

Элементы теории фредгольмовых отображений

<https://vk.com/fredholm>

12. Фредгольмовы функционалы

Определение. Если значениями отображения являются числа, то отображение называется *функционалом*.

Рассмотрим гладкий функционал V на банаховом пространстве E . Предположим, что E непрерывно вложено в банахово пространство F , F непрерывно вложено в гильбертово пространство H и E плотно в H .

Замечание 1. Говорят, что банахово пространство E непрерывно вложено в банахово пространство F , если:

- 1) E является подмножеством F ;
- 2) из сходимости последовательности $\{x_n\} \subset E$ по норме пространства E следует сходимость этой последовательности по норме пространства F .

Замечание 2. Говорят, что пространство E плотно в пространстве H , если замыкание E по норме H совпадает с H , то есть для любой точки $a \in H$ существует последовательность $\{x_n\} \subset E$, сходящаяся к a по норме H .

Предположим также, что задано отображение $f : E \rightarrow F$, такое, что

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x)h = \langle f(x), h \rangle \quad \forall x \in E, \forall h \in E$$

($\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение в ГП H).

Отображение $f : E \rightarrow F$ называется *градиентом* функционала V и обозначается $grad V$.

В этом случае говорят, что функционал V обладает *градиентной реализацией* в тройке пространств $\{E, F, H\}$.

Определение. Точка $x_0 \in E$ называется *критической точкой* функционала V , если

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x_0)h = \langle f(x_0), h \rangle = 0$$

для любого $h \in E$.

Лемма. Точка $x_0 \in E$ является критической точкой функционала тогда и только тогда, когда $f'(x_0) = 0$.

Доказательство.

Достаточность очевидна.

Необходимость. Если x_0 – критическая точка функционала V , то $\langle f'(x_0), h \rangle = 0$ при всех $h \in E$.

В силу плотности E в H , существует последовательность $\{h_n\} \subset E$, сходящаяся к $f'(x_0) \in F$ по норме H .

Учитывая, что $\langle f(x_0), h_n \rangle = 0$ при любом n , и используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим:

$$\begin{aligned}\|f(x_0)\|_H^2 &= \langle f(x_0), f(x_0) \rangle = |\langle f(x_0), f(x_0) \rangle - \langle f(x_0), h_n \rangle| = \\ &= |\langle f(x_0), f(x_0) - h_n \rangle| \leq \|f(x_0)\|_H \cdot \|f(x_0) - h_n\|_H \rightarrow 0\end{aligned}$$

при $n \rightarrow \infty$.

Так как число $\|f(x_0)\|_H^2$ от n не зависит, то

$$\|f(x_0)\|_H^2 = 0. \text{ Таким образом, } f(x_0) = 0.$$

Лемма доказана.

Определение. Функционал V называется *фредгольмовым*, если его градиент $f : E \rightarrow F$ является фредгольмовым отображением. При этом *индексом функционала V* называют индекс отображения f .

13. Вычисление градиентов некоторых функционалов

Во всех рассматриваемых ниже примерах $H = L_2[0,1]$, E , F – вещественные банаховы линейные пространства, E линейно и непрерывно вложено в F , F линейно и непрерывно вложено в H и E плотно в H .

Пример 1. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \frac{1}{2} \int_0^1 (Ax)x dt,$$

где $x \in E$, $A: E \rightarrow F$ – симметрический линейный непрерывный оператор (оператор называется симметрическим, если $\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in E$).

Вычислим градиент функционала V .

Рассмотрим приращение функционала V :

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) &= \frac{1}{2} \langle A(x+h), x+h \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle. \end{aligned}$$

Рассмотрим приращение функционала V :

$$\begin{aligned} V(x+h) - V(x) &= \frac{1}{2} \langle A(x+h), x+h \rangle - \frac{1}{2} \langle Ax, x \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, x \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle. \end{aligned}$$

В силу симметричности оператора A ,
 $\langle Ah, x \rangle = \langle h, Ax \rangle = \langle Ax, h \rangle$.

Следовательно, $V(x+h) - V(x) = \langle Ax, h \rangle + \frac{1}{2} \langle Ah, h \rangle$.

Таким образом, $\text{grad}V(x) = Ax$, если $\langle Ah, h \rangle = o(\|h\|_E)$.

Используя неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим: $|\langle Ah, h \rangle| \leq \|Ah\|_H \cdot \|h\|_H$.

Следовательно, $\frac{|\langle Ah, h \rangle|}{\|h\|_E} \leq \|Ah\|_H \cdot \frac{\|h\|_H}{\|h\|_E} \leq k_1 \cdot k_2 \cdot \|Ah\|_H \leq$

$\leq k_1 \cdot k_2 \cdot k_2 \cdot \|Ah\|_F \leq k_1 \cdot k_2^2 \cdot \|A\| \cdot \|h\|_E \rightarrow 0$ при $\|h\|_E \rightarrow 0$,

так как $\|h\|_F \leq k_1 \|h\|_E$, $\|h\|_H \leq k_2 \|h\|_F$

(в силу непрерывности вложений E в F и F в H).

Итак, $\langle Ah, h \rangle = o(\|h\|_E)$.

Следовательно, $\text{grad } V(x) = Ax$.

Пример 2. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2 dt,$$

заданный на БП $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, которое непрерывно вложено в БП $F = C[0,1]$; пространство F непрерывно вложено в ГП $H = L_2[0,1]$;

$$\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\ddot{x}(t)|, \quad \|x\|_F = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|,$$

$$\|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t) dt, \quad \langle x, y \rangle_H = \int_0^1 x(t) y(t) dt.$$

Вычислим $\text{grad } V(x)$.

Используя равенство $\dot{x}\dot{x} + \ddot{x}x = (\dot{x}x)'$, получим:

$$\begin{aligned} V(x) &= \frac{1}{2} \int_0^1 (\dot{x}x)' dt - \frac{1}{2} \int_0^1 \ddot{x}x dt = (\dot{x}x) \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \ddot{x}x dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{d^2x}{dt^2} x dt = \frac{1}{2} \left\langle -\frac{d^2}{dt^2} x, x \right\rangle. \end{aligned}$$

Обозначим $-\frac{d^2}{dt^2} = A$.

Сравним нормы пространств E , F и $H = L_2[0,1]$.

$$1) \quad \|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t) dt \leq \int_0^1 \left(\max_{t \in [0,1]} |x(t)| \right)^2 dt = \int_0^1 \|x\|_F^2 dt = \|x\|_F^2,$$

следовательно, $\|x\|_H \leq \|x\|_F$.

2) Очевидно, что $\|x\|_F \leq \|x\|_E$.

Из полученных неравенств вытекает непрерывность вложений E в F и F в H .

Нетрудно проверить симметричность оператора A (проверьте самостоятельно!).

Таким образом, этот пример является частным случаем примера 1.

Следовательно, $f(x) = \text{grad } V(x) = Ax = -\frac{d^2}{dt^2}x$ и

$$f'(x) = -\frac{d^2}{dt^2}.$$

Покажем **фредгольмовость** отображения $f'(x_0): E \rightarrow F$ (которая означает фредгольмовость функционала V).

Докажем, что $f'(x_0): E \rightarrow F$ – изоморфизм (при любом фиксированном $x_0 \in E$).

1) Пусть $x \in \text{Ker } A$ ($A = -\frac{d^2}{dt^2} = f'(x_0)$).

Тогда $Ax = -\ddot{x} = 0 \Rightarrow x(t) = at + b$.

В силу условия $x(0) = x(1) = 0$ получаем, что $x(t) \equiv 0$.

Следовательно, $\text{Ker } A = \{0\}$.

2) Рассмотрим произвольный $y \in F$. Элемент $x \in C^2[0,1]$, заданный выражением

$$x(t) = t \int_0^1 \left(\int_0^s y(u) du \right) ds - \int_0^t \left(\int_0^s y(u) du \right) ds,$$

для которого выполняется условие $x(0) = x(1) = 0$, является решением уравнения $Ax = -\ddot{x} = y$, то есть является прообразом элемента y . Следовательно, $\text{Im} A = F$.

Итак, оператор $f'(x_0): E \rightarrow F$ – изоморфизм (при любом фиксированном $x_0 \in E$), то есть фредгольмов оператор индекса 0. Следовательно отображение $f: E \rightarrow F$ является фредгольмовым индекса 0, а функционал V – фредгольмовым функционалом индекса 0.

Пример 3. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \int_0^1 \varphi(x(t)) dt,$$

заданный на БП $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, где φ – некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, заданная на \mathbb{R}^1 . Пространство E непрерывно вложено в БП $F = C[0,1]$; пространство F непрерывно вложено в ГП $H = L_2[0,1]$;

$$\|x\|_E = \max_{t \in [0,1]} |x(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\dot{x}(t)| + \max_{t \in [0,1]} |\ddot{x}(t)|, \quad \|x\|_F = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|,$$

$$\|x\|_H^2 = \int_0^1 x^2(t) dt, \quad \langle x, y \rangle_H = \int_0^1 x(t) y(t) dt.$$

Вычислим $\text{grad } V$ в некоторой точке $a \in E$.

Воспользуемся формулой Тейлора в форме

Лагранжа:

$$\varphi(a + h) = P_n(a) + r_n(a),$$

где
$$P_n(a) = \sum_{k=0}^n \frac{\varphi^{(k)}(a)}{k!} \cdot h^k,$$

$$r_n(a) = \frac{\varphi^{(n+1)}(a + \theta h)}{(n+1)!} \cdot h^{n+1}, \quad \theta \in (0,1),$$

считая, что a и h – значения функций $a(t)$ и $h(t)$ при некотором $t \in [0,1]$ (число θ зависит от значения $h(t)$).

При $n = 1$ получим:

$$\varphi(a + h) = \varphi(a) + \varphi'(a)h + r_1(a), \quad (1)$$

где

$$r_1(a) = \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2. \quad (2)$$

Рассмотрим приращение функционала V (с учетом (1) и (2)) :

$$\begin{aligned} V(a+h) - V(a) &= \int_0^1 \varphi(a+h) dt - \int_0^1 \varphi(a) dt = \\ &= \int_0^1 (\varphi(a+h) - \varphi(a)) dt = \int_0^1 (\varphi'(a(t))h(t) + r_1(a(t))) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(a+h) - V(a) &= \int_0^1 \varphi(a+h) dt - \int_0^1 \varphi(a) dt = \\
&= \int_0^1 (\varphi(a+h) - \varphi(a)) dt = \int_0^1 (\varphi'(a(t))h(t) + r_1(a(t))) dt = \\
&= \int_0^1 \varphi'(a(t))h(t) dt + \int_0^1 r_1(a(t)) dt = \langle \varphi'(a), h \rangle_H + \int_0^1 r_1(a(t)) dt.
\end{aligned}$$

Докажем, что $\int_0^1 r_1(a(t)) dt = o(\|h\|_E)$. Тогда, очевидно,

$$\text{grad } V(a) = \varphi'(a).$$

Итак, поскольку $\|h\|_E \rightarrow 0$, можно считать, что $\|h\|_E \leq 1$.

Тогда получаем следующую оценку (при $\forall \theta \in (0,1)$, $\forall t \in [0,1]$):

$$\begin{aligned} |a(t) + \theta \cdot h(t)| &\leq |a(t)| + |\theta| \cdot |h(t)| \leq |a(t)| + |h(t)| \leq \\ &\leq \|a\|_E + \|h\|_E \leq \|a\|_E + 1. \end{aligned}$$

Следовательно, значения функции $a(t) + \theta \cdot h(t)$, где $h(t)$ – достаточно малая (по норме) добавка, при $\forall t \in [0,1]$ и $\forall \theta \in (0,1)$ можно считать заключёнными в некотором отрезке $[-c, c]$.

Функция φ'' непрерывна на \mathbb{R}^1 и, следовательно, ограничена на любом отрезке, поэтому существует такая константа k , что $|\varphi''(x)| \leq k$ для любого $x \in [-c, c]$. Отсюда следует, что $|\varphi''(a(t) + \theta h(t))| \leq k \quad \forall \theta \in (0, 1), \forall t \in [0, 1]$.

Используя последнее неравенство и равенство (2), установим следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 r_1(a(t)) dt \right| &\leq \int_0^1 |r_1(a(t))| dt = \int_0^1 \left| \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2 \right| dt \leq \frac{k}{2} \int_0^1 h^2(t) dt \leq \\ &\leq \frac{k}{2} \int_0^1 \left(\max_{t \in [0, 1]} |h(t)| \right)^2 dt = \frac{k}{2} \|h\|_F^2 \leq \frac{k}{2} \|h\|_E^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 r_1(a(t)) dt \right| &\leq \int_0^1 |r_1(a(t))| dt = \int_0^1 \left| \frac{\varphi''(a + \theta h)}{2} \cdot h^2 \right| dt \leq \frac{k}{2} \int_0^1 h^2(t) dt \leq \\ &\leq \frac{k}{2} \int_0^1 \left(\max_{t \in [0,1]} |h(t)| \right)^2 dt = \frac{k}{2} \|h\|_F^2 \leq \frac{k}{2} \|h\|_E^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\left| \int_0^1 r_1(a(t)) dt \right|}{\|h\|_E} \leq \frac{k}{2} \cdot \|h\|_E \rightarrow 0 \text{ при } \|h\|_E \rightarrow 0,$$

то есть $\int_0^1 r_1(a(t)) dt = o(\|h\|_E)$.

Следовательно, $\text{grad } V(a) = \varphi'(a)$.

Пример 4. Рассмотрим функционал

$$V(x) = \int_0^1 \left(\frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{\lambda x}{2} + \frac{x^4}{4} \right) dt,$$

где $E = \{x \in C^2[0,1] \mid x(0) = x(1) = 0\}$, $F = C[0,1]$, $H = L_2[0,1]$,

λ – параметр, $\lambda \in \mathbb{R}^1$.

Представим функционал в виде суммы

$$V(x) = V_1(x) + V_2(x) + V_3(x),$$

где $V_1(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 \dot{x}^2 dt$, $V_2(x) = \int_0^1 \frac{\lambda x}{2} dt$, $V_3(x) = \int_0^1 \frac{x^4}{4} dt$.

Очевидно, что

$$f(x) = \text{grad}V(x) = \sum_{i=1}^3 \text{grad}V_i(x) = -\frac{d^2}{dt^2}x + \frac{\lambda}{2} + x^3$$

(см. примеры 2 и 3).

