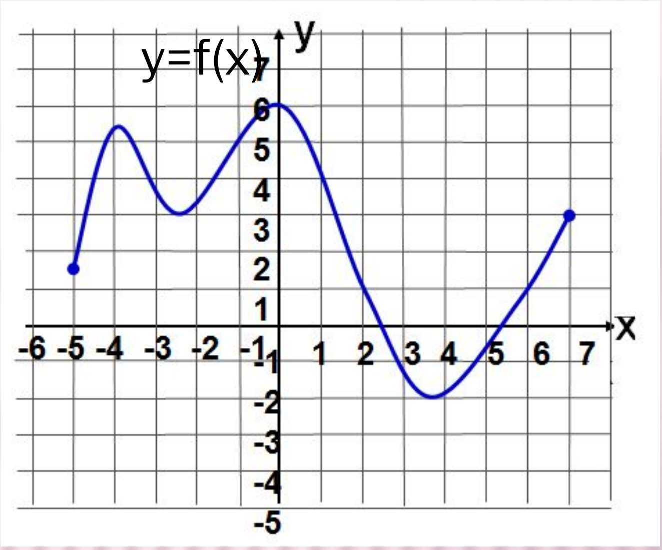
«Применение производной к исследованию графиков функций. Асимптоты графика функций»

Возрастание функции

Убывание функции

Нули функции



Точки максимума

Точки минимума

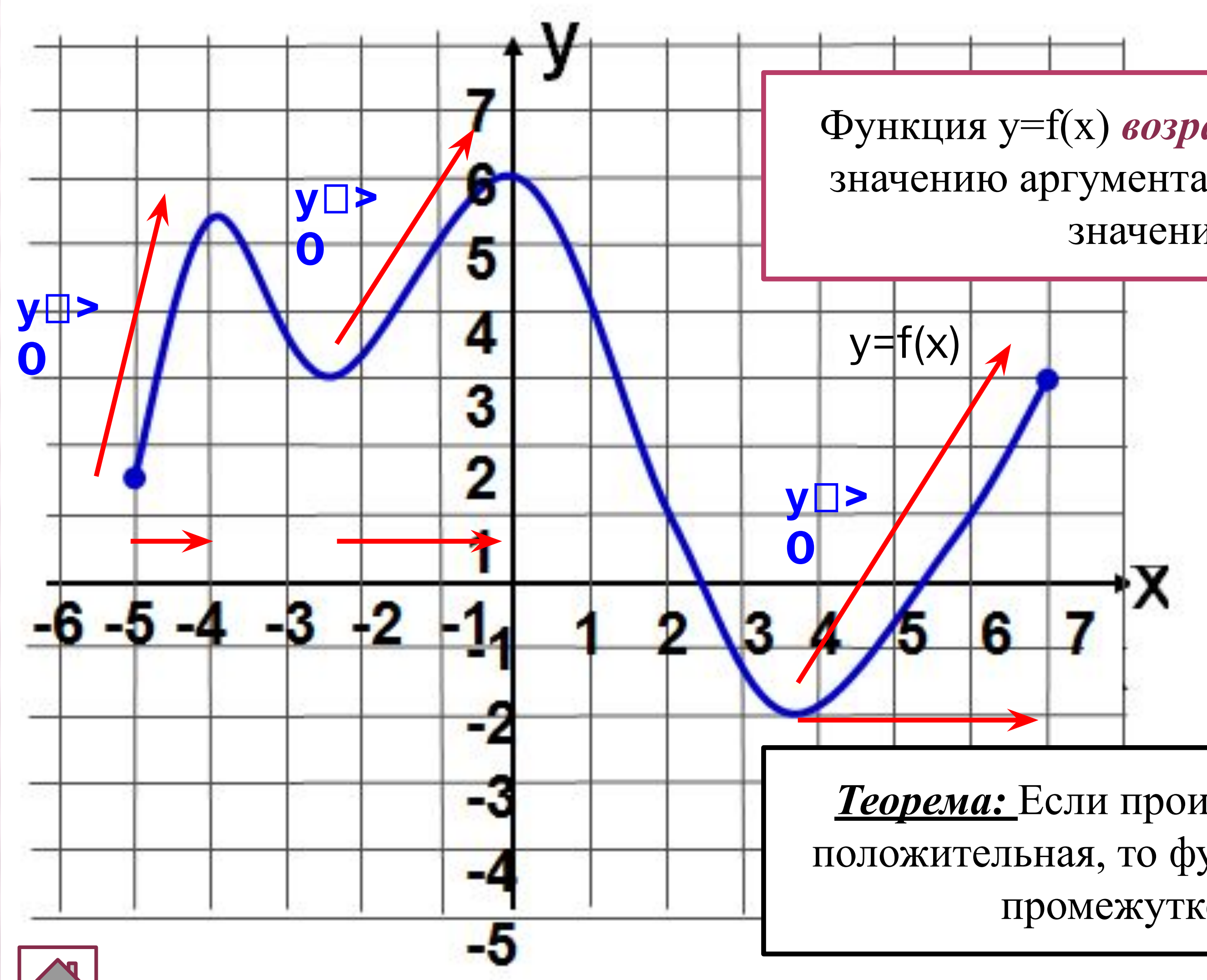
Точки перегиба

Вогнутость функции

Выпуклость функции

1. Возрастание функции

Функция y=f(x) называется ***возрастающей*** на промежутке, если при возрастании аргумента, значение функции увеличивается

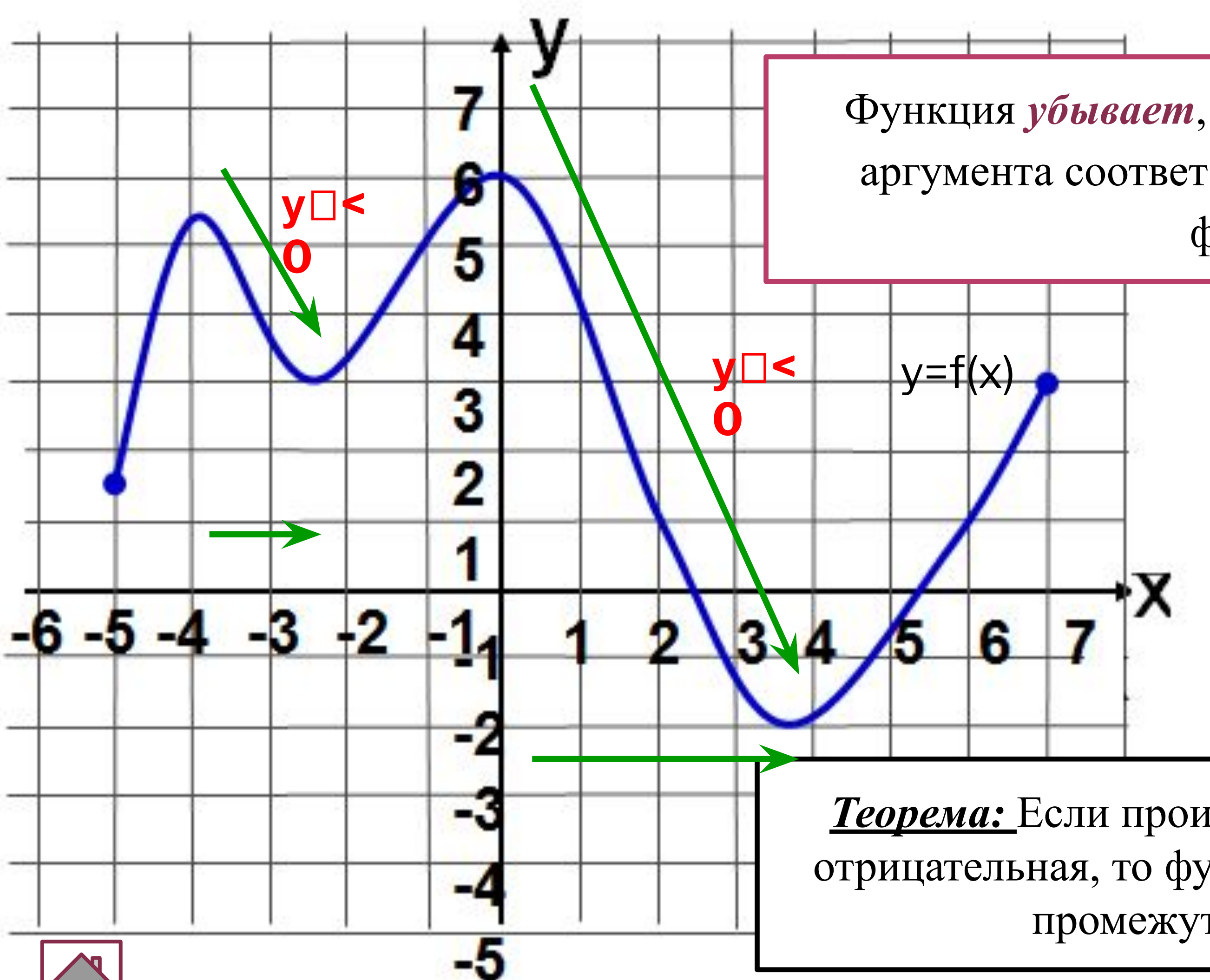


Функция y=f(x) ***возрастает,*** если <u>большему</u> значению аргумента соответствует <u>большее</u> значение функции

<u>Теорема:</u> Если производная на промежутке положительная, то функция y=f(x) на данном промежутке ***возрастает.***

2. Убывание функции

Функция y=f(x) называется ***убывающей*** на промежутке, если при возрастании аргумента, значение функции уменьшается.

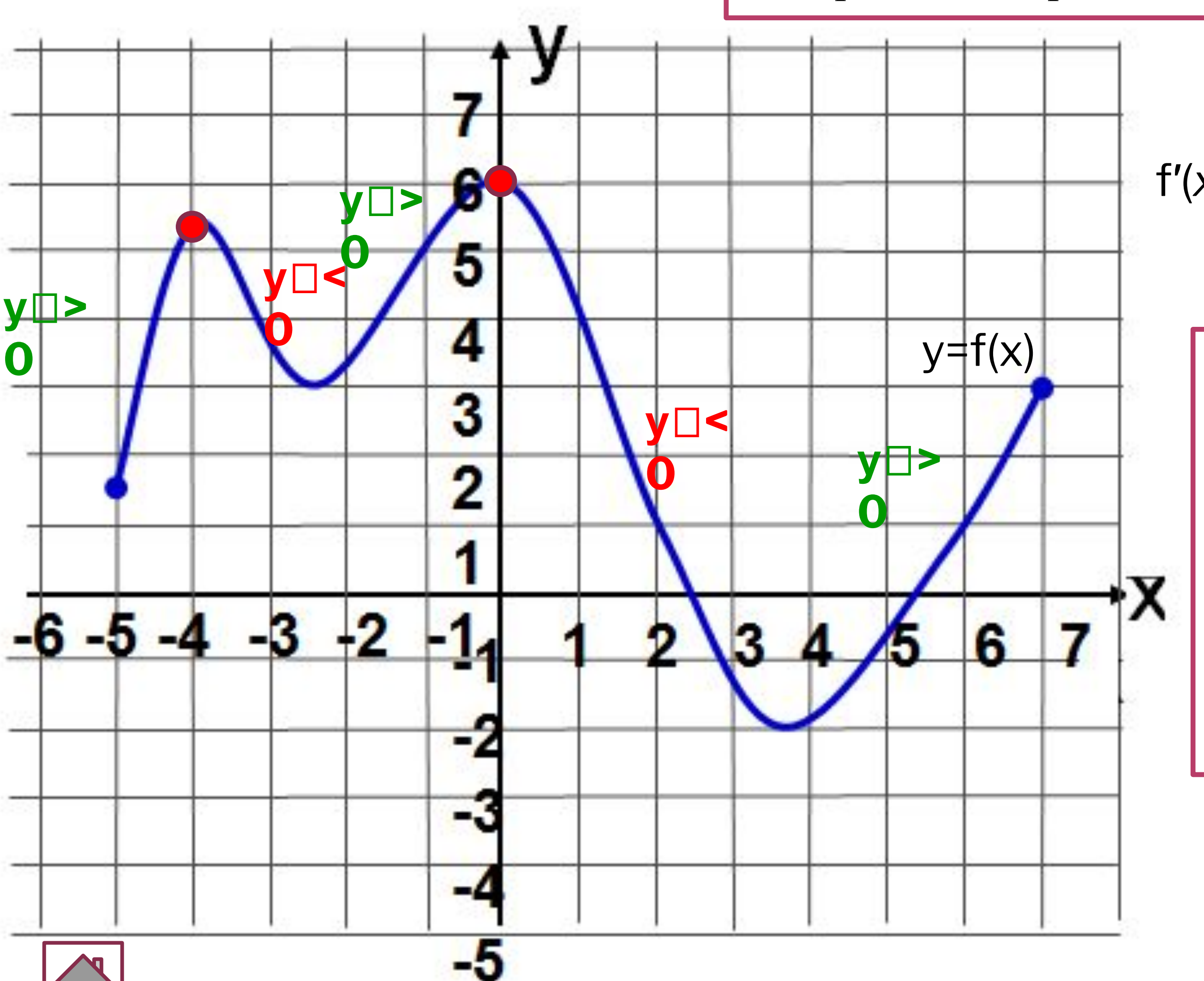


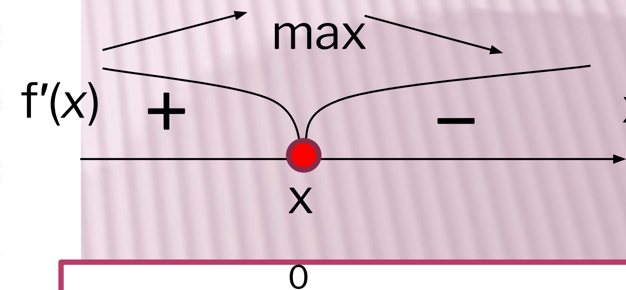
Функция ***убывает***, если <u>большему</u> значению аргумента соответствует <u>меньшее</u> значение функции

<u>Теорема:</u> Если производная на промежутке отрицательная, то функция y=f(x) на данном промежутке ***убывает.***

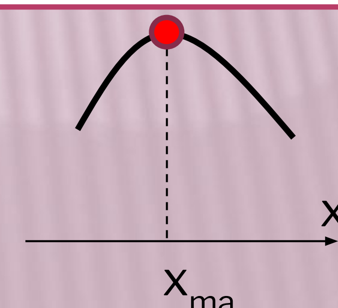
3. *Точки максимума*

Точка ***x = a*** называется ***точкой максимума*** функции y=f(x) если производная в данной точке равна 0, и при переходе через эту точку слева направо знак производной меняется с (+) на (-)



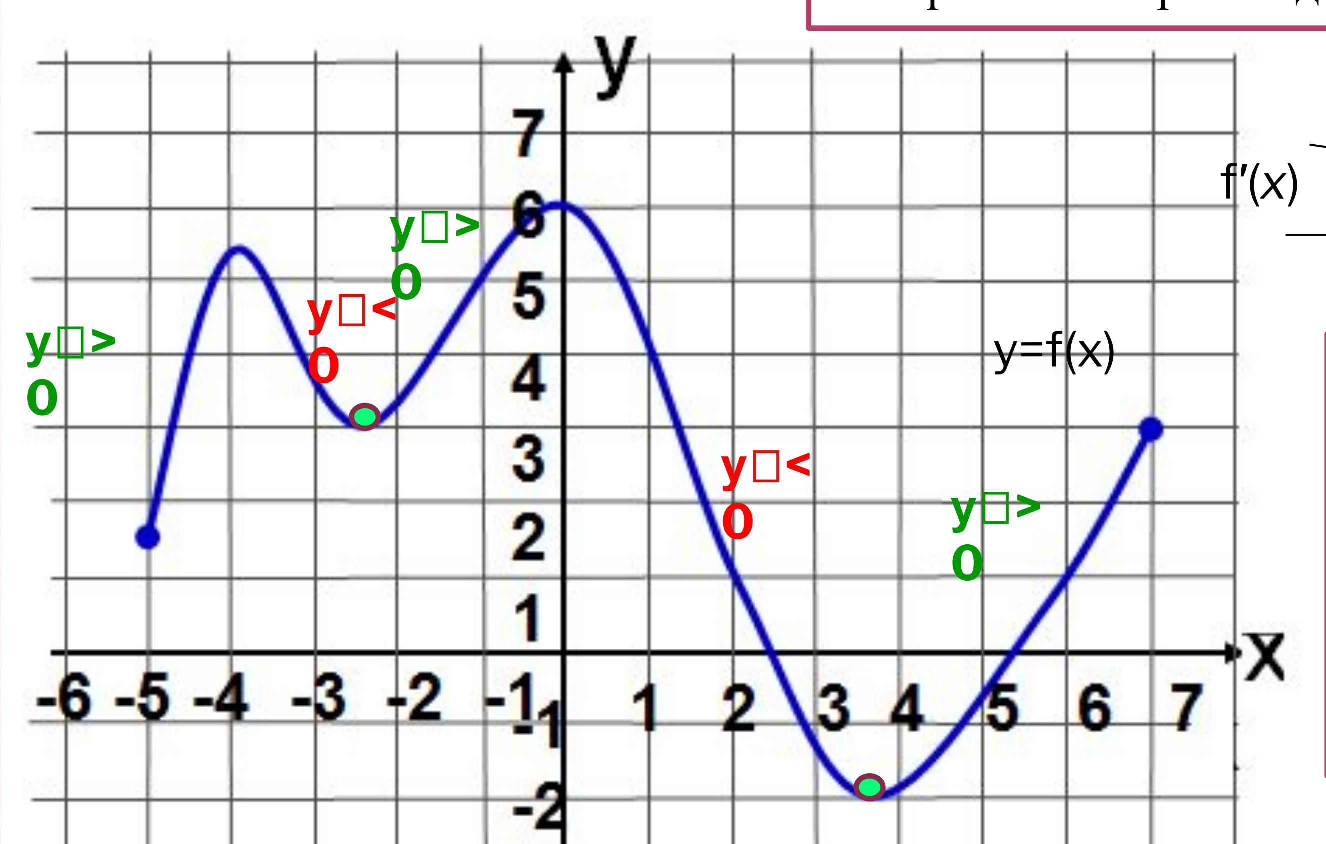


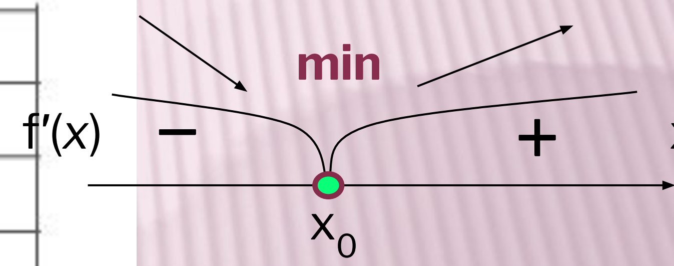
Распознать точку максимума по графику функции очень просто. График функции в окрестности точки максимума выглядят как гладкий “холм”



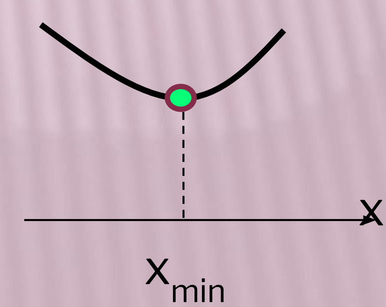
4. Точки минимума

Точка $x = a$ называется ***точкой минимума*** функции y=f(x) если производная в данной точке равна 0, и при переходе через эту точку слева направо знак производной меняется с (-) на (+)





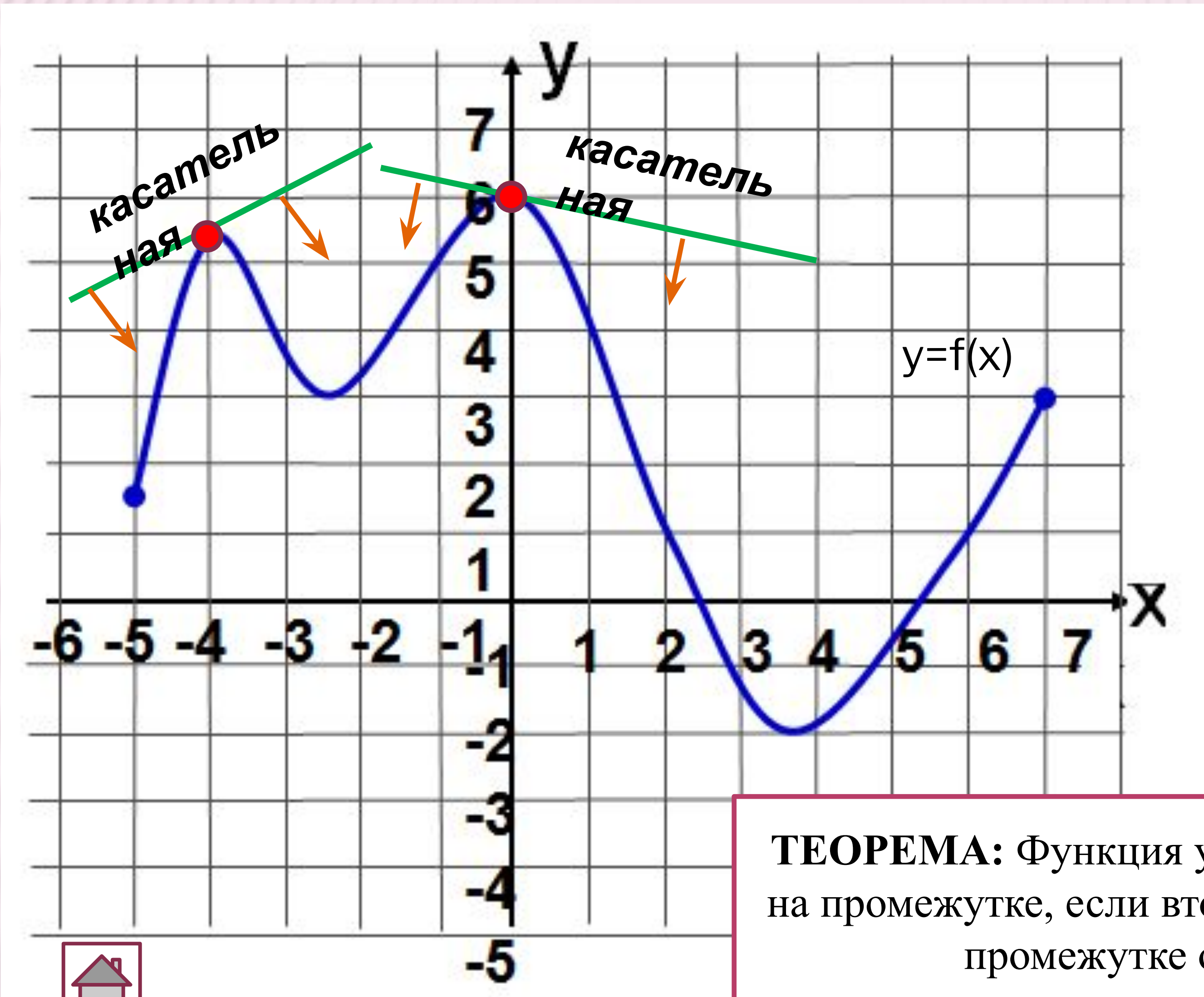
Распознать точку минимума по графику функции очень просто. График функции в окрестности точки минимума выглядят как гладкая “впадина”

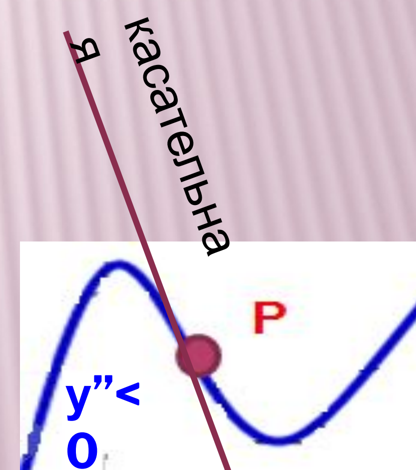


Точки ***минимума*** и точки ***максимума*** называются ***точками экстремума.***

5. Выпуклость функции

Функция y=f(x) называется ***выпуклой*** на промежутке, если все точки графика функции расположены ниже касательной.

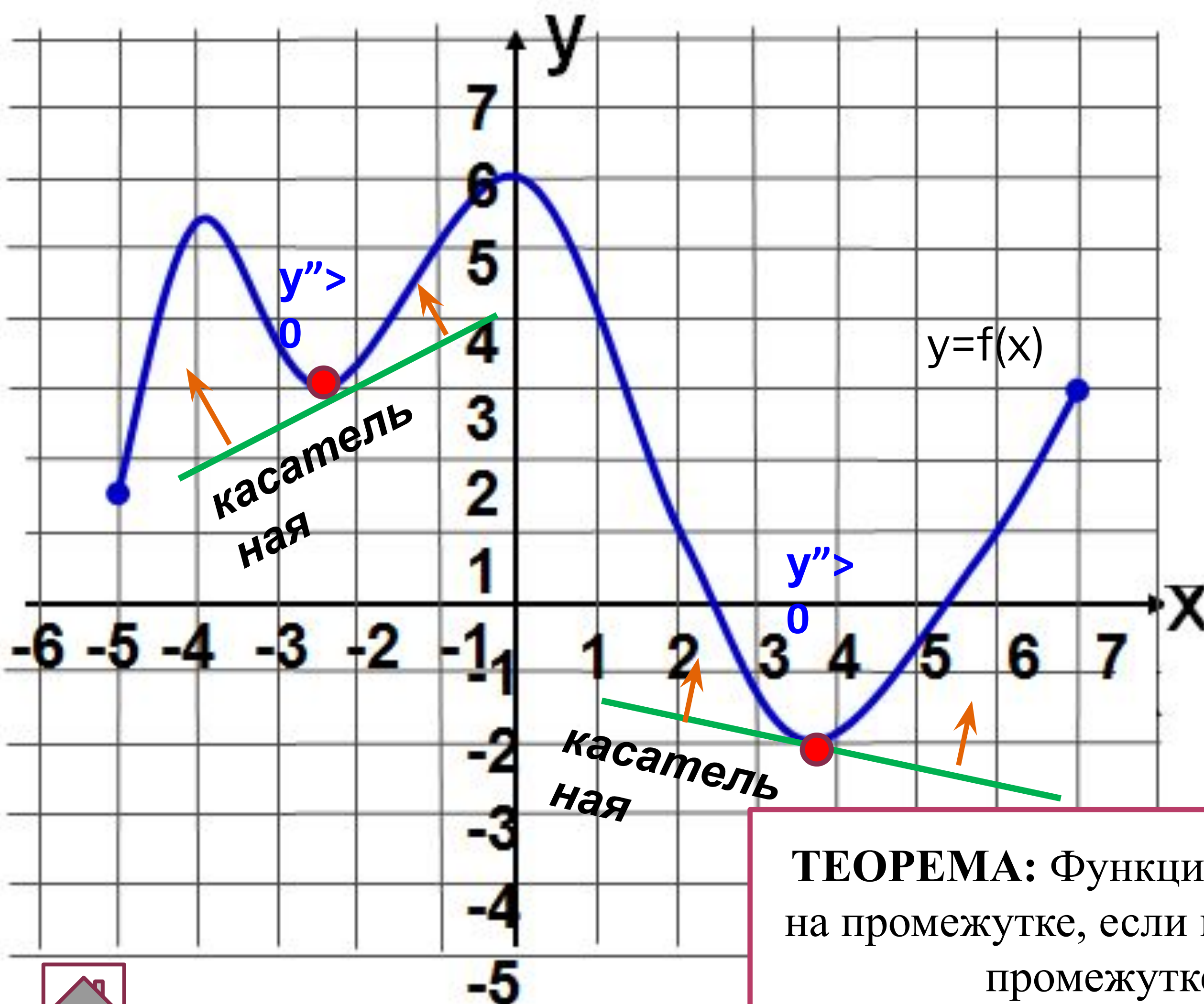


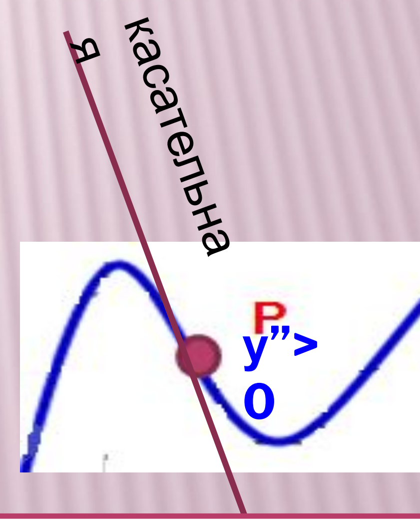


ТЕОРЕМА: Функция y=f(x) является ***выпуклой*** на промежутке, если вторая производная на этом промежутке отрицательная.

6. Вогнутость функции

Функция y=f(x) называется ***вогнутой*** на промежутке, если все точки графика функции расположены выше касательной.

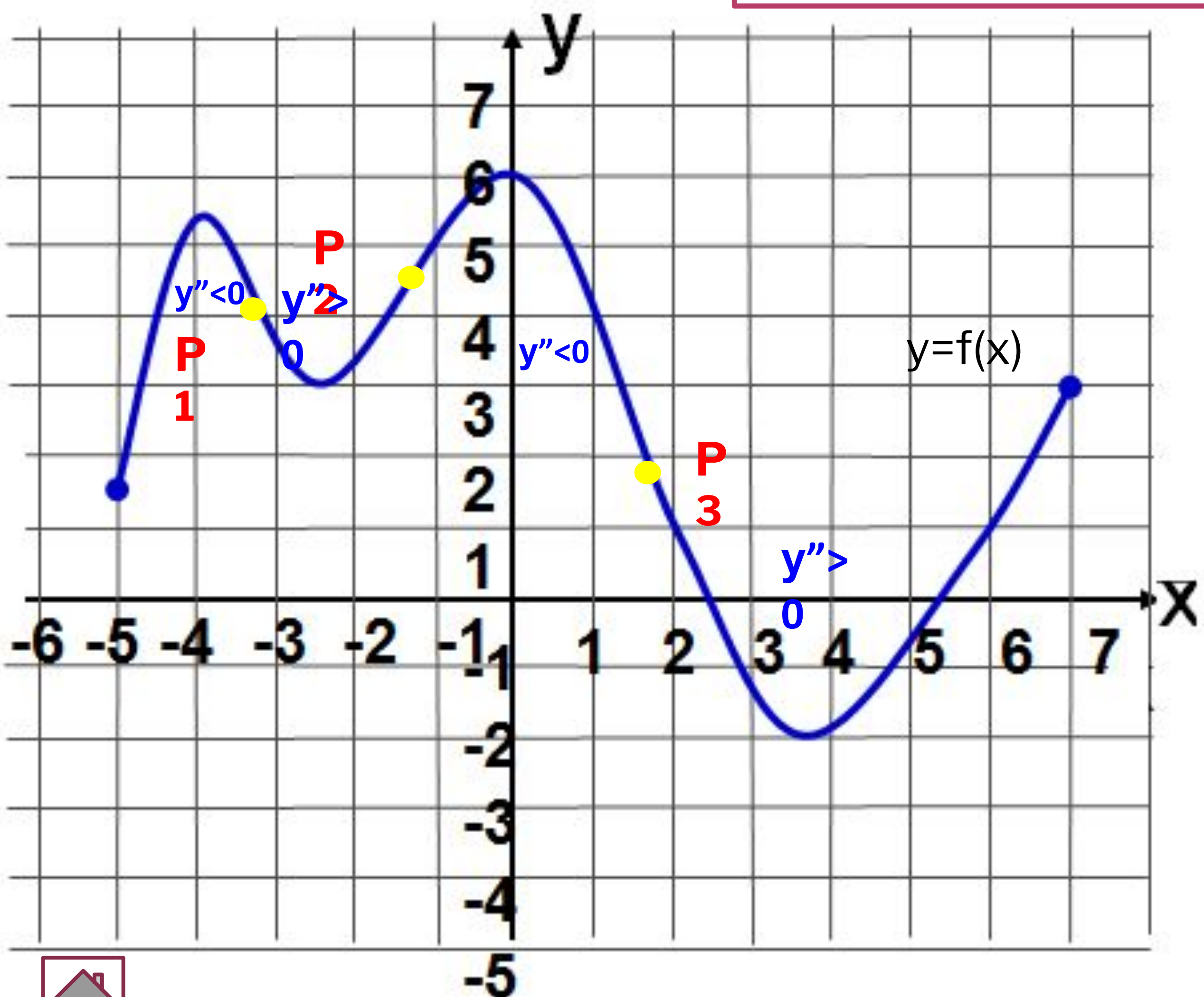




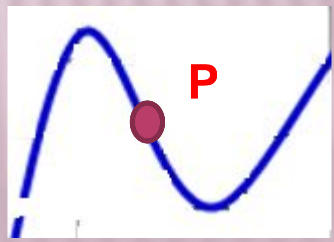
ТЕОРЕМА: Функция y=f(x) является ***вогнутой*** на промежутке, если вторая производная на этом промежутке положительная.

7. Точки перегиба

Точка ***P*** называется ***точкой перегиба*** функции y=f(x) если при переходе через эту точку слева направо знак второй производной меняется.

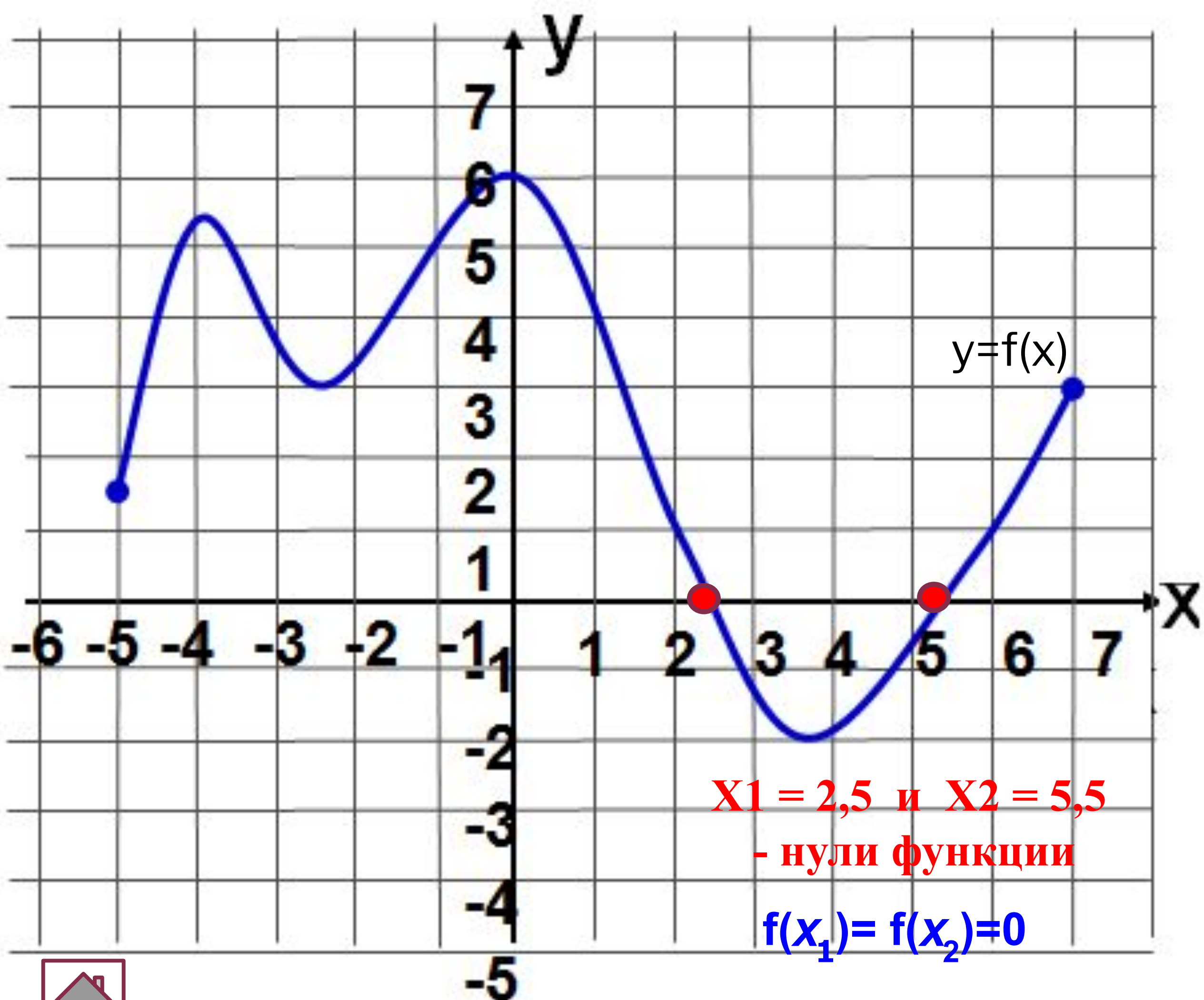


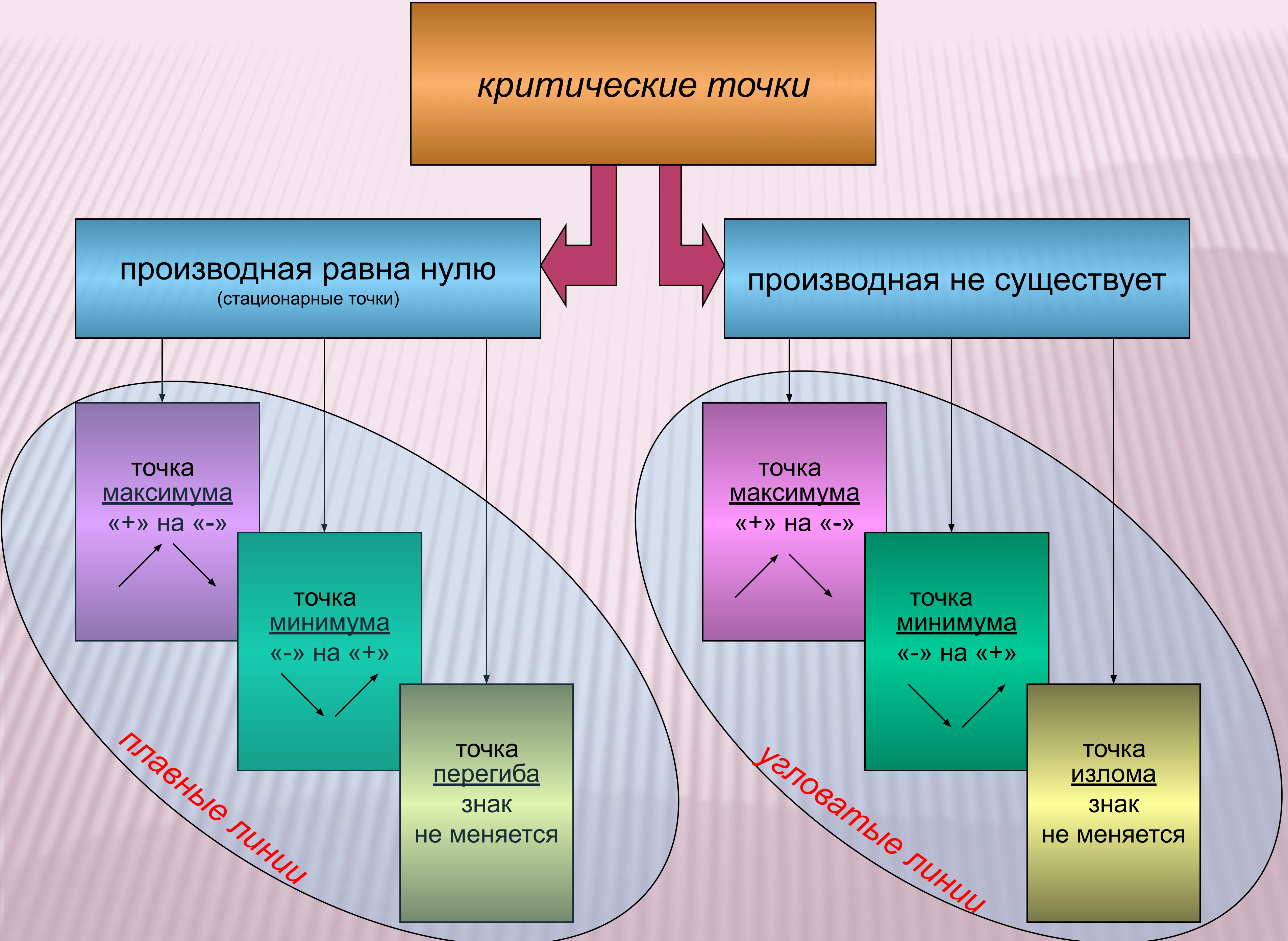
Распознать точку перегиба по графику функции очень просто. График функции в окрестности точки перегиба выглядит границей между "холмом" и "впадиной"



8. Нули функции

Точки, в которых график функции пересекает ось ОХ называются ***нулями функции***. Ординаты этих точек равны 0. $f(x_1)= f(x_2)=0$




критические точки
производная равна нулю
(стационарные точки)
производная не существует
точка максимума «+» на «-»
точка минимума «-» на «+»
точка перегиба знак не меняется
плавные линии
точка максимума «+» на «-»
точка минимума «-» на «+»
точка излома знак не меняется
угловатые линии

Пример №1. Найти промежутки монотонности функции $y=2x^3-3x^2-36x+5$

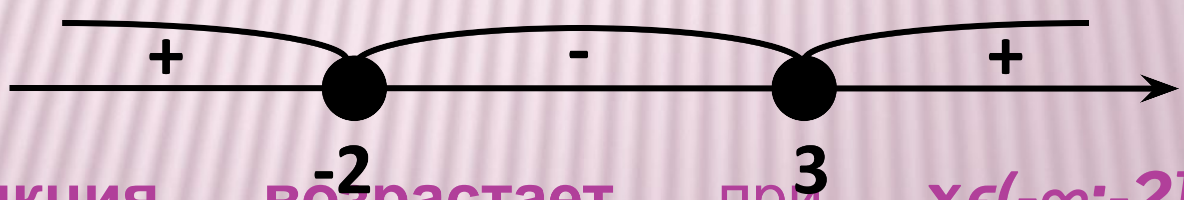
1. **Область определения**: R. Функция непрерывна.
2. **Вычисляем производную :** $y'=6x^2-6x-36$.
3. **Находим критические точки:** $y'=0$.

$$x^2-x-6=0$$

$$Д=1-4*(-6)*1=1+24=25$$

$$x_1=\frac{1-5}{2}=-2 \qquad x_2=\frac{1+5}{2}=3$$

4. **Делим область определения на интервалы:**



5. **Функция возрастает** при **xϵ(-∞;-2]υ[3;+∞)**, *функция* ***убывает*** *при* ***xϵ[-2;3]***.

Пример №3. Найти экстремумы функции

$y=-2x^3-3x^2+12x-4$

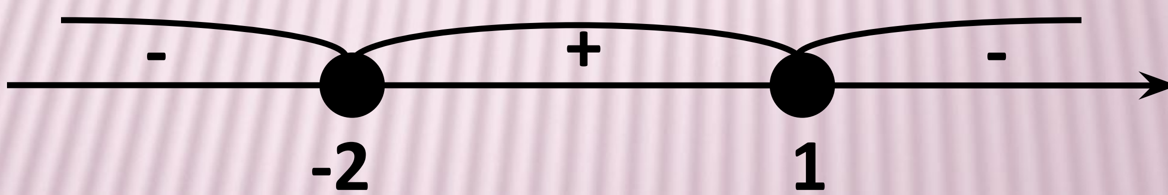
1. **Область определения**: R (х-любое) Функция непрерывна.
2. **Вычисляем производную :** $y'=-6x^2-6x+12$.
3. **Находим критические точки:** $y'=0$.

$$-x^2-x+2=0$$

$$Д=1-4*(-1)*2=1+8=9$$

$$x_1=1;\ x_2=-2$$

4. **Делим область определения на интервалы:**



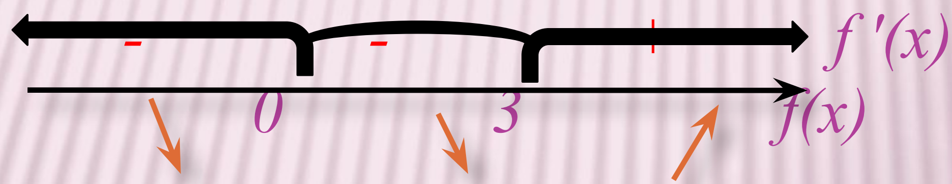
5. ***x=-2 – точка минимума***. *Найдём минимум функции* ***y_{min}=-24***. ***x=1 – точка максимума***. *Найдём максимум функции:* ***y_{max}=3***.

Пример №4. Найти экстремумы функции $f(x)=x^4-4x^3$

1. ООФ x-любое
2. $f'(x)=(x^4-4x^3)'=4x^3-4\cdot 3x^2=4x^3-12x^2$
3. $f'(x)=0$ $\quad 4x^3-12x^2=0$

   $4x^2(x-3)=0$

   $x=0 \quad x=3$ – стационарные точки

4. 

5. x=3 – точка min ( )

x=0 – точка перегиба (т.к. производная в этой точке свой знак не меняет)

- **Пример №7. Найти экстремумы функции** $y=x^3+3x^2+9x-6$.

Решение:

1. Находим область определения функции: $D(y)=R$.
2. Находим производную: $y'=(x^3+3x^2+9x-6)'=3x^2+6x+9$.
3. Приравниваем её к нулю: $3x^2+6x+9=0$, откуда $D<0$. То есть критических точек не существует.
4. Однако, функция возрастает на всей $D(y)$, так как $y'=3x^2+6x+9>0$:

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ

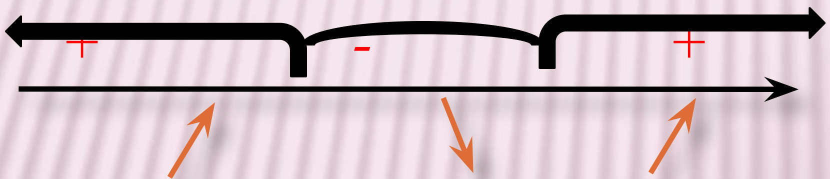
Пусть дана функция f(x)

1. Найти ООФ

2. Найти производную $f'(x)$

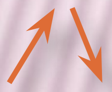
3. Найти корни уравнения (стационарные точки) $f'(x)=0$

4. Найти на числовой прямой промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремумов.



$f'(x)$

$f(x)$



*- **точка max***

*- **точка min***

*Если производная знаки не меняет, значит эта **точка перегиба***

5. Записать ответ

СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Алгоритм

исследования функции с помощью производной:

Пусть дана функция f(x)

1. *Область определения функции.*
2. *Четность.*
3. *Периодичность.*
4. *Точки пересечения графика с осями координат (нули функции)*

   С осью Ox y=0, т.е. f(x)=0 *С осью Oy x=0, т.е. y(0).*

5. *Найти производную f '(x)*
6. *Найти корни уравнения (стационарные точки) f '(x)=0*
7. *Найти на числовой прямой точки экстремума (точка max ; точка min)*

   Если производная знаки не меняет, значит эта точка перегиба

8. *Значение функции в этих точках, т. е. y_{max} и y_{min} (подставлять в f(x))*
9. *Направление выпуклости графика функции.*
10. *Построение графика и нахождение дополнительных координат (если это требуется)*

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

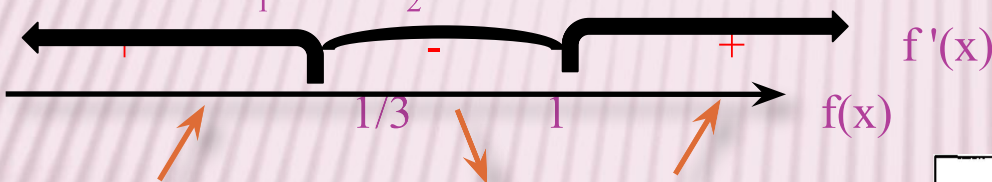
Задача.

Построить график функции $y=x^3-2x^2+x$

1. ООФ: x – любое
2. $f'(x)=(x^3-2x^2+x)' = 3x^2-2\cdot 2x+1 = 3x^2-4x+1$
3. $f'(x)=0 \qquad 3x^2-4x+1=0$

$x_1=1 \qquad x_2=1/3$

4\.



x=1/3 – т. max (↗↘) x=1 – т. min (↘↗)

5\. $y_{max}=(1/3)^3-2\cdot(1/3)^2+1/3=4/27$

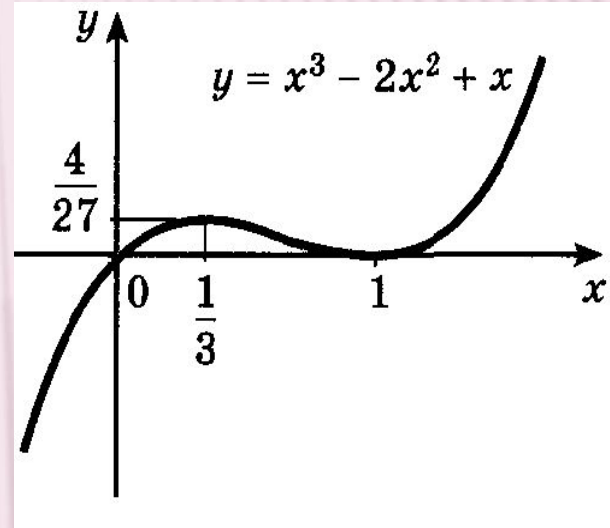
$y_{min}=1^3-2\cdot 1^2+1=0$

6\. Находим точки пересечения графика с осями координат:

С осью Ox $y=0 \Rightarrow x^3-2x^2+x=0$ С осью Oy $x=0 \Rightarrow y(0)=0^3-2\cdot 0^2+0=0$

$x(x^2-2x+1)=0; \qquad x=0 \quad x=1$

7\. Построение графика и нахождение дополнительных координат (если это требуется)



x	$x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<1$	1	$x>1$
$f'(x)$	+	0	–	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{27}$	↘	0	↗

АСИМПТОТЫ

АСИ́МПТОТА (ОТ ГРЕЧ. ΑΣΎΜΠΤΩΤΟΣ — НЕСОВПАДАЮЩИЙ, НЕ КАСАЮЩИЙСЯ) КРИВОЙ С БЕСКОНЕЧНОЙ ВЕТВЬЮ — ПРЯМАЯ, ОБЛАДАЮЩАЯ ТЕМ СВОЙСТВОМ, ЧТО РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ КРИВОЙ ДО ЭТОЙ ПРЯМОЙ СТРЕМИТСЯ К НУЛЮ ПРИ УДАЛЕНИИ ТОЧКИ ВДОЛЬ ВЕТВИ В БЕСКОНЕЧНОСТЬ.

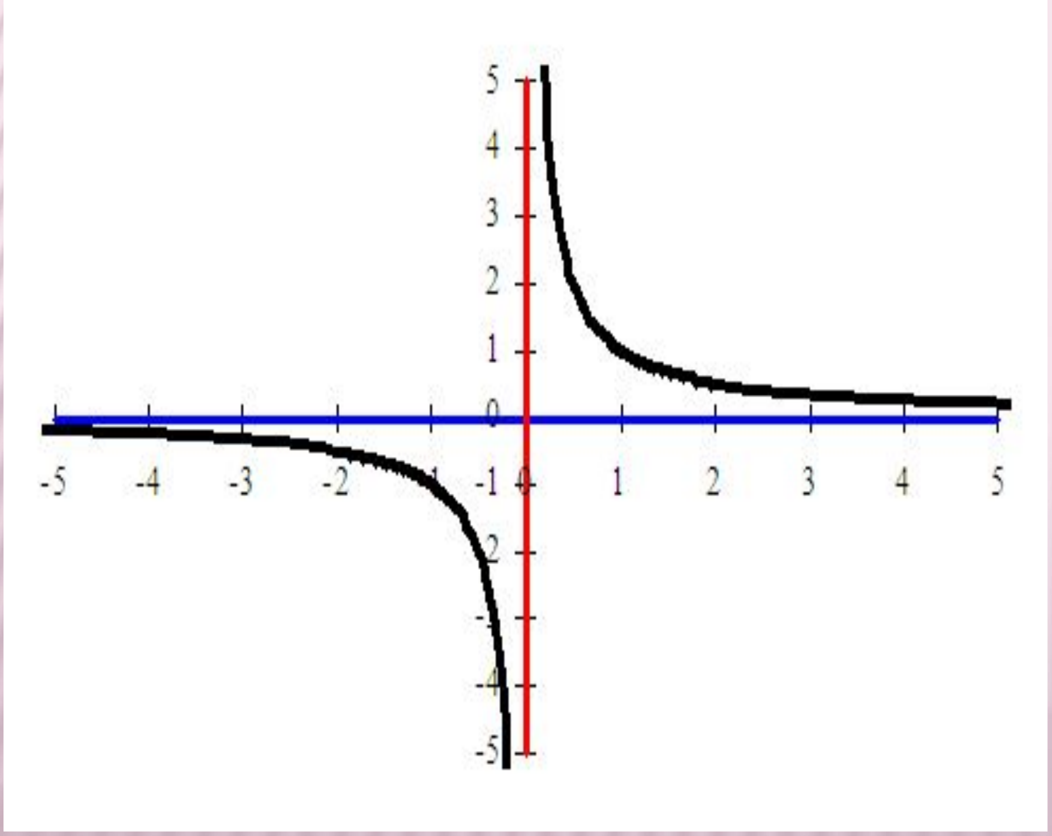
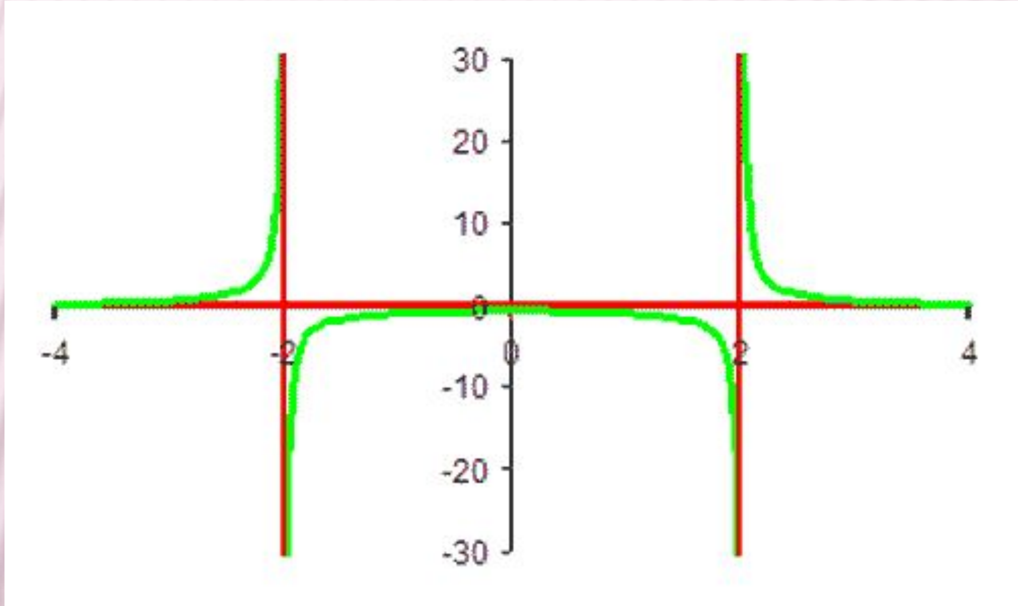


Рис. 1. Для гиперболы Y=1/X асимптотами являются оси абсцисс и ординат. Кривая может приближаться к своей асимптоте, оставаясь с одной стороны от нее

АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

ВЕРТИКАЛЬНАЯ АСИМПТОТА

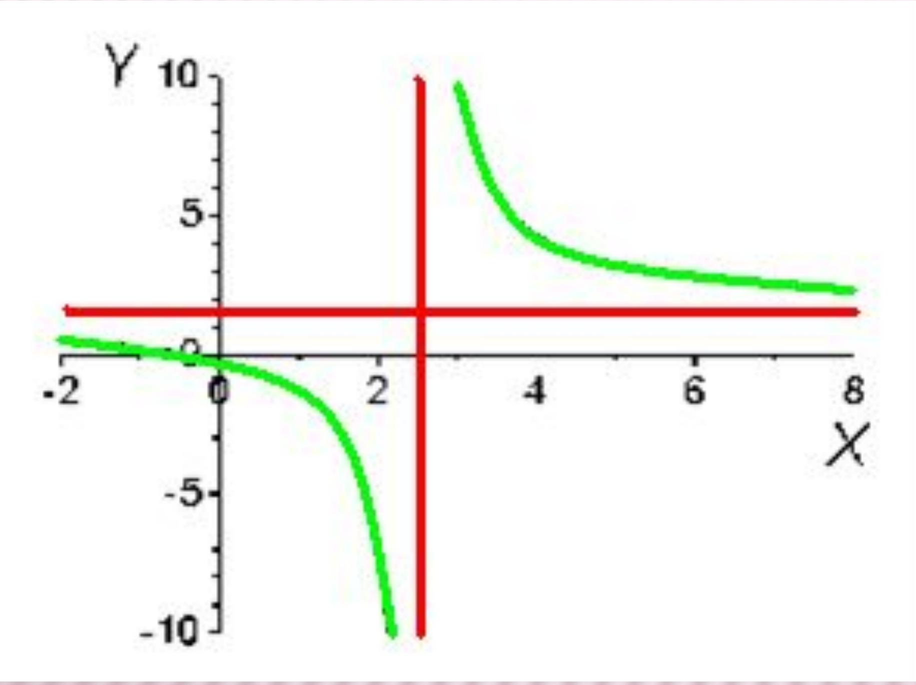
ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРЯМАЯ *X = A* НАЗЫВАЕТСЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ АСИМПТОТОЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ *Y = F* (*X*), ЕСЛИ ХОТЯ БЫ ОДНО ИЗ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ ИЛИ $\lim\limits_{x\to a-} f(x)$ РАВНО $\pm\infty$

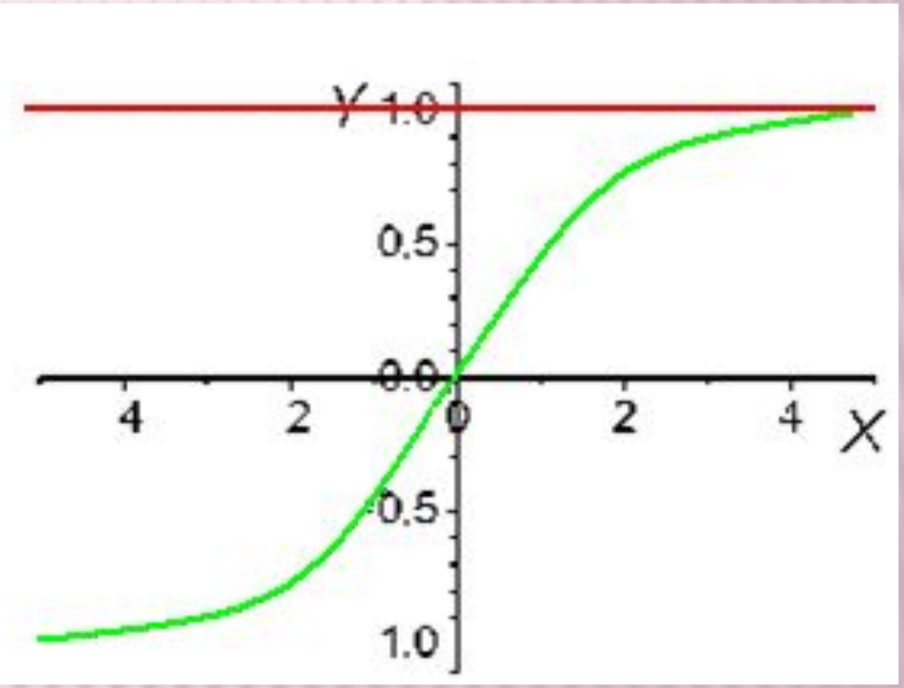


Наличие вертикальной асимптоты характеризует поведение функции в окрестности данной конечной точки (не на бесконечности).

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ АСИМПТОТА

Определение. **Прямая *y* = *b* называется горизонтальной асимптотой графика функции y = f (x), если** $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$





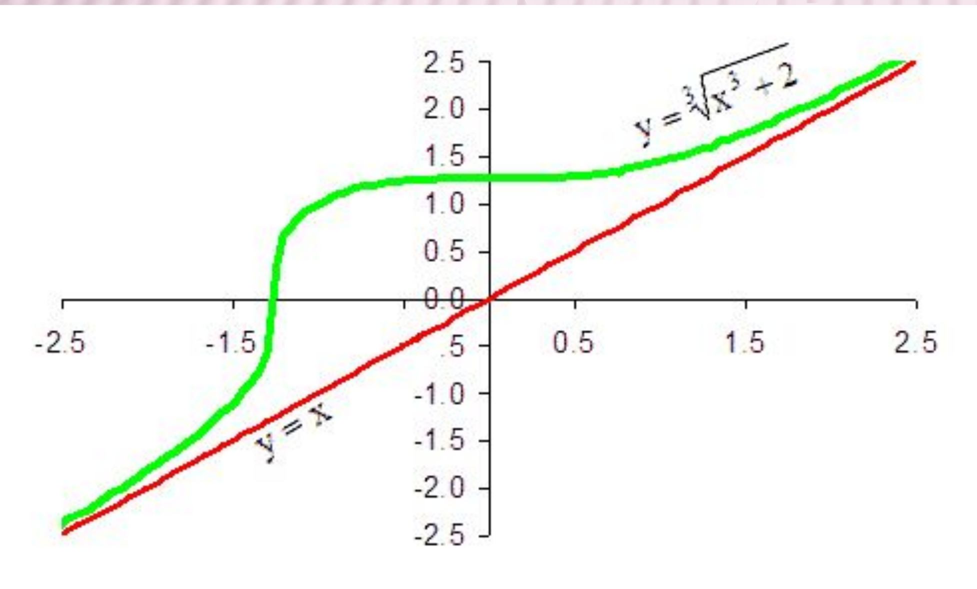
<u>**НАКЛОННАЯ АСИМПТОТА**</u>

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРЯМАЯ *Y = KX + B* НАЗЫВАЕТСЯ НАКЛОННОЙ АСИМПТОТОЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ *Y = F* (X),
ЕСЛИ [*F* (X) - (KX + B)] = 0

ФОРМАЛЬНО, ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ АСИМПТОТУ МОЖНО РАССМАТРИВАТЬ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ НАКЛОННОЙ, ЕСЛИ К=0.

ТЕОРЕМА. ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ПРЯМАЯ *Y = KX + B* БЫЛА НАКЛОННОЙ АСИМПТОТОЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ *Y = F* (X), НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО, ЧТОБЫ СУЩЕСТВОВАЛИ ДВА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯ:

К= $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ И В= $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-\kappa x)$



РАССМОТРИМ ПОЛНУЮ СХЕМУ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЯ ЕЕ ГРАФИКА ПО ПОЛУЧЕННЫМ РЕЗУЛЬТАТАМ ИССЛЕДОВАНИЯ.

$$y = \frac{x^2 - x + 6}{x - 6}$$

Решение :

1. $x \in (-\infty;6) \cup (6;+\infty)$

2. $f(-x) = \dfrac{x^2 + x + 6}{-x-6} \Rightarrow$ *функция ни четная, ни нечетная* $\Rightarrow$ *симметрии графика нет.*

3. $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow \boxed{A(0;-1)}$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \dfrac{1}{2} \pm \sqrt{\dfrac{1}{4} - 6} \Rightarrow$ *в поле действительных чисел решения нет* $\Rightarrow$ *точек пересечения с осью OX нет.*

4. $\quad$ *Вертикальная асимптота* : $x = 6$

Наклонная асимптота : $y = кx + в \Rightarrow$

$$к = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x + 6}{x^2 - 6x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x + 6}{x - 6} - x\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - x + 6 - x^2 + 6x}{x - 6} =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \frac{5x + 6}{x - 6} = 5 \Rightarrow y = x + 5$$

$$5.\quad y' = \frac{(2x-1)(x-6)-(x^2-x+6)}{(x-6)^2} =$$

$$= \frac{2x^2-13x+6-x^2+x-6}{(x-6)^2} = \frac{x^2-12x}{(x-6)^2}$$

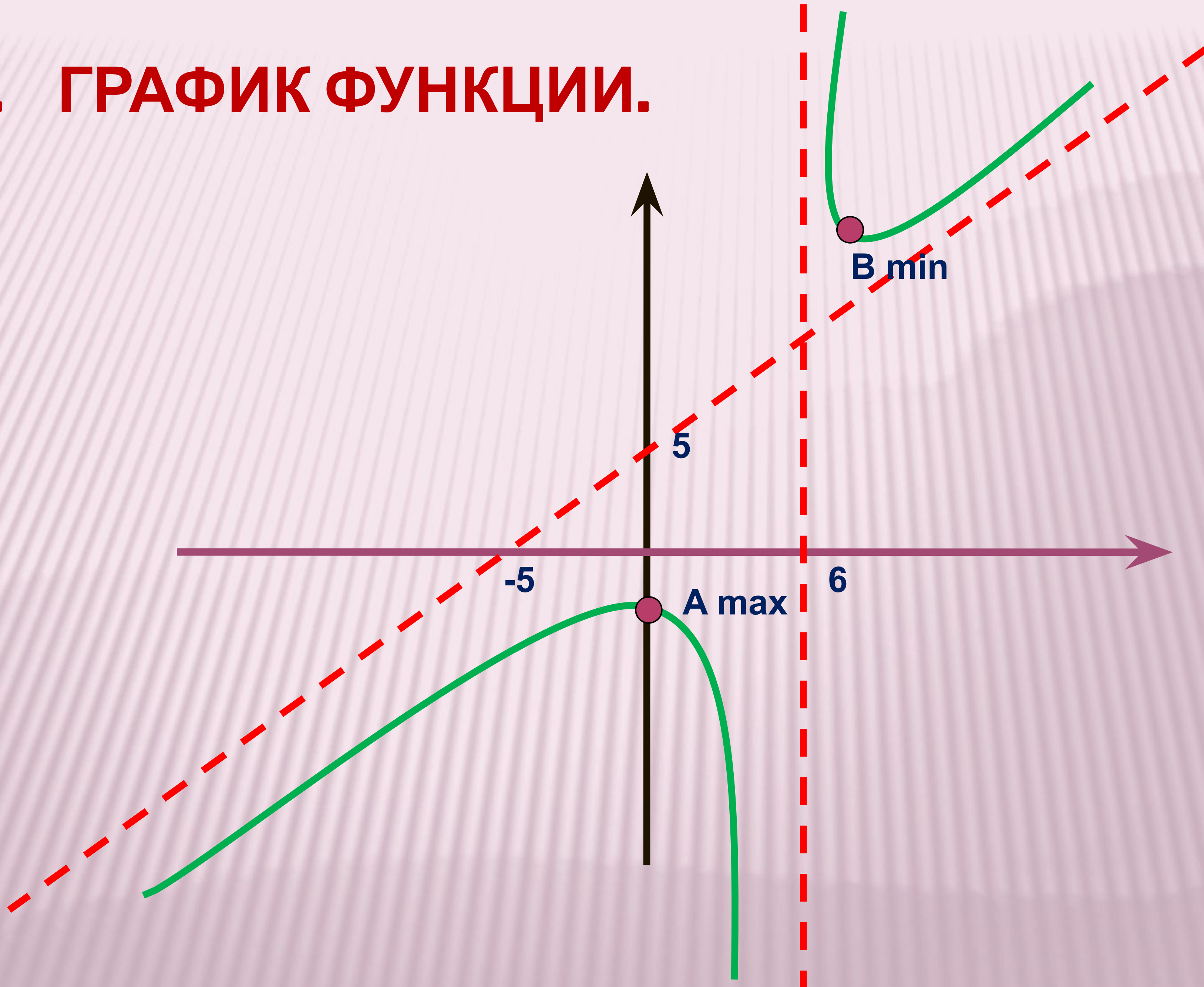
$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(x-12)=0 \\ x-6 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=12 \Rightarrow \\ x \neq 6 \end{cases}$$

+	max	−		−	min	+	x
	0		6		12		

$$f_{\max}(0) = -1 \Rightarrow \boxed{A\ (0;-1)}$$

$$f_{\min}(12) = \frac{144-12+6}{12-6} = \frac{138}{6} = 23 \Rightarrow \boxed{B\ (12;23)}$$

7. ГРАФИК ФУНКЦИИ.



$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 9}$$

РЕШЕНИЕ :

$1. x \in (-\infty;-3) \cup (-3;3) \cup (3;+\infty)$

$2. f(-x) = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 9} \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$ *функция четная,*

график симметричен оси ОУ

$3. x = 0 \Rightarrow y = -\dfrac{2}{9} \Rightarrow A(0; -\dfrac{2}{9})$

$y \neq 0 \Rightarrow$ *точек пересечения с осью ОУ нет.*

4. *Вертикальные асимптоты*

(существуют в точках разрыва)

$$x=-3 \quad и \quad x=3$$

Наклонная асимптота: $y=кx+в \Rightarrow$

$$к=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x^3-9x}=0$$

$$b=\lim_{x\to x}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+2}{x^2-9})=1\Rightarrow \quad y=1$$

$$5.\quad y' = \frac{2x(x^2-9) - 2x(x^2+2)}{(x^2-9)^2} = \frac{2x(x^2-9-x^2-2)}{(x^2-9)^2} = \frac{-22x}{(x^2-9)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$$

$+$	-3	$+$	0	$-$	3	$-$	x
			max				

$$f_{\max}(0) = -\frac{2}{9} \Rightarrow \boxed{A\ (0; -\frac{2}{9})}$$

$$6.\quad y'' = \frac{-22(x^2-9)^2 - 2(x^2-9)2x(-22x)}{(x^2-9)^4} =$$

$$= \frac{-22(x^2-9)(x^2-9-4x^2)}{(x^2-9)^4} = \frac{22(3x^2+9)}{(x^2-9)^3}$$

$$y'' \neq 0$$

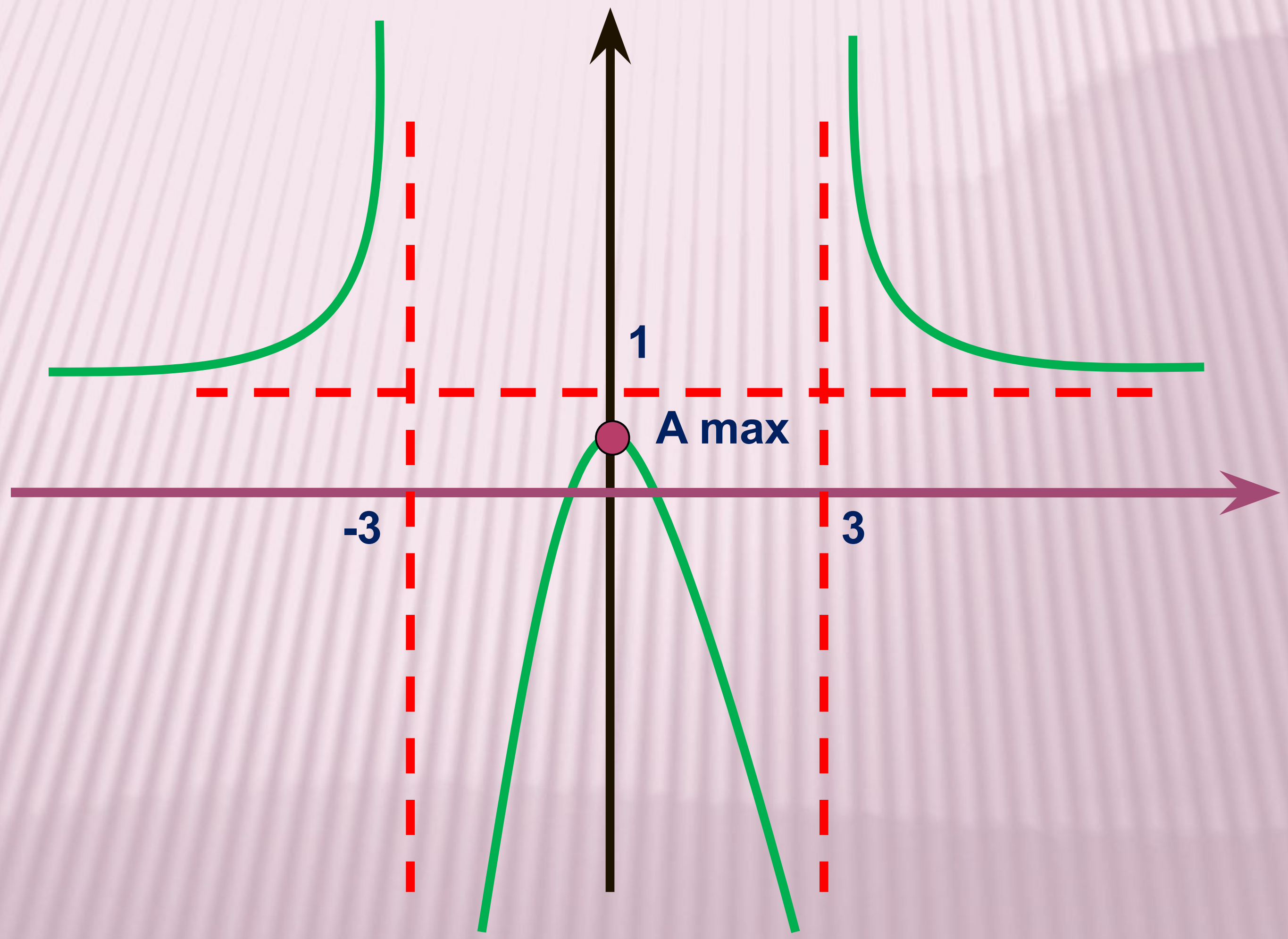
$+ \qquad - \qquad +$

x

$-3 \qquad +3$

Точек перегиба нет.

7. ГРАФИК ФУНКЦИИ.



ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Исследовать и построить график функции

$$y = \frac{x^2+3x-4}{\sqrt{x}}$$

По алгоритму