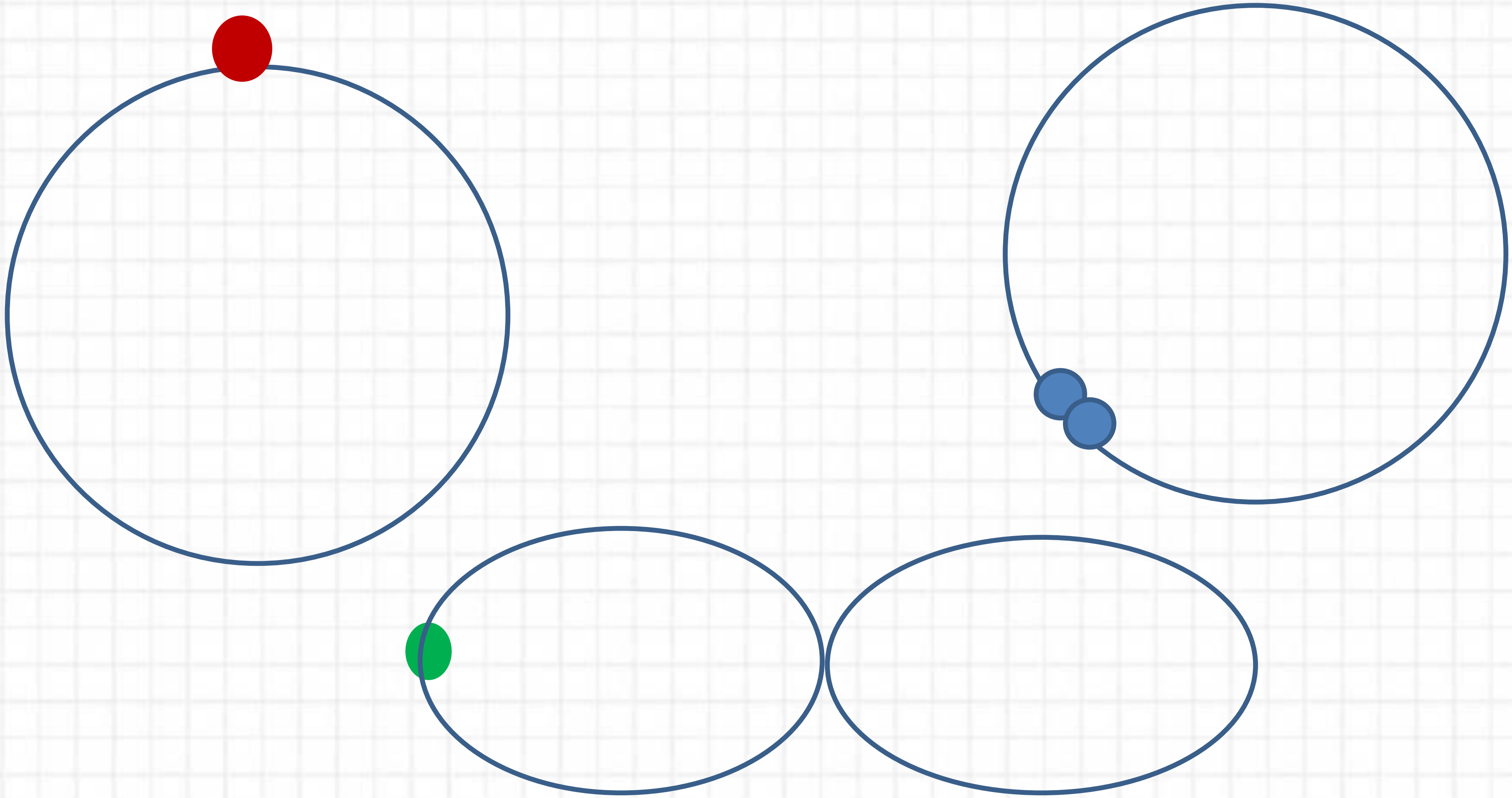
Найти градусную меру угла **ABC** (О – центр окружности)





Зарядка для глаз

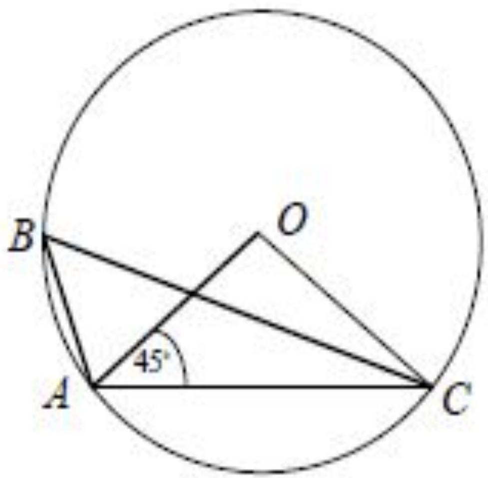
Следите за точкой

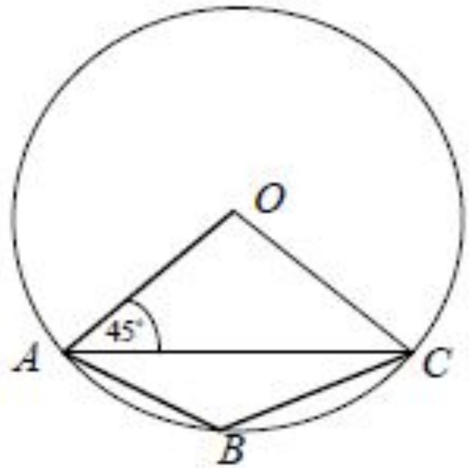


Задача

Угол между радиусом АО окружности, описанной около треугольника АВС и стороной АС равен 45°. Найдите угол А треугольника АВС, если угол С равен 25°.

I. Вариант. Проведем радиус OC. Треугольник AOC равнобедренный, следовательно, $\angle O = 90^0$, а $\angle B = 45^0$. Получаем $\angle A = 180^0 - 25^0 - 45^0 = 110^0$.



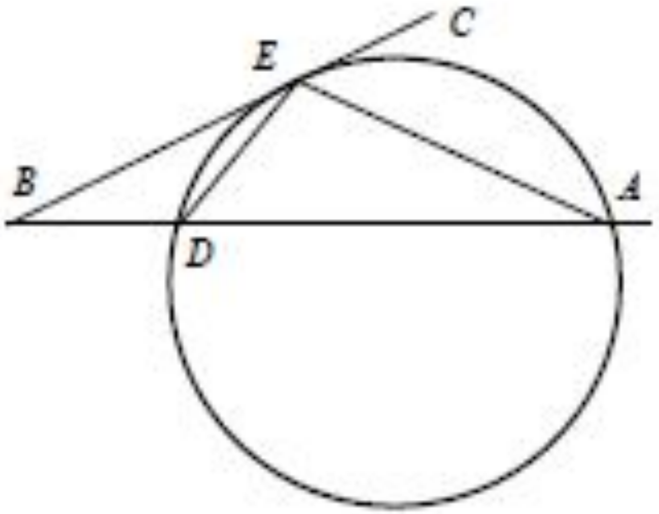


II. Вариант. Рассчитайте самостоятельно.

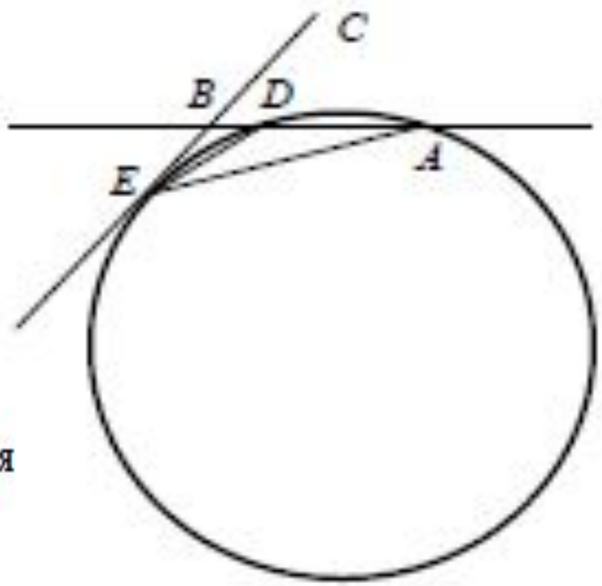
Ответ: 110 ° ; 20°

Задача

На стороне АВ угла АВС, равного 30° взята точка Д такая АД=2, ВД=1. Найдите радиус окружности, проходящей через точки А и Д, и касающейся прямой ВС.



I. Вариант. По теореме о касательной и секущей $BE^2 = BA \cdot BD$, откуда $BE = \sqrt{3}$. По теореме косинусов найдем отрезки $AE = \sqrt{3}$ и $DE = 1$. Треугольник ADE прямоугольный, следовательно, AD это диаметр и $R = 1$.

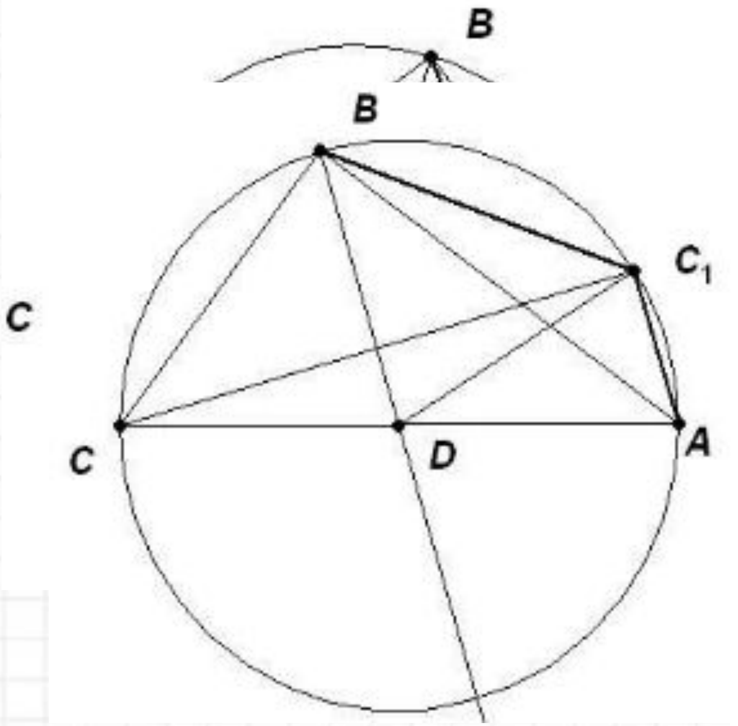


II. Вариант. Рассмотрите другой вариант расположения окружности относительно угла $\angle ABC$.

Ответ: 1 ; 7

Задача

Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и углом α при вершине A. Точка Д – середина гипотенузы. Точка C_1 симметрична точке С относительно прямой ВД. Найдите угол AC_1B.



3) Пусть $\alpha < 45^\circ$, тогда центральный угол $\angle BDC < 90^\circ$. В этом случае точки C и C_1 расположены по разные стороны от хорды AB. Четырехугольник AC_1BC вписан в окружность, поэтому

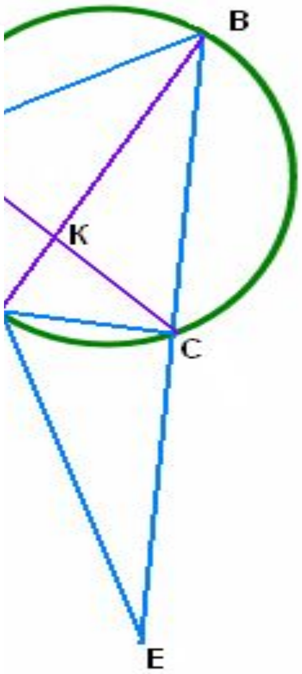
$$\angle AC_1B = 180^\circ - \angle BCA = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha.$$

$\angle BDC = 2 \cdot \angle BAC = 90^\circ$. В этом случае ось BD перпендикулярна гипотенузе AC. Точка C ото- точку A, и угол AC_1B не будет опре-

Ответ: $90^\circ + \alpha$, если $0^\circ < \alpha < 45^\circ$; $90^\circ + \alpha$, если $45^\circ < \alpha < 90^\circ$; при $\alpha = 45^\circ$ точка C_1 совпадает с точкой A и угол не определен.

Задача

Пусть К – точка пересечения диагоналей вписанного в окружность четырехугольника ABCM (AB>CM), угол МКС равен α , а угол между прямыми АМ и ВС равен β. Найти углы МВС и ВМА.



Решение.

1) Пусть Е – точка пересечения прямых АМ и ВС, тогда угол между АМ и СВ равен $\angle AEB = \beta$.

2) $\angle MBC$ - вписанный, опирается на $\cup MC$, значит $\angle MBC = \frac{1}{2} \cup CM$

3) $\angle BMA$ - вписанный, опирается на $\cup AB$, значит $\angle BMA = \frac{1}{2} \cup AB$

4) $\angle MKC = \alpha$ - угол между хордами АС и МВ, значит $\angle MKC = \frac{1}{2}\left(\cup AB + \cup MC\right)$

5) $\angle AEB = \beta$ - угол между секущими АЕ и МЕ, значит $\angle AEB = \frac{1}{2}\left(\cup AB - \cup MC\right)$

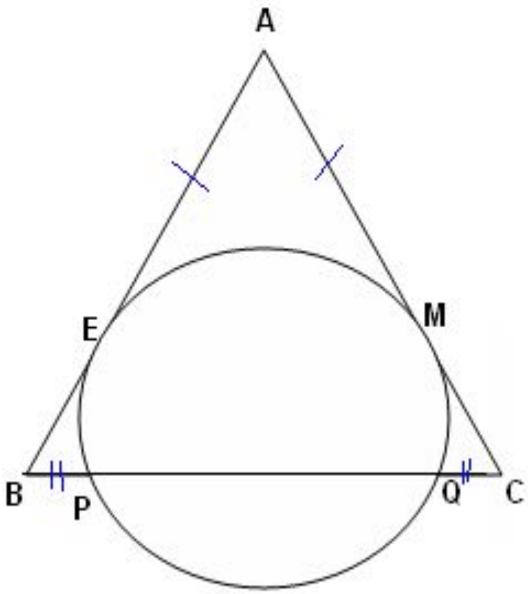
6) Из этих равенст получим, что $\cup AB = \alpha + \beta$, $\cup CM = \alpha - \beta$

7) Следовательно, $\angle MBC = \frac{1}{2} \cup CM = \frac{\alpha - \beta}{2}$, а $\angle BMA = \frac{1}{2} \cup AB = \frac{\alpha + \beta}{2}$

Ответ: $\angle MBC = \frac{\alpha - \beta}{2}$, а $\angle BMA = \frac{\alpha + \beta}{2}$

Задача

Окружность касается сторон АВ и АС треугольника АВС и пересекает сторону ВС в точках Р и Q, ВР=CQ. Докажите, что треугольник АВС равнобедренный.



Доказательство:

1) AB и AC – касательные, проведенные из точки A к данной окружности, тогда по свойству отрезков касательных, AE = AM (E и M – точки касания)

2) BC – секущая, BA – касательная, тогда, по свойству, $BP \cdot PQ = BE^2$

3) CB – секущая, CA – касательная, тогда, по свойству, $CQ \cdot PQ = CM^2$

4) Получили $BP \cdot PQ = BE^2$ и $CQ \cdot PQ = CM^2$, а по условию BP = CQ, значит BE = CM

5) AB = BE + EA, AC = CM + MA, BE = CM и AE = AM, тогда AB = AC, а, значит, ΔABC - равнобедренный.

Задача

Две окружности имеют единственную общую точку М. Через эту точку проведены две секущие , пересекающие одну окружность в точках А и А1 , А другую – в точках В и В1 . Докажите, что А А1 II В В1.

Доказательство:

1) Проведем через точку М общую касательную КЕ.
2) $\angle A_1ME = \frac{1}{2} \cup AM$ (как угол между касательной и хордой)
3) $\angle A_1AM = \frac{1}{2} \cup AM$ - вписанный, то $\angle A_1ME = \angle A_1AM$
4) $\angle KMB = \frac{1}{2} \cup BM$ (как угол между касательной и хордой)
5) $\angle BB_1M = \frac{1}{2} \cup BM$ - вписанный, то $\angle BB_1M = \angle KMB$
6) $\angle KMB = \angle A_1ME$ (вертикальные), тогда $\angle BB_1M = \angle KMB = \angle A_1ME = \angle A_1AM$
7) Получили, что $\angle BB_1M = \angle A_1AM$, а это накрест лежащие углы при пересечении прямых AA_1 и BB_1 секущей AB_1, значит АА1 || ВВ1