§5. Определители. Обратная матрица. Ранг матрицы

п.1. Определители.

Каждой квадратной матрице A можно поставить в соответствие некоторое число, которое называется *определителем* и обозначается

Определителем первого порядка называется число, которое определяется по правилу

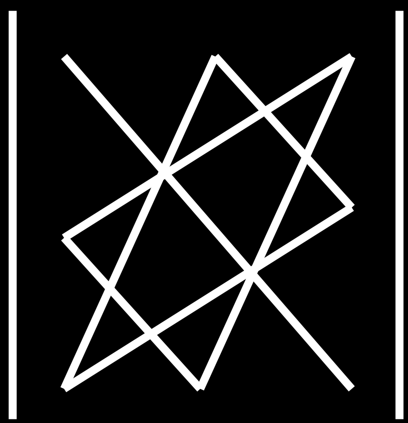
Определителем второго порядка называется число, которое определяется по правилу

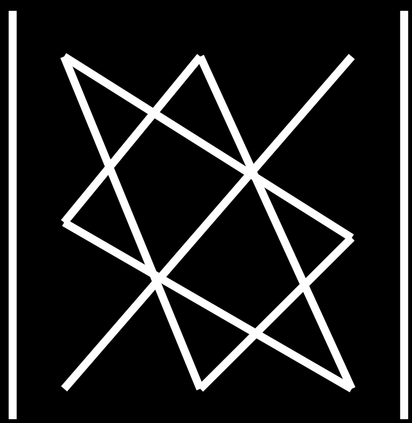
Пример.

Определителем третьего порядка называется число, которое определяется по правилу

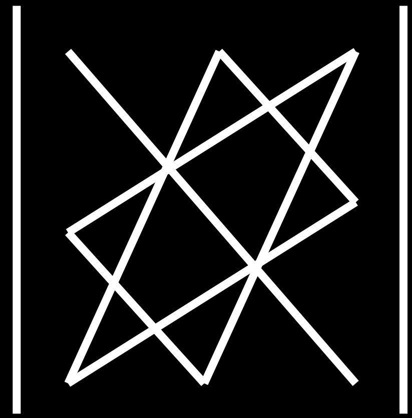
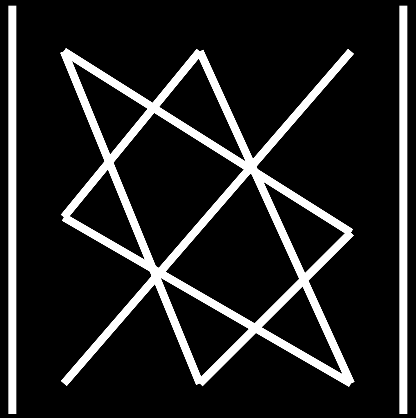
Правило треугольников

(+)

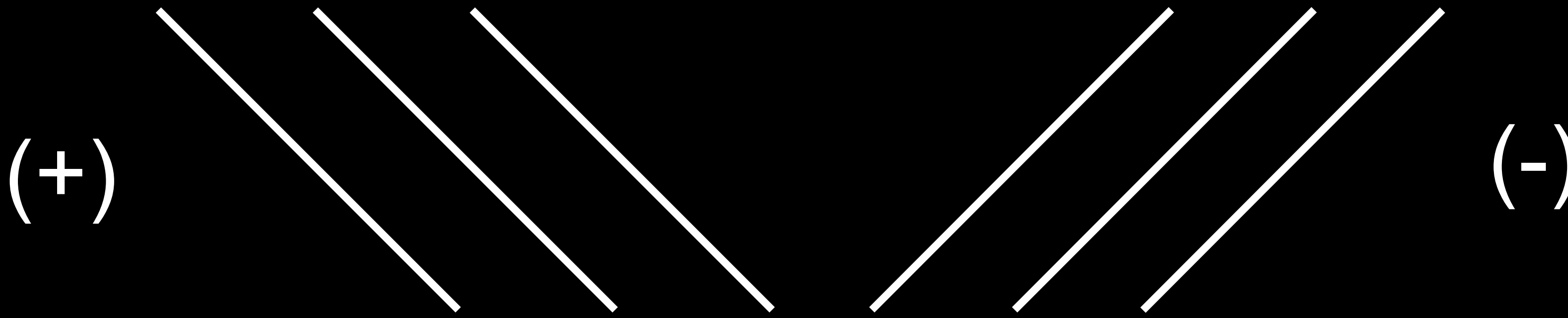




(-)

(+)   (-)

Пример.



Пример.

Свойства определителей

1. Если определитель транспонировать, то его значение не изменится.

Пример.

Проверить самостоятельно.

2. Если в определителе поменять местами любые две строки или столбца, то он изменит знак.

Пример.

Проверить самостоятельно.

3. Если любую строку (столбец) определителя умножить на число, то получим определитель равный исходному, умноженному на это число.

Другими словами, общий множитель элементов любой строки (столбца) можно вынести за знак определителя.

Пример.

Проверить самостоятельно.

4. Если все элементы какой-либо строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю.

Пример.

Проверить самостоятельно.

5. Если соответствующие элементы каких-либо двух строк (столбцов) равны между собой, то определитель равен нулю.

Пример.

Проверить самостоятельно.

Замечание 1.

Если элементы какой-либо строки (столбца) пропорциональны соответствующим элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

Доказательство.

Свойство 3 Свойство 5

6. Если элементы какой-либо строки (столбца) являются суммой двух слагаемых, то определитель можно разложить на сумму двух соответствующих определителей.

7. Если к элементам какой-либо строки (столбца) определителя прибавить элементы другой строки (столбца) этого же определителя, умноженные на любое число, то значение определителя не изменится.

Доказательство. Св. 6 Зам. 1

Пример.

Первую строку домножим на (-2) и сложим со второй.

Первую строку сложим с третьей.

Проверить самостоятельно.

Минором элемента определителя называется определитель, получаемый из исходного вычеркиванием i-той строки и j-того столбца.

Обозначается:

Пример.

Алгебраическим дополнением элемента определителя называется число, которое обозначается и равное

Пример.

Теорема 1 (Лапласа).
Определитель равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.
Доказательство.

Преобразуем правую часть

Пример.

Выберем ту строку (столбец), которая содержит наибольшее количество нулей.

Теорема 2 (аннулирования).
Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

п.2. Обратная матрица

Квадратная матрица называется *(не) вырожденной*, если ее определитель (не) равен нулю.

Матрица называется *обратной* к матрице , если выполняются равенства:

Нахождение обратной матрицы

— определитель матрицы A

— алгебраическое дополнение

Доказательство.

Найдем произведение

Применяем теоремы Лапласа и аннулирования

Значит,

или

Аналогично,

По определению

Пример.

матрица А невырождена,

существует

Свойства обратной матрицы

1)

2)

3)

п.3. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу

Пусть

Выделим в матрице k строк и k столбцов.
Из элементов, стоящих на пересечении, составим определитель порядка k.

Составленные таким образом определители называются минорами матрицы.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ \text{[redacted]} & 2 & 1 & \text{[redacted]} & 1 \\ 1 & 4 & -2 & -3 & 5 \\ 2 & 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим минор 3-го порядка.

Рангом матрицы называется наибольший порядок отличного от нуля минора этой матрицы.

Обозначается

Замечание 2.

Пример.

Свойства ранга матрицы

1) Ранг матрицы не меняется при транспонировании.

2) Ранг матрицы не меняется при умножении строки (столбца) на число, не равное нулю.

3) Ранг матрицы не меняется при вычеркивании нулевой строки (столбца).

4) Ранг матрицы не меняется при сложении элементов какой-либо строки (столбца) с соответствующими элементами другой строки (столбца), умноженными на некоторое число.

Пример. Найти ранг матрицы

Решение.

Значит,