

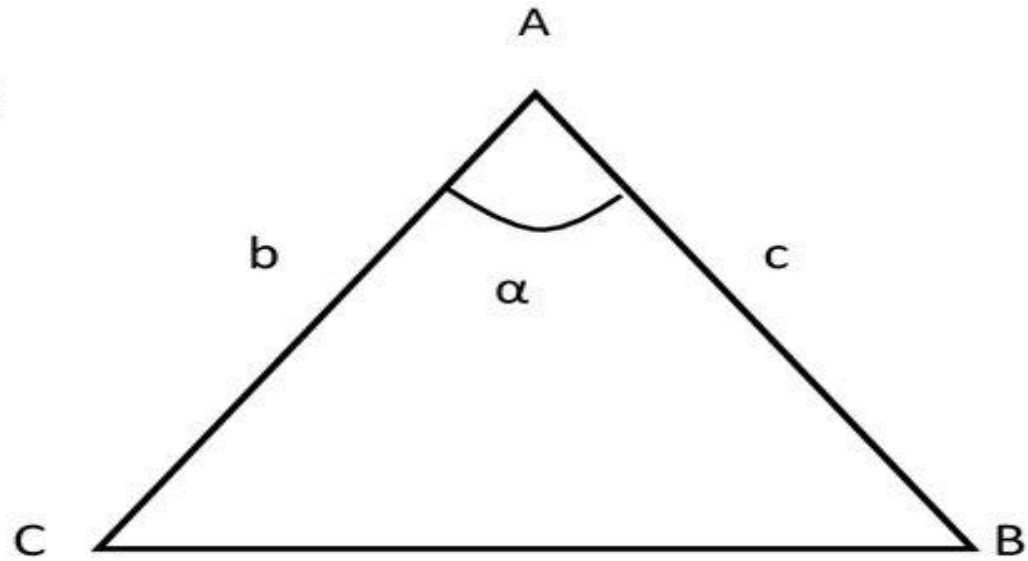
**Тригонометрические функции суммы и
разности двух углов, двойного угла.
Формулы половинного угла.**

Решение прикладных задач

Найдите площадь треугольника:

Дано: $\triangle ABC$,
 $\angle A = \alpha$; $|AC| = b$; $|AB| = c$

Найти: $S_{\triangle ABC}$ - ?



$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$$

Рассмотрим произвольный треугольник.

$AD-h$ – высота ;

$\angle BAD = \alpha, \angle DAC = \beta,$

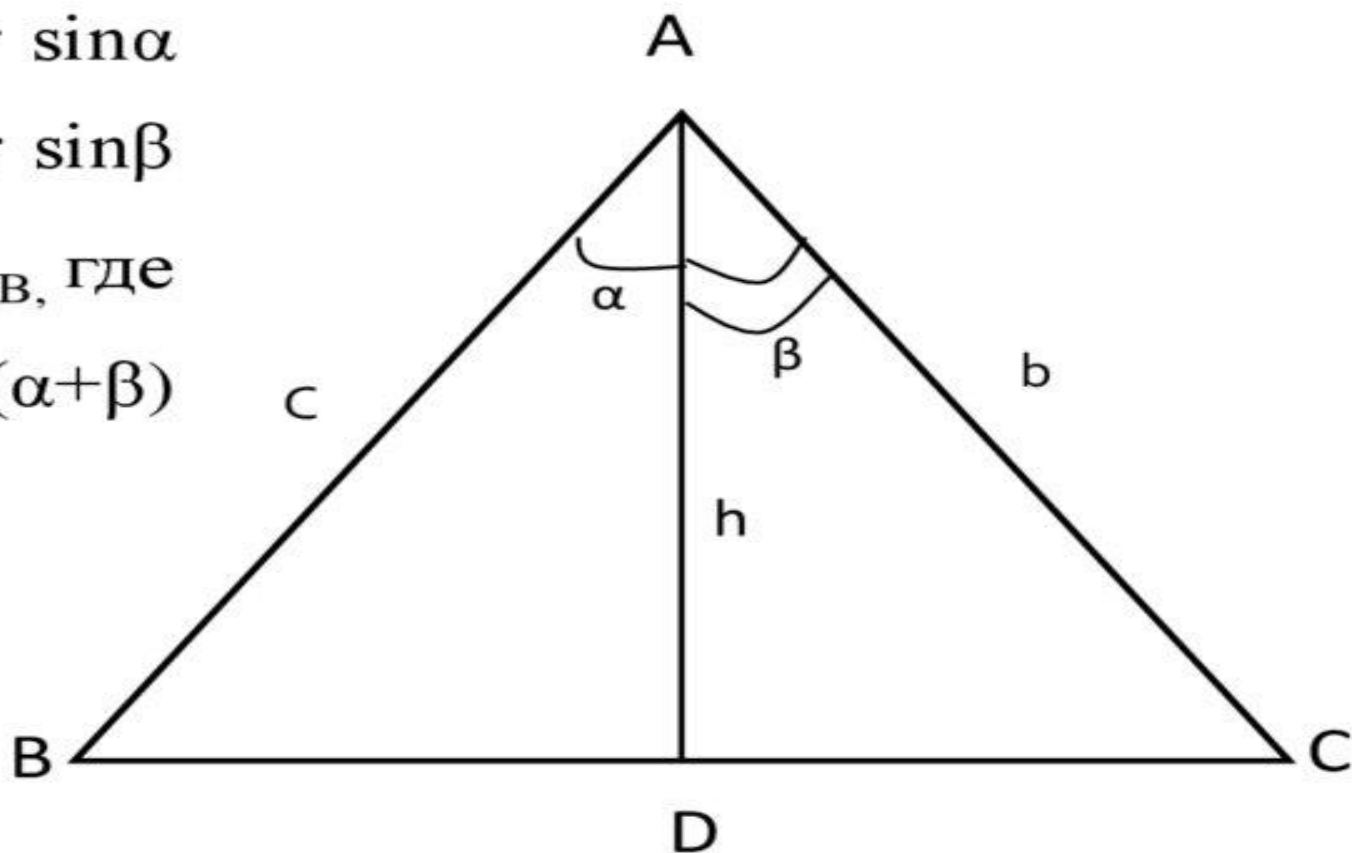
$|AB|=c, |AC|=b,$

тогда: $S_{\triangle ADB} = 1/2 ch \cdot \sin \alpha$

$S_{\triangle ADC} = 1/2 bh \cdot \sin \beta$

$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADC} + S_{\triangle ADB},$ где

$S_{\triangle ABC} = 1/2 bc \cdot \sin (\alpha + \beta)$



$$1/2 bc \sin (\alpha + \beta) = 1/2 ch \sin \alpha + 1/2 bh \sin \beta, \text{ или}$$

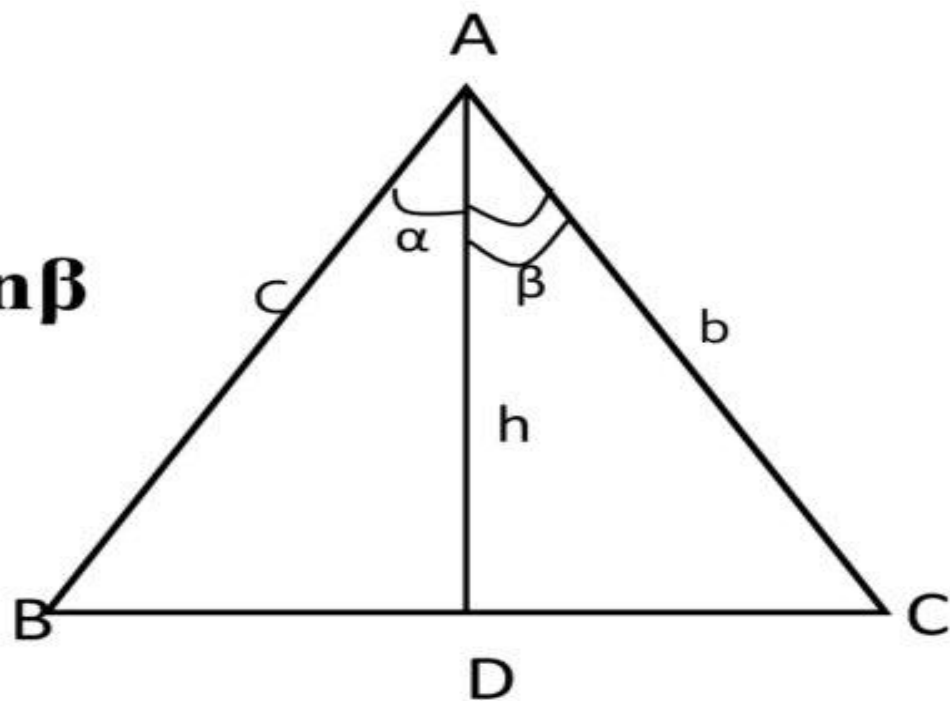
$$bc \sin(\alpha + \beta) = ch \sin \alpha + bh \sin \beta$$

Разделим обе части равенства на bc :

$$\sin (\alpha + \beta) = h/b \sin \alpha + h/c \sin \beta,$$

$$\text{т.к. } h/b = \cos \beta, \quad h/c = \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$



Косинус, синус суммы и разности двух аргументов

Для любых двух углов α и β справедливы тождества:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$



Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов

Для любого угла α справедливы тождества:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}$$

Тригонометрические функции двойного и половинного аргументов

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}}$$



Пример применения формул суммы углов

Докажите, что:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x,$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$

Решение:

$$\sin(\pi + x) = \sin\pi \cdot \cos x + \cos\pi \cdot \sin x =$$

$$= 0 \cdot \cos x - 1 \cdot \sin x = -\sin x$$

$$\cos(\pi + x) = \cos\pi \cdot \cos x - \sin\pi \cdot \sin x =$$

$$= -1 \cdot \cos x - 0 \cdot \sin x = -\cos x$$



1. Устные упражнения

2. Вычислить

$$а) \sin 10^{\circ} \cos 20^{\circ} + \cos 10^{\circ} \sin 20^{\circ} = \sin 30^{\circ} = \frac{1}{2}$$

$$б) \cos 14^{\circ} \cos 16^{\circ} - \sin 14^{\circ} \sin 16^{\circ} = \cos 30^{\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$в) \sin 30^{\circ} \cos 15^{\circ} + \cos 30^{\circ} \sin 15^{\circ} = \sin 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$г) \cos 17^{\circ} \cos 28^{\circ} - \sin 17^{\circ} \sin 28^{\circ} = \cos 45^{\circ} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$д) \frac{\operatorname{tg} 35^{\circ} + \operatorname{tg} 10^{\circ}}{1 - \operatorname{tg} 35^{\circ} \operatorname{tg} 10^{\circ}} = \operatorname{tg} 45^{\circ} = 1$$



2. Изучение нового материала

1. Из формулы косинуса суммы двух аргументов, заменив β на α , получить формулу косинуса двойного аргумента.

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \alpha) = \cos \alpha \cos \alpha - \sin \alpha \sin \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

Формула косинуса двойного аргумента



2. Изучение нового материала

2. Из формулы синуса суммы двух аргументов, заменив β на α , получить формулу синуса двойного аргумента.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \sin \alpha$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

Формула синуса двойного аргумента



2. Изучение нового материала

3. Из формулы тангенса суммы двух аргументов, заменив β на α , получить формулу тангенса двойного аргумента.

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \quad \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\alpha}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Формула тангенса двойного аргумента



3. Закрепление изученного материала

Упростите выражение:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha} = 2 \sin \alpha$$

$$\begin{aligned} \frac{\cos 2\alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \sin \alpha &= \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \sin \alpha = \\ \frac{(\cos \alpha - \sin \alpha)(\cos \alpha + \sin \alpha)}{\cos \alpha - \sin \alpha} - \sin \alpha &= \cos \alpha + \sin \alpha - \sin \alpha = \cos \alpha \end{aligned}$$



3. Закрепление изученного материала

Упростите выражение:

$$\frac{\sin 40^{\circ}}{2 \cos 20^{\circ}} = \frac{\sin 2 \cdot 20^{\circ}}{2 \cos 20^{\circ}} = \frac{2 \sin 20^{\circ} \cos 20^{\circ}}{2 \cos 20^{\circ}} = \sin 20^{\circ}$$

$$\frac{\cos 36^{\circ} + \sin^2 18^{\circ}}{\cos 18^{\circ}} = \frac{\cos 2 \cdot 18^{\circ} + \sin^2 18^{\circ}}{\cos 18^{\circ}} =$$
$$\frac{\cos^2 18^{\circ} - \sin^2 18^{\circ} + \sin^2 18^{\circ}}{\cos 18^{\circ}} = \frac{\cos^2 18^{\circ}}{\cos 18^{\circ}} = \cos 18^{\circ}$$

Выполните самостоятельно:

1. Найдите значения выражений:

а) $\sin 58^\circ \cos 13^\circ - \cos 58^\circ \sin 13^\circ$;

б) $\cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12}$.

2. Упростите выражения:

а) $\cos (t - s) - \sin t \sin s$;

б) $\frac{1}{2} \cos \alpha - \sin \left(\frac{\pi}{6} + \alpha \right)$.

Самостоятельная работа по вариантам

I вариант

1. Вычислите:

$$\sin 20^\circ \cos 40^\circ + \cos 20^\circ \sin 40^\circ$$

2. Вычислите синусы углов:

а) 165° ; б) 105°

II вариант

1. Вычислите:

$$\cos 47^\circ \cos 17^\circ + \sin 47^\circ \sin 17^\circ$$

2. Вычислите косинусы углов:

а) 75° ; б) 15°

Используя формулу синуса суммы углов

Вычислите $\sin (x + y)$, если

$$\sin x = 3/5, \quad 0 < x < \pi/2;$$

$$\cos y = -3/5, \quad \pi < y < 3\pi/2.$$