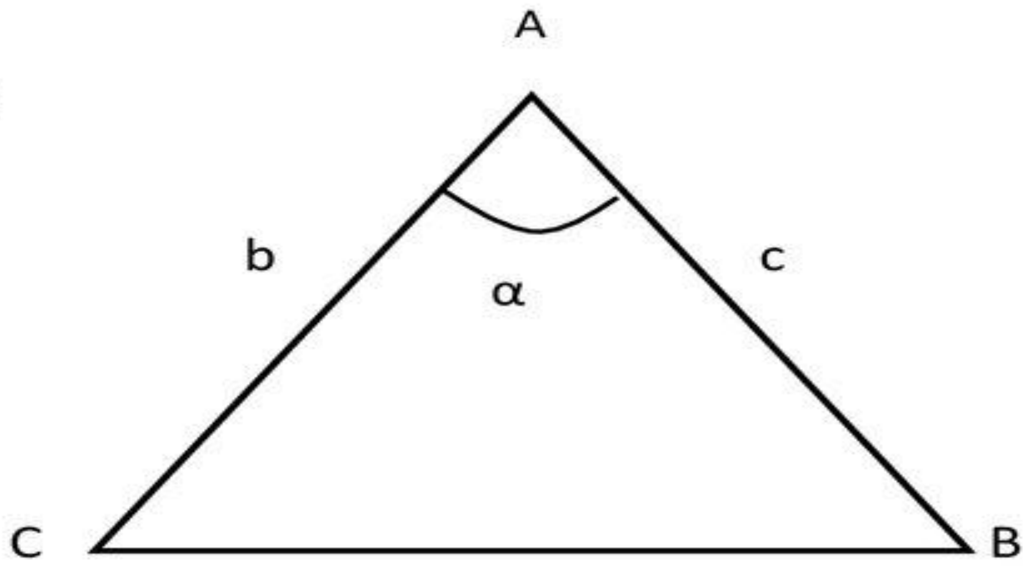
Тригонометрические функции суммы и разности двух углов, двойного угла. Формулы половинного угла.

Решение прикладных задач

Найдите площадь треугольника:

Дано: ΔABC,
$\angle A = \alpha$; $|AC| = b$; $|AB| = c$

Найти: $S_{\Delta ABC}$ - ?



$$S_{\Delta ABC} = 1/2 bc \sin\alpha$$

Рассмотрим произвольный треугольник.

AD-h – высота ;

$\llcorner BAD = \alpha$, $\llcorner DAC = \beta$,

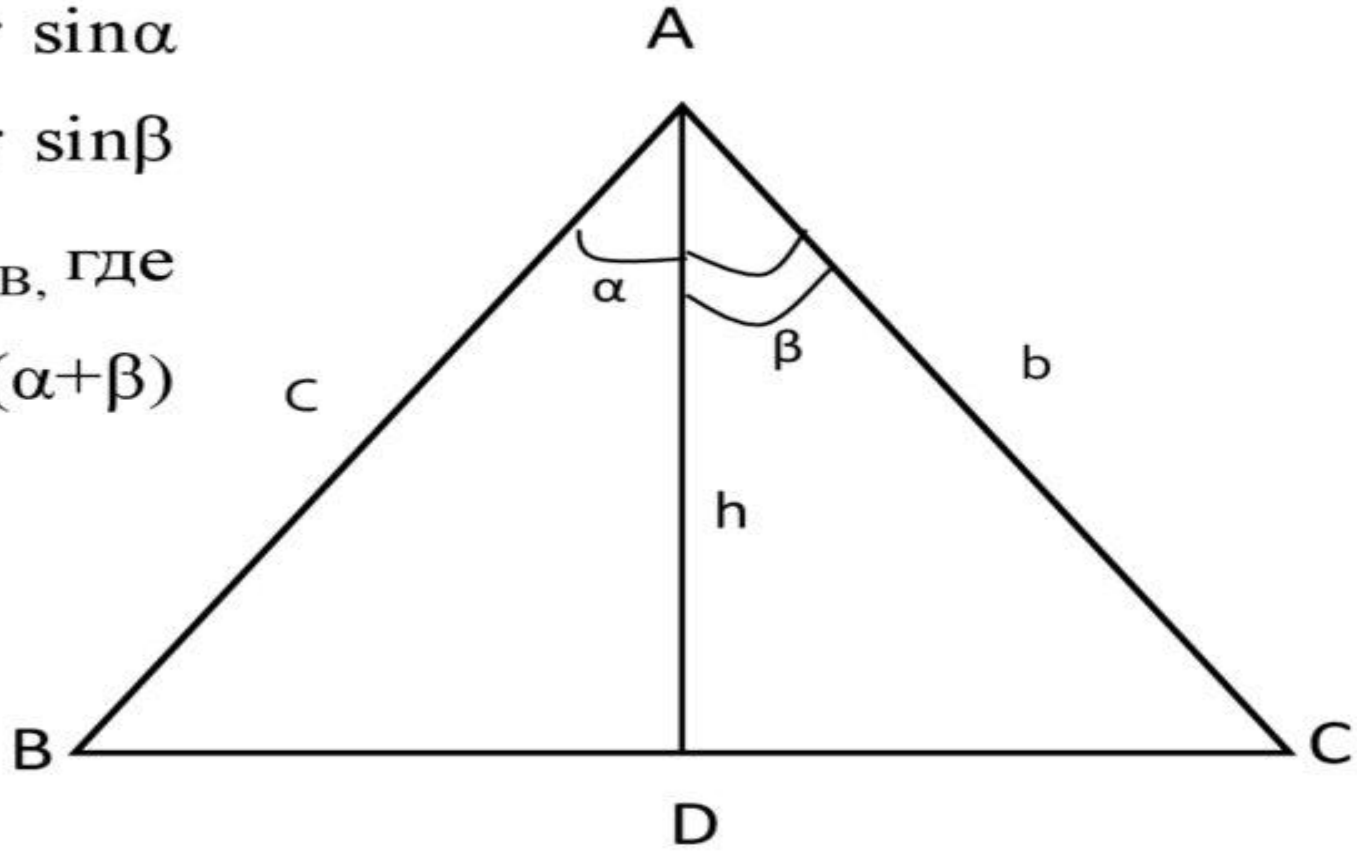
$|AB| = c, |AC| = b$,

тогда: $S_{\Delta ADB} = 1/2ch \cdot \sin\alpha$

$S_{\Delta ADC} = 1/2bh \cdot \sin\beta$

$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC} + S_{\Delta ADB}$, где

$S_{\Delta ABC} = 1/2bc \cdot \sin(\alpha+\beta)$



$1/2\ bc \sin(\alpha + \beta) = 1/2\ ch \sin\alpha + 1/2\ bh \sin\beta$, или

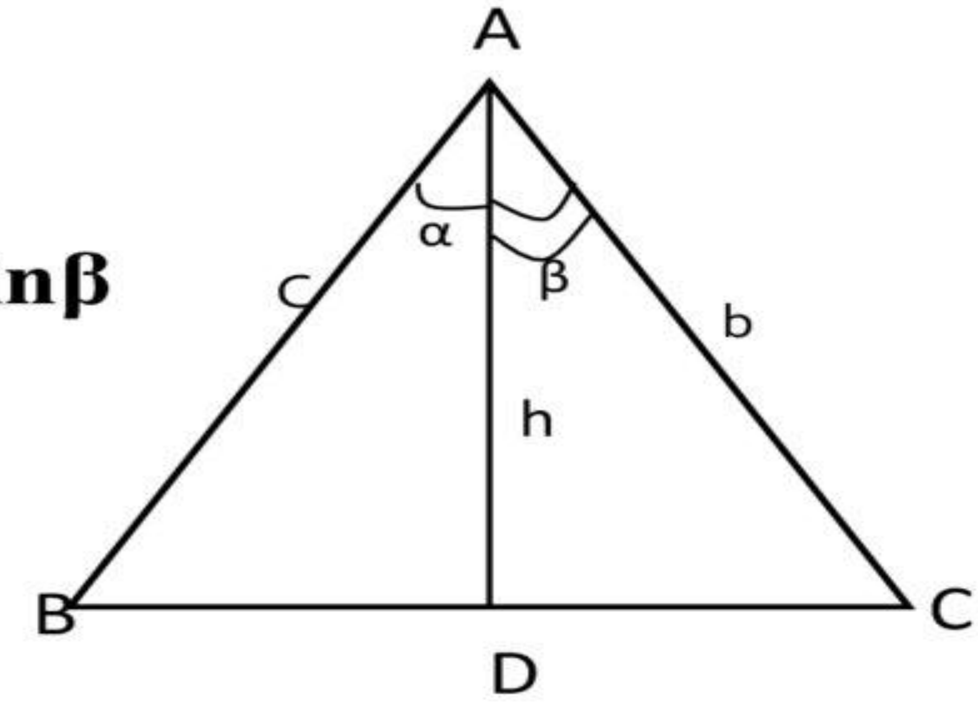
$bc \sin(\alpha + \beta) = ch \sin\alpha + bh \sin\beta$

Разделим обе части равенства на bc:

$\sin(\alpha + \beta) = h/b \sin\alpha + h/c \sin\beta$,

т.к. $h/b = \cos\beta$, $h/c = \cos\alpha$

$$\mathbf{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$



Косинус, синус суммы и разности двух аргументов

Для любых двух углов α и β справедливы тождества:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов

Для любого угла α справедливы тождества:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha}$$

Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$$

Пример применения формул суммы углов

Докажите, что:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x,$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

Решение:

$$\sin(\pi + x) = \sin\pi \cdot \cos x + \cos\pi \cdot \sin x =$$

$$= 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = \cos\pi \cdot \cos x - \sin\pi \cdot \sin x =$$

$$= -1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = -\cos x$$

1. Устные упражнения

2. Вычислить

а) $\sin 10^0 \cos 20^0 + \cos 10^0 \sin 20^0 = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$

б) $\cos 14^0 \cos 16^0 - \sin 14^0 \sin 16^0 = \cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$

в) $\sin 30^0 \cos 15^0 + \cos 30^0 \sin 15^0 = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

г) $\cos 17^0 \cos 28^0 - \sin 17^0 \sin 28^0 = \cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

д) $\frac{\mathrm{tg}\,35^0 + \mathrm{tg}\,10^0}{1 - \mathrm{tg}\,35^0\,\mathrm{tg}\,10^0} = \mathrm{tg}\,45^0 = 1$

2. Изучение нового материала

1. Из формулы косинуса суммы двух аргументов, заменив β на α, получить формулу косинуса двойного аргумента.

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$

$$\boxed{\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$$

Формула косинуса двойного аргумента

2. Изучение нового материала

2. Из формулы синуса суммы двух аргументов, заменив β на α, получить формулу синуса двойного аргумента.

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha$$

$$\boxed{\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha}$$

Формула синуса двойного аргумента

2. Изучение нового материала

3. Из формулы тангенса суммы двух аргументов, заменив β на α, получить формулу тангенса двойного аргумента.

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta} \qquad tg(\alpha+\alpha)=\frac{tg\alpha+tg\alpha}{1-tg\alpha tg\alpha}$$

$$\boxed{tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}}$$

Формула тангенса двойного аргумента

3. Закрепление изученного материала

Упростите выражение:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \sin\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \sin\alpha =$$

$$\frac{(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha)}{\cos\alpha - \sin\alpha} - \sin\alpha = \cos\alpha + \sin\alpha - \sin\alpha = \cos\alpha$$

3. Закрепление изученного материала

Упростите выражение:

$$\frac{\sin 40^0}{2\cos 20^0} = \frac{\sin 2\cdot 20^0}{2\cos 20^0} = \frac{2\sin 20^0 \cos 20^0}{2\cos 20^0} = \sin 20^0$$

$$\frac{\cos 36^0 + \sin^2 18^0}{\cos 18^0} = \frac{\cos 2\cdot 18^0 + \sin^2 18^0}{\cos 18^0} =$$

$$\frac{\cos^2 18^0 - \sin^2 18^0 + \sin^2 18^0}{\cos 18^0} = \frac{\cos^2 18^0}{\cos 18^0} = \cos 18^0$$

Выполните самостоятельно:

1. Найдите значения выражений:

а) $\sin 58^\circ \cos 13^\circ - \cos 58^\circ \sin 13^\circ$;

б) $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$.

2. Упростите выражения:

а) $\cos (t - s) - \sin t \sin s$;

б) $\frac{1}{2} \cos \alpha - \sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right)$.

Самостоятельная работа по вариантам

I вариант	II вариант
1.Вычислите: $\sin 20^o \cos 40^o + \cos 20^o \sin 40^o$	1.Вычислите: $\cos 47^o \cos 17^o + \sin 47^o \sin 17^o$
2.Вычислите синусы углов: а)165^o; б)105^o	2.Вычислите косинусы углов: а) 75^o; б)15^o

Используя формулу синуса суммы углов

Вычислите $\sin(x + y)$, если

$\sin x = 3/5$, $0 < x < \pi/2$;

$\cos y = -3/5$, $\pi < y < 3\pi/2$.