
*«Применение производной к
исследованию графиков функций.
Асимптоты графика функций»*

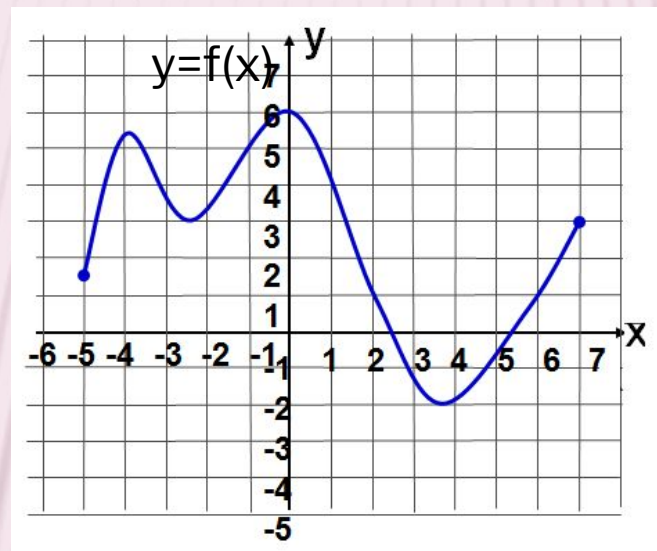


Возрастание
функции

Убывание
функции

Нули
функции

Точки
перегиба



Точки
максимума

Точки
минимума

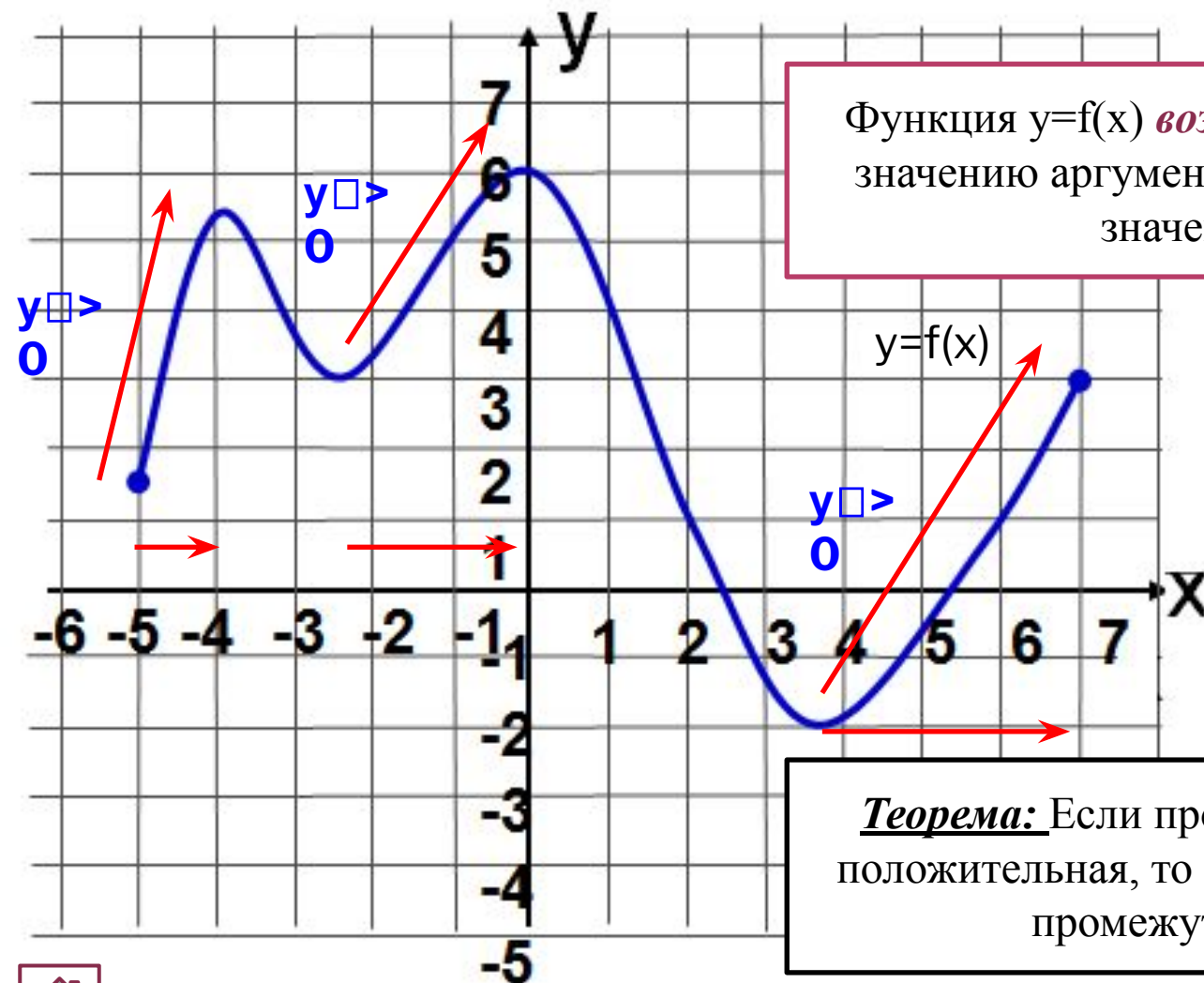
Вогнутость
функции

Выпуклость
функции

1. Возрастание функции

Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей** на промежутке, если при возрастании аргумента, значение функции увеличивается

Функция $y=f(x)$ **возрастает**, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции

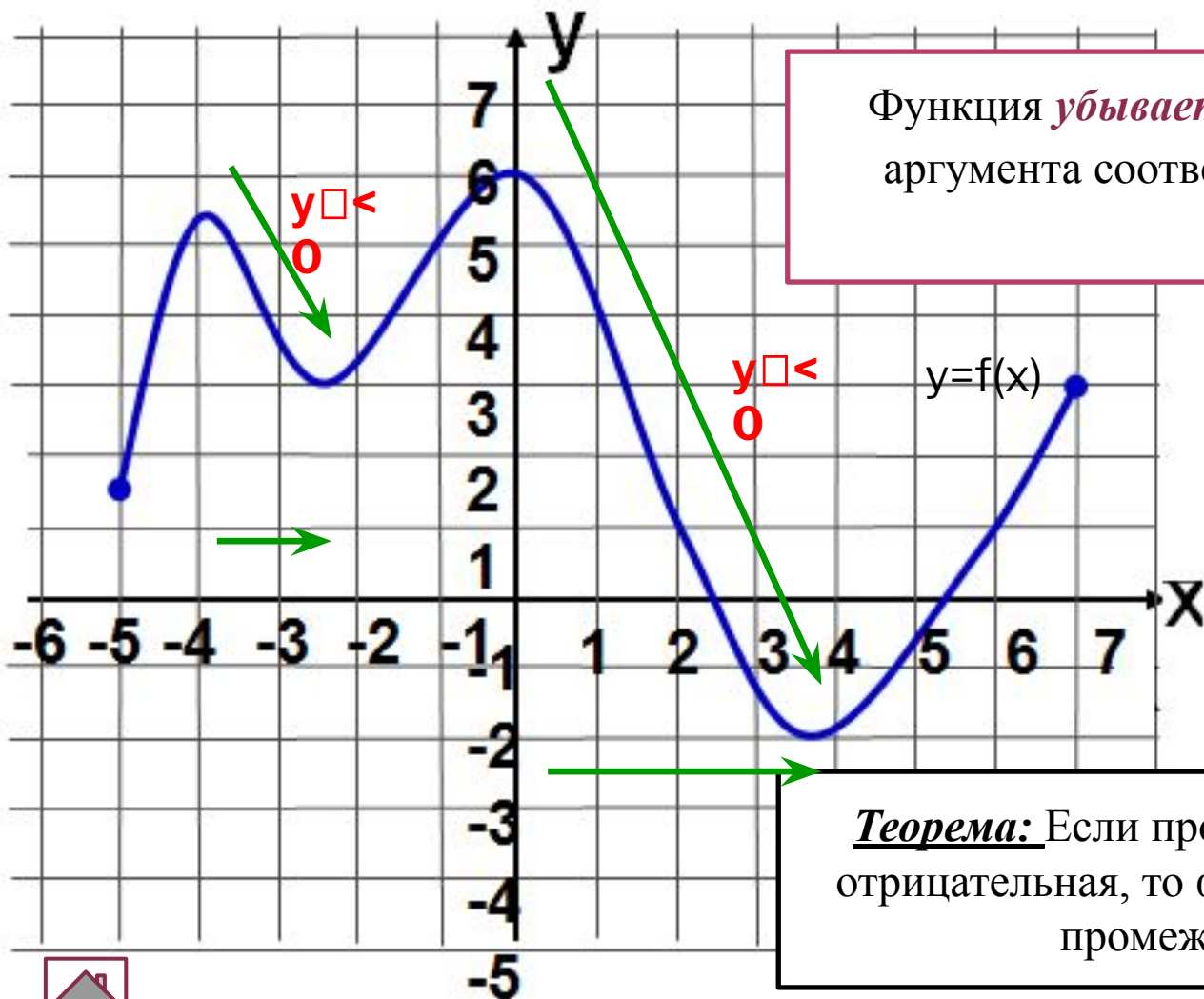


Теорема: Если производная на промежутке положительная, то функция $y=f(x)$ на данном промежутке **возрастает**.



2. Убывание функции

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на промежутке, если при возрастании аргумента, значение функции уменьшается.



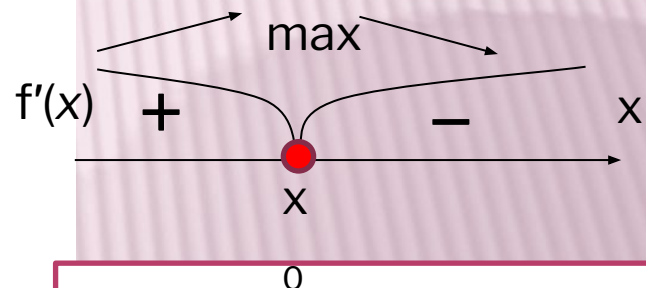
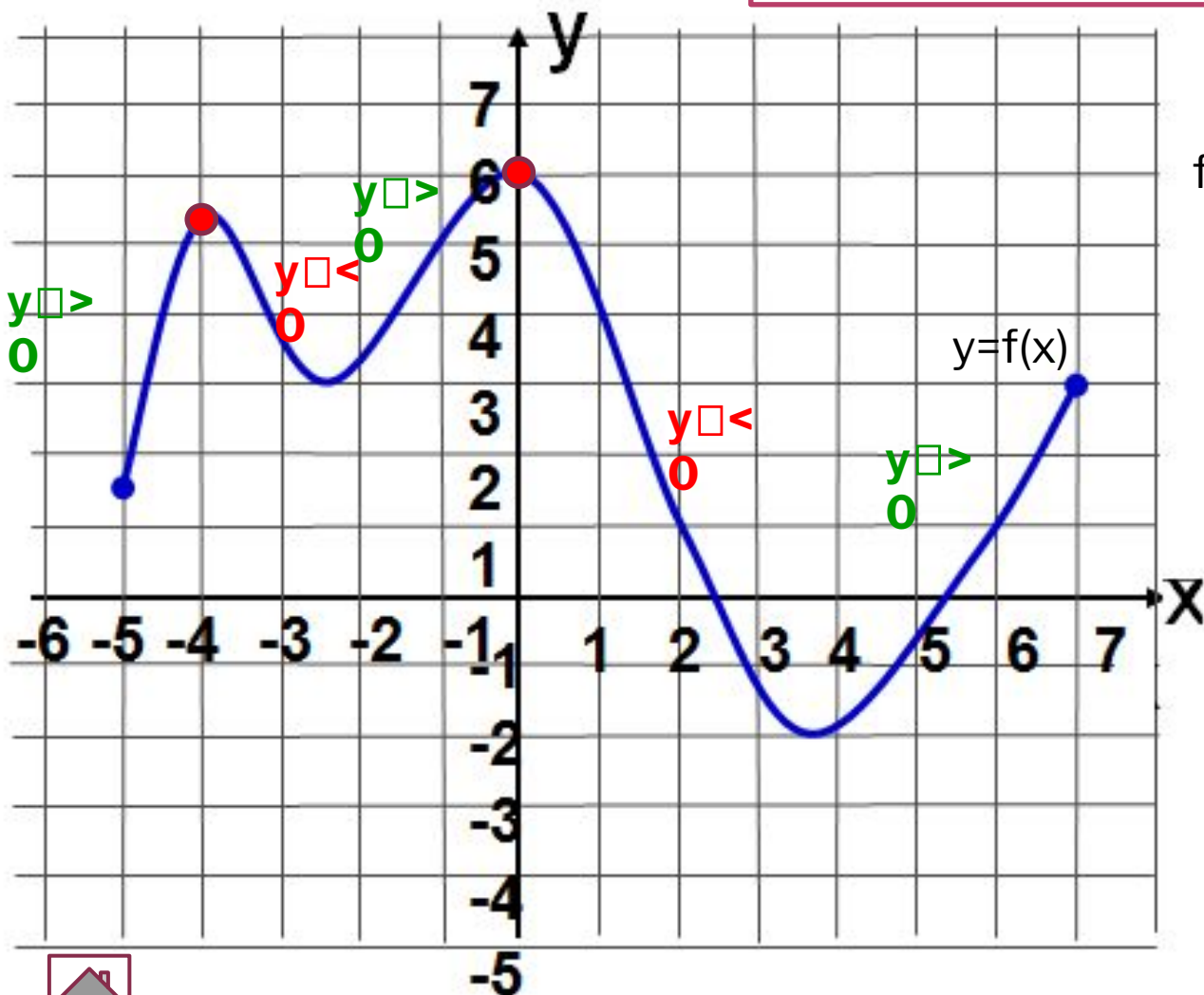
Функция *убывает*, если большому значению аргумента соответствует меньшее значение функции

Теорема: Если производная на промежутке отрицательная, то функция $y=f(x)$ на данном промежутке *убывает*.

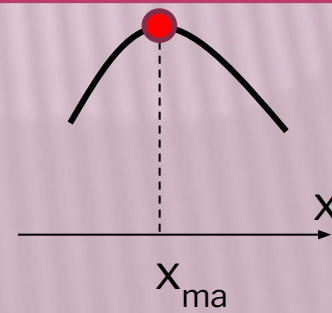


3. Точки максимума

Точка $x = a$ называется *точкой максимума* функции $y=f(x)$ если производная в данной точке равна 0, и при переходе через эту точку слева направо знак производной меняется с (+) на (-)

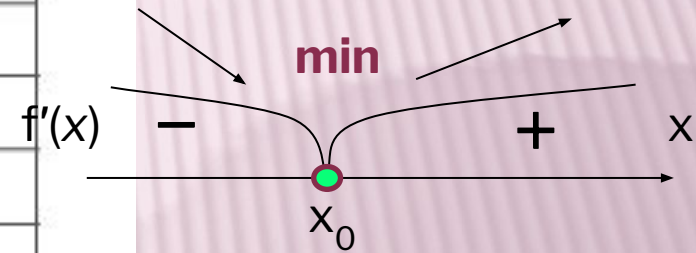
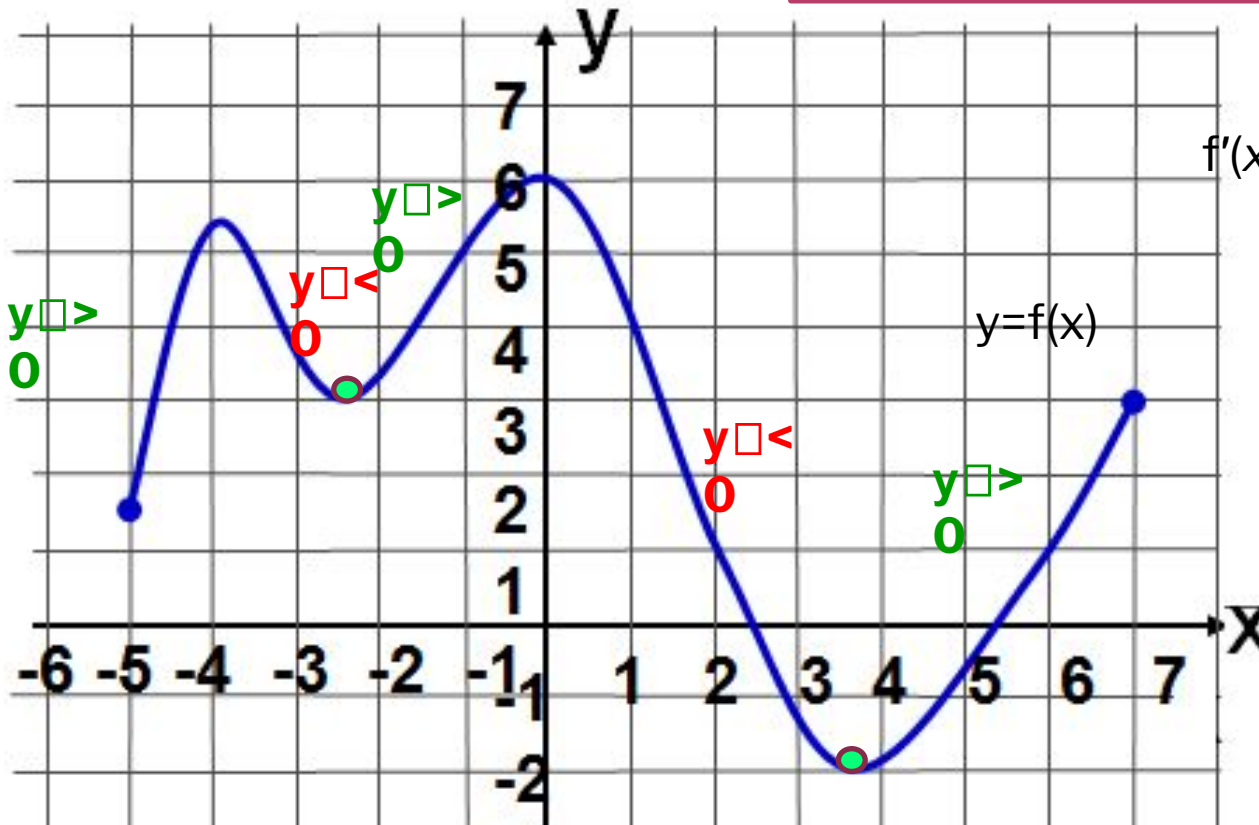


Распознать точку максимума по графику функции очень просто. График функции в окрестности точки максимума выглядят как гладкий “холм”

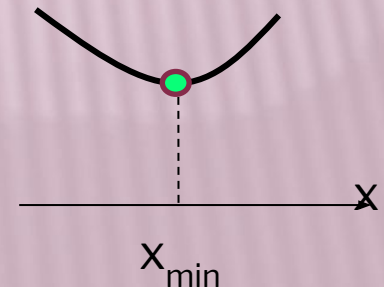


4. Точки минимума

Точка $x = a$ называется **точкой минимума** функции $y=f(x)$ если производная в данной точке равна 0, и при переходе через эту точку слева направо знак производной меняется с (-) на (+)



Распознать точку минимума по графику функции очень просто. График функции в окрестности точки минимума выглядят как гладкая “впадина”

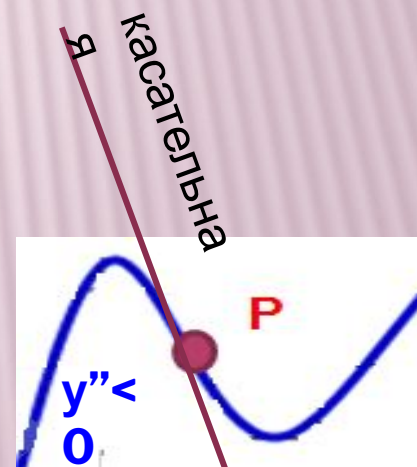
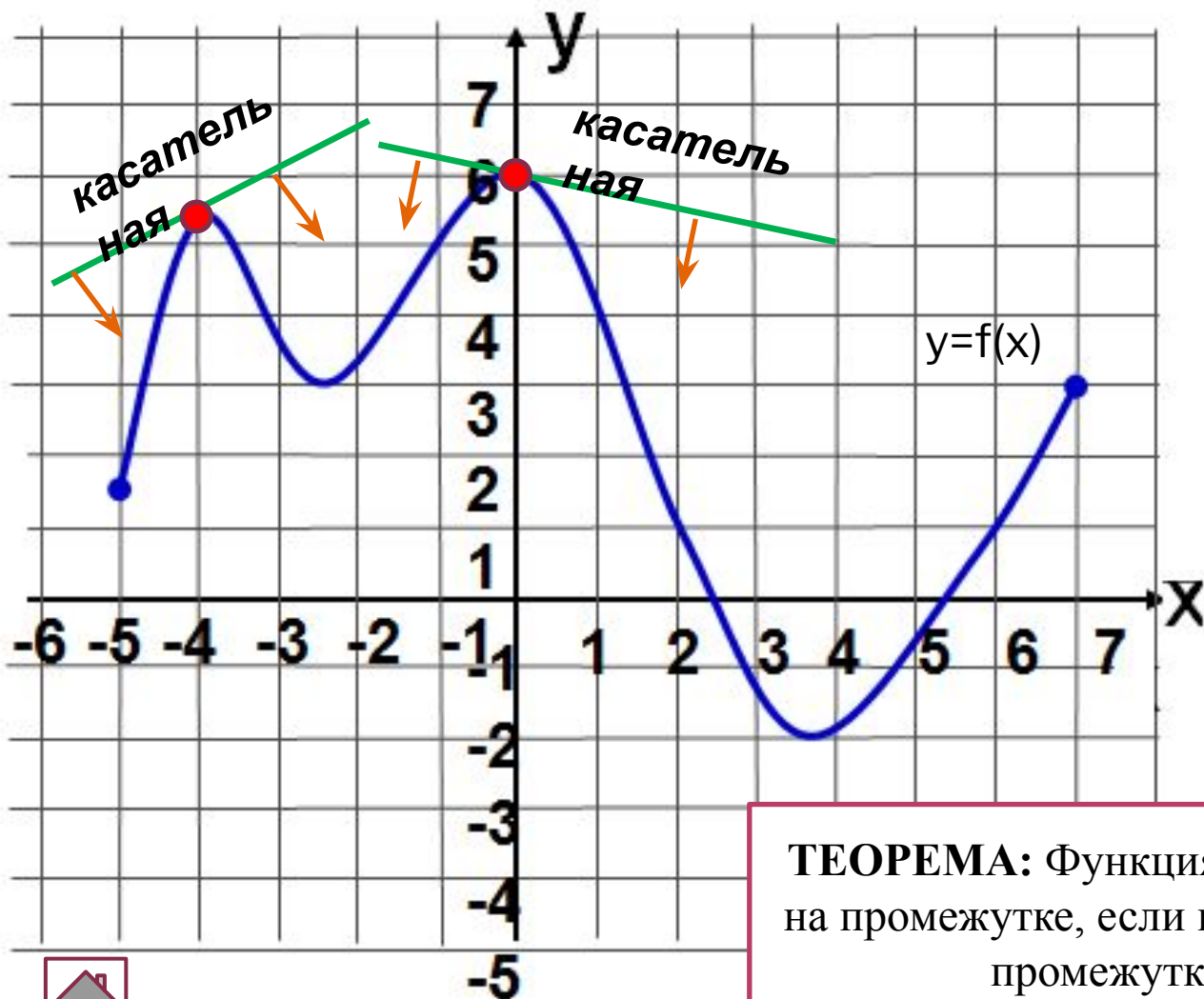


Точки **минимума** и точки **максимума** называются **точками экстремума**.



5. Выпуклость функции

Функция $y=f(x)$ называется *выпуклой* на промежутке, если все точки графика функции расположены ниже касательной.

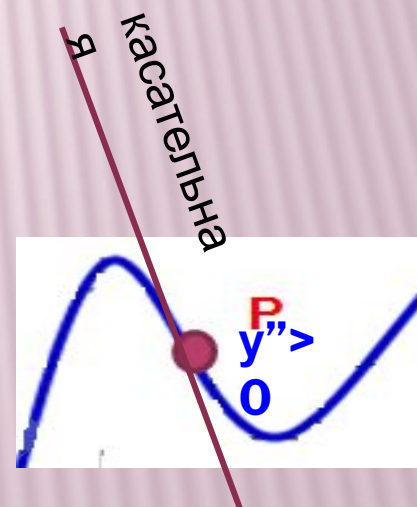
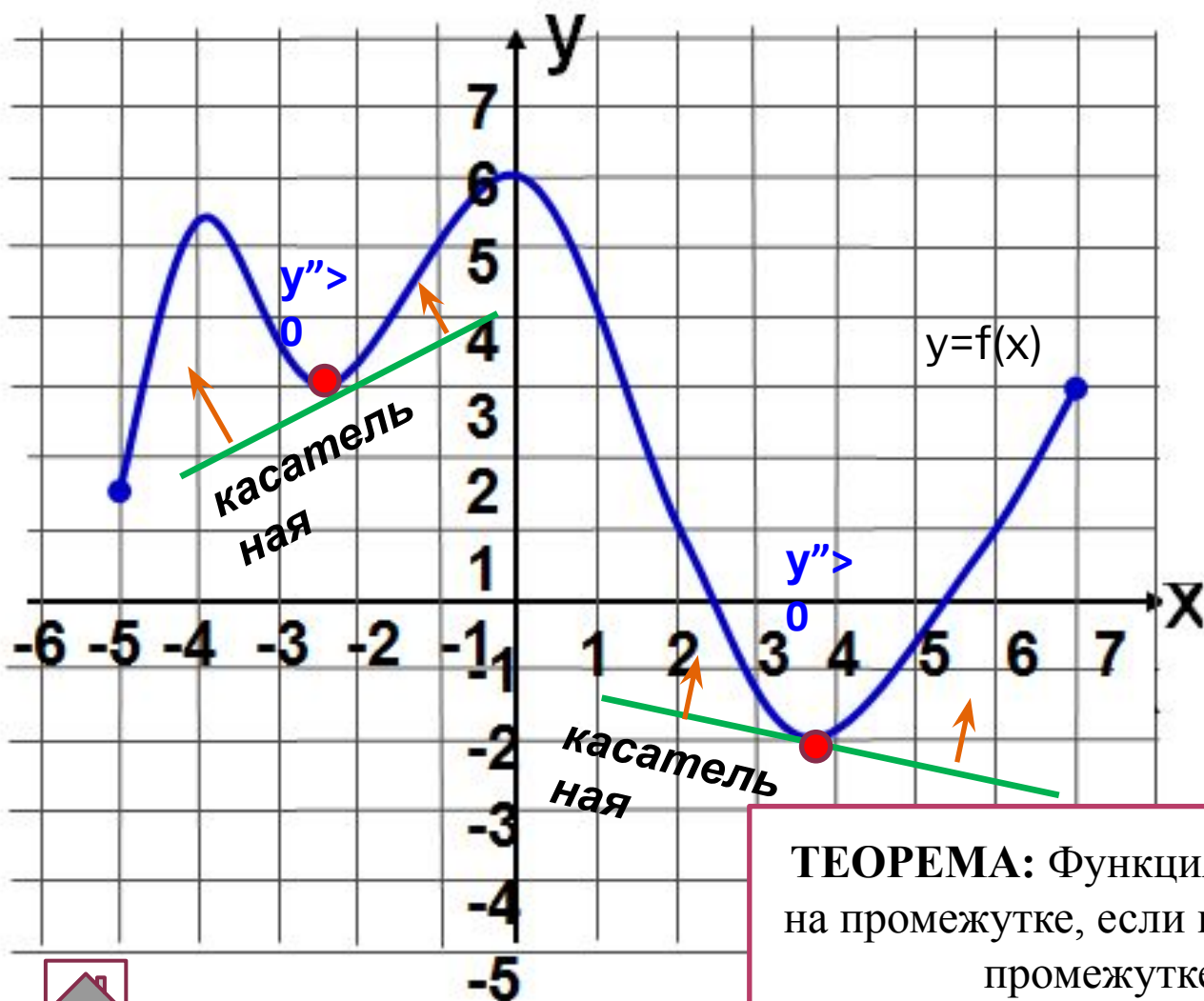


ТЕОРЕМА: Функция $y=f(x)$ является *выпуклой* на промежутке, если вторая производная на этом промежутке отрицательная.



6. Вогнутость функции

Функция $y=f(x)$ называется *вогнутой* на промежутке, если все точки графика функции расположены выше касательной.

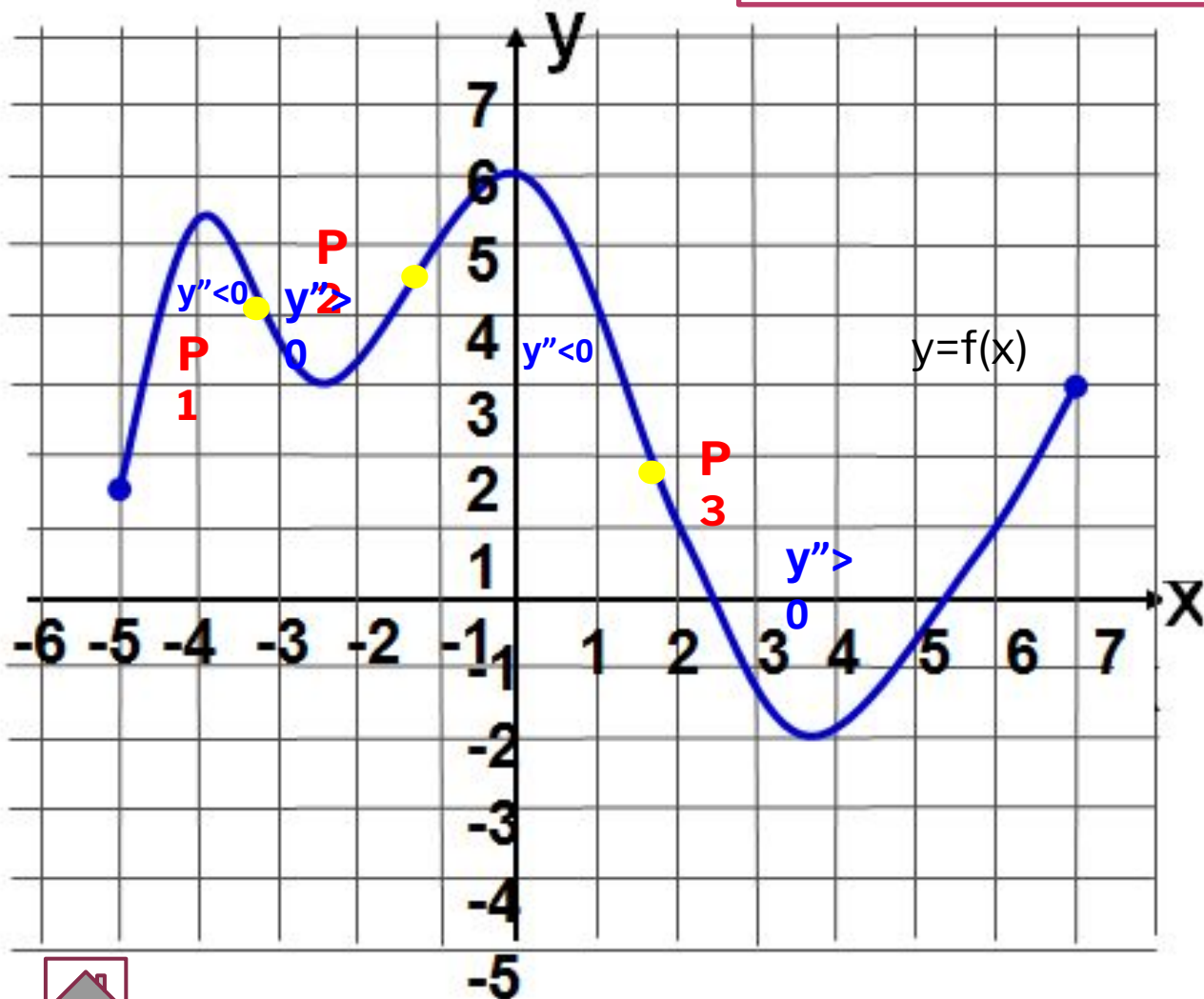


ТЕОРЕМА: Функция $y=f(x)$ является *вогнутой* на промежутке, если вторая производная на этом промежутке положительная.

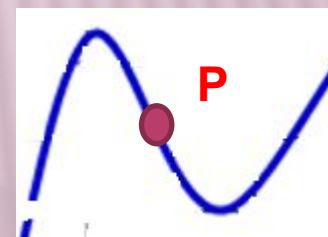


7. Точки перегиба

Точка P называется *точкой перегиба* функции $y=f(x)$ если при переходе через эту точку слева направо знак второй производной меняется.



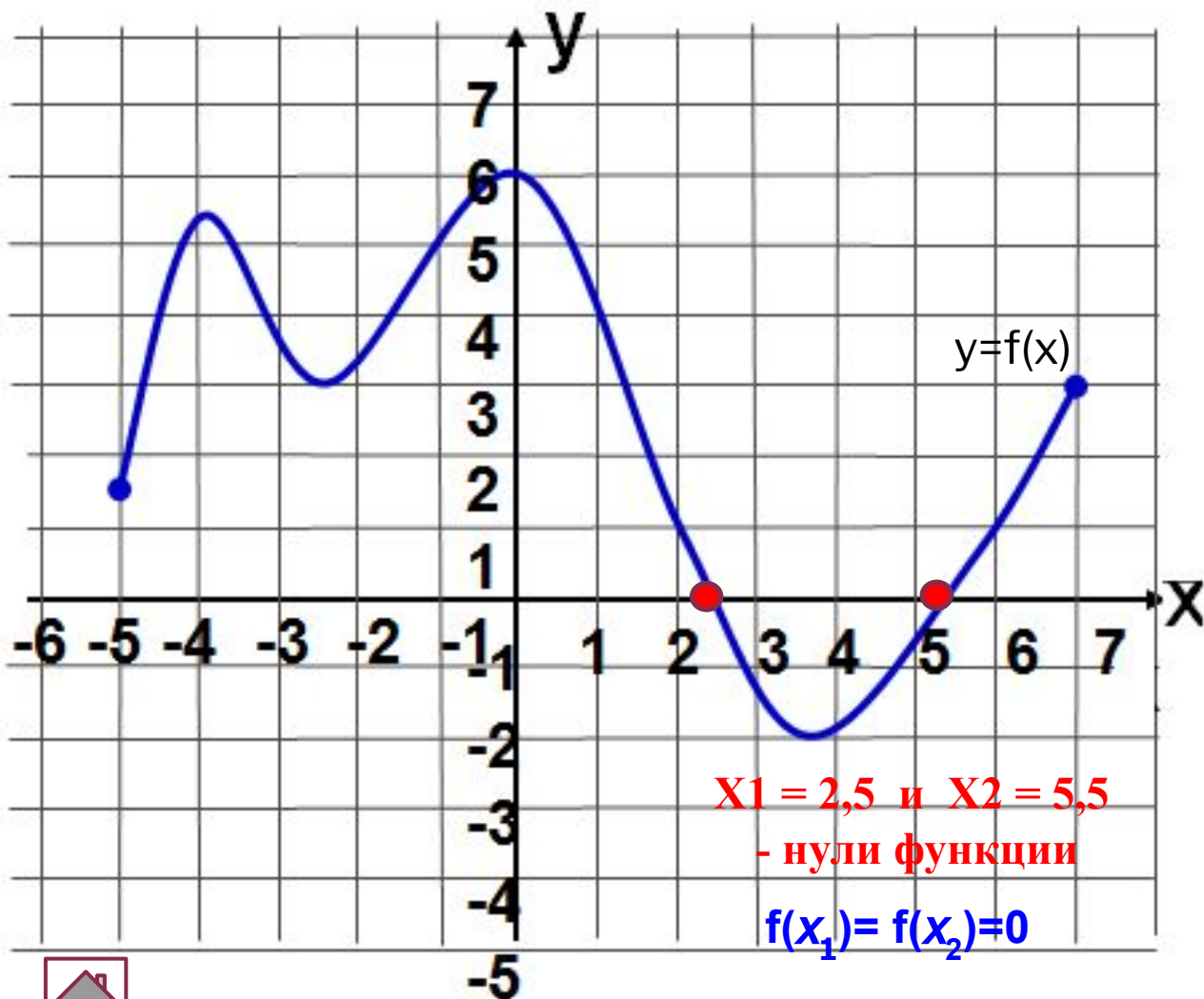
Распознать точку перегиба по графику функции очень просто. График функции в окрестности точки перегиба выглядит границей между “холмом” и “впадиной”



8. Нули функции

Точки, в которых график функции пересекает ось Ox называются **нулями функции**.

Ординаты этих точек равны 0. $f(x_1) = f(x_2) = 0$



критические точки

производная равна нулю
(стационарные точки)

производная не существует

точка
максимума
«+» на «-»

точка
минимума
«-» на «+»

точка
перегиба
знак
не меняется

точка
максимума
«+» на «-»

точка
минимума
«-» на «+»

точка
излома
знак
не меняется

плавные линии

угловатые линии

Пример №1. Найти промежутки монотонности функции $y=2x^3-3x^2-36x+5$

1. Область определения: \mathbb{R} . Функция непрерывна.

2. Вычисляем производную: $y'=6x^2-6x-36$.

3. Находим критические точки: $y'=0$.

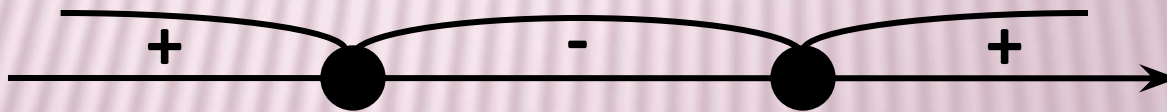
$$x^2-x-6=0$$

$$D=1-4*(-6)*1=1+24=25$$

$$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$$

$$x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$$

4. Делим область определения на интервалы:



5. Функция **возрастает** при $x \in (-\infty; -2] \cup [3; +\infty)$,
функция **убывает** при $x \in [-2; 3]$.

Пример №3. Найти экстремумы функции

$$y = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 4$$

1. Область определения: \mathbb{R} (x-любое) Функция непрерывна.

2. Вычисляем производную: $y' = -6x^2 - 6x + 12$.

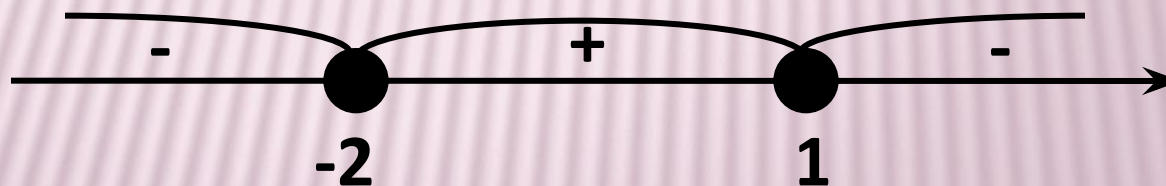
3. Находим критические точки: $y' = 0$.

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot (-1) \cdot 2 = 1 + 8 = 9$$

$$x_1 = 1; x_2 = -2$$

4. Делим область определения на интервалы:



5. $x = -2$ – точка минимума. Найдём минимум функции $y_{\min} = -24$. $x = 1$ – точка максимума. Найдём максимум функции: $y_{\max} = 3$.

ПРИМЕР №4. НАЙТИ ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ $F(x) = x^4 - 4x^3$

1. ООФ x -любое

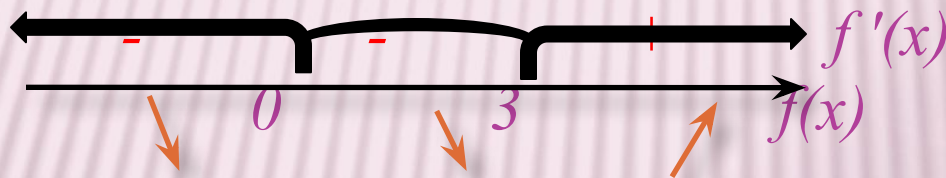
2. $f'(x) = (x^4 - 4x^3)' = 4x^3 - 4 \cdot 3x^2 = 4x^3 - 12x^2$

3. $f'(x) = 0$ $4x^3 - 12x^2 = 0$

$$4x^2(x-3) = 0$$

$x=0$ $x=3$ – стационарные точки

4.



5. $x=3$ – точка \min (
 $x=0$ – точка перегиба (т.к. производная в этой точке свой знак не меняет)

- Пример №7. Найти экстремумы функции $y=x^3+3x^2+9x-6$.
-

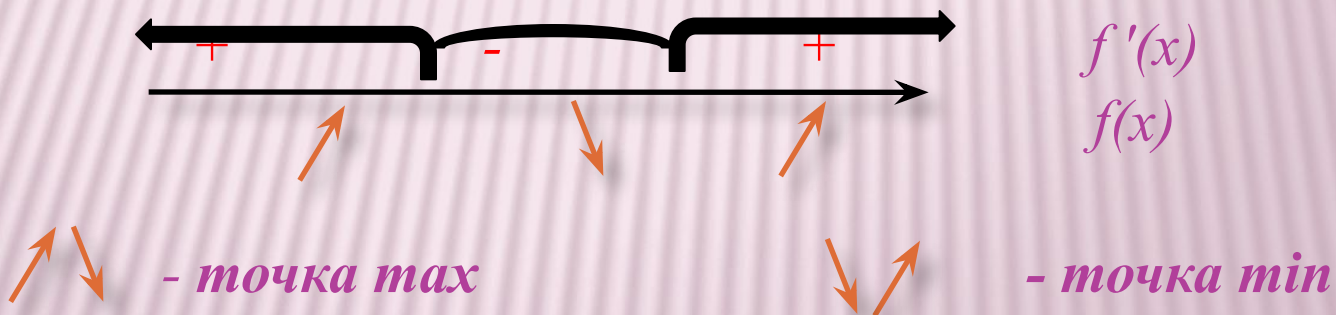
Решение:

1. Находим область определения функции: $D(y)=R$.
2. Находим производную: $y'=(x^3+3x^2+9x-6)'=3x^2+6x+9$.
3. Приравняем её к нулю: $3x^2+6x+9=0$, откуда $D<0$. То есть критических точек не существует.
4. Однако, функция возрастает на всей $D(y)$, так как $y'=3x^2+6x+9 > 0$:

АЛГОРИТМ НАХОЖДЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ ФУНКЦИИ

Пусть дана функция $f(x)$

1. Найти ООФ
2. Найти производную $f'(x)$
3. Найти корни уравнения (стационарные точки) $f'(x)=0$
4. Найти на числовой прямой промежутки возрастания и убывания функции и точки экстремумов.



Если производная знаки не меняет, значит эта точка перегиба

5. Записать ответ

СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ

Алгоритм

исследования функции с помощью производной:

Пусть дана функция $f(x)$

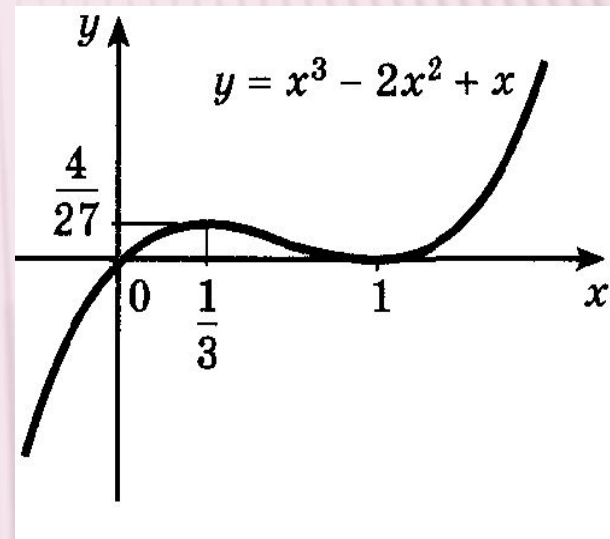
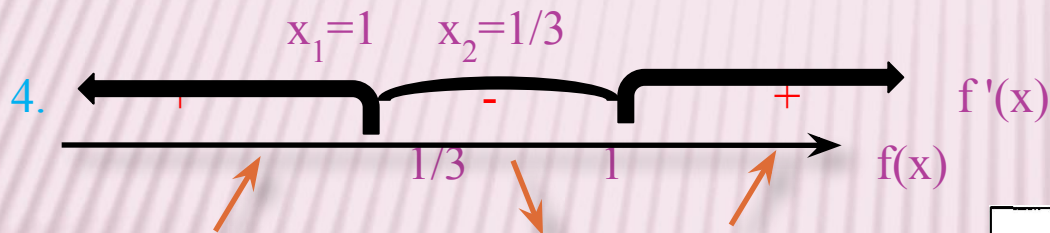
1. Область определения функции.
2. Четность.
3. Периодичность.
4. Точки пересечения графика с осями координат (нули функции)
С осью Ox $y=0$, т.е. $f(x)=0$ С осью Oy $x=0$, т.е. $y(0)$.
5. Найти производную $f'(x)$
6. Найти корни уравнения (стационарные точки) $f'(x)=0$
7. Найти на числовой прямой точки экстремума (точка \max ; точка \min)
Если производная знаки не меняет, значит эта точка перегиба
8. Значение функции в этих точках, т. е. y_{\max} и y_{\min} (подставлять в $f(x)$)
9. Направление выпуклости графика функции.
10. Построение графика и нахождение дополнительных координат (если это требуется)

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ПОСТРОЕНИЮ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Задача.

Построить график функции $y=x^3-2x^2+x$

1. ООФ: x – любое
2. $f'(x)=(x^3-2x^2+x)' = 3x^2-2\cdot 2x+1 = 3x^2-4x+1$
3. $f'(x)=0 \quad 3x^2-4x+1=0$



$x=1/3$ – т. max (↗) $x=1$ – т. min (↘ ↗)

5. $y_{\max}=(1/3)^3-2\cdot(1/3)^2+1/3=4/27$

$y_{\min}=1^3-2\cdot 1^2+1=0$

| | | | | | |
|---------|-------------------|----------------|-----------------------|---|---------|
| x | $x < \frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3} < x < 1$ | 1 | $x > 1$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + |
| $f(x)$ | ↗ | $\frac{4}{27}$ | ↘ | 0 | ↗ |

6. Находим точки пересечения графика с осями координат:

С осью Ox $y=0 \Rightarrow x^3-2x^2+x=0$ С осью Oy $x=0 \Rightarrow y(0)=0^3-2\cdot 0^2+0=0$
 $x(x^2-2x+1)=0; \quad x=0 \quad x=1$

7. Построение графика и нахождение дополнительных координат (если это требуется)

АСИМПТОТЫ

АСИМПТОТА (ОТ ГРЕЧ. ΑΣΥΜΠΤΩΤΟΣ — НЕСОВПАДАЮЩИЙ, НЕ КАСАЮЩИЙСЯ) КРИВОЙ С БЕСКОНЕЧНОЙ ВЕТВЬЮ — **ПРЯМАЯ** ОБЛАДАЮЩАЯ ТЕМ СВОЙСТВОМ, ЧТО РАССТОЯНИЕ ОТ ТОЧКИ КРИВОЙ ДО ЭТОЙ ПРЯМОЙ СТРЕМИТСЯ К НУЛЮ ПРИ УДАЛЕНИИ ТОЧКИ ВДОЛЬ ВЕТВИ В БЕСКОНЕЧНОСТЬ.

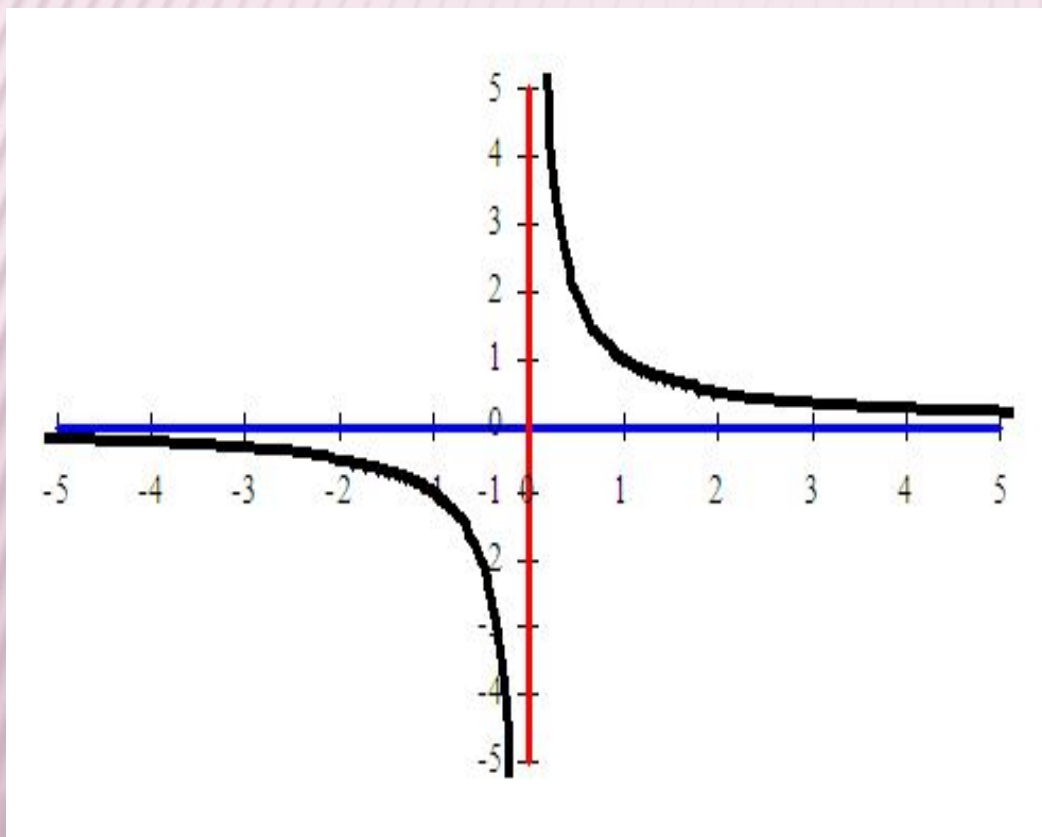


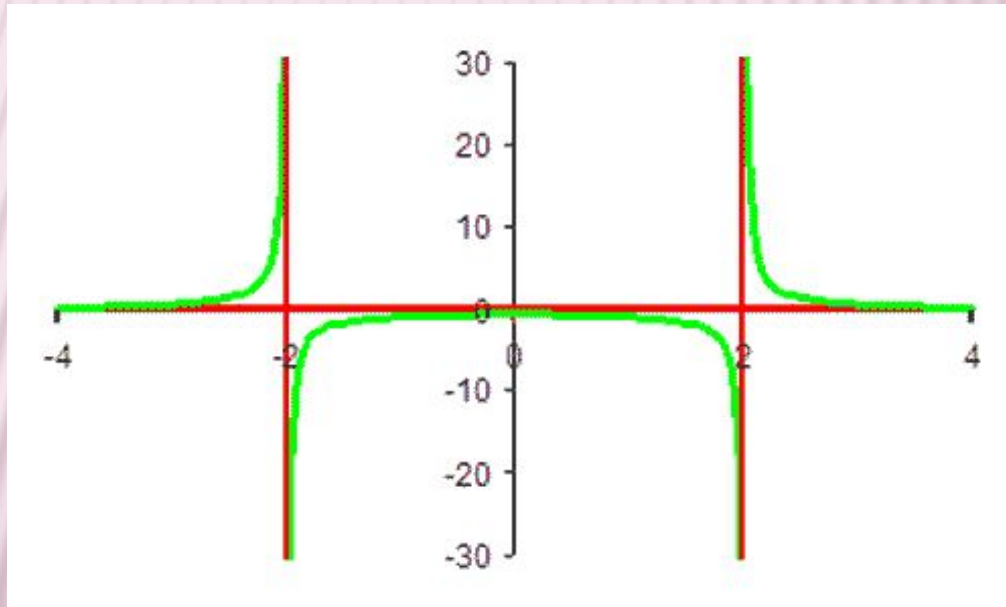
Рис. 1. Для гиперболы $Y=1/X$ асимптотами являются оси абсцисс и ординат. Кривая может приближаться к своей асимптоте, оставаясь с одной стороны от нее

АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

ВЕРТИКАЛЬНАЯ АСИМПТОТА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРЯМАЯ $x = a$ НАЗЫВАЕТСЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ АСИМПТОТОЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$, ЕСЛИ ХОТЯ БЫ ОДНО ИЗ ПРЕДЕЛЬНЫХ

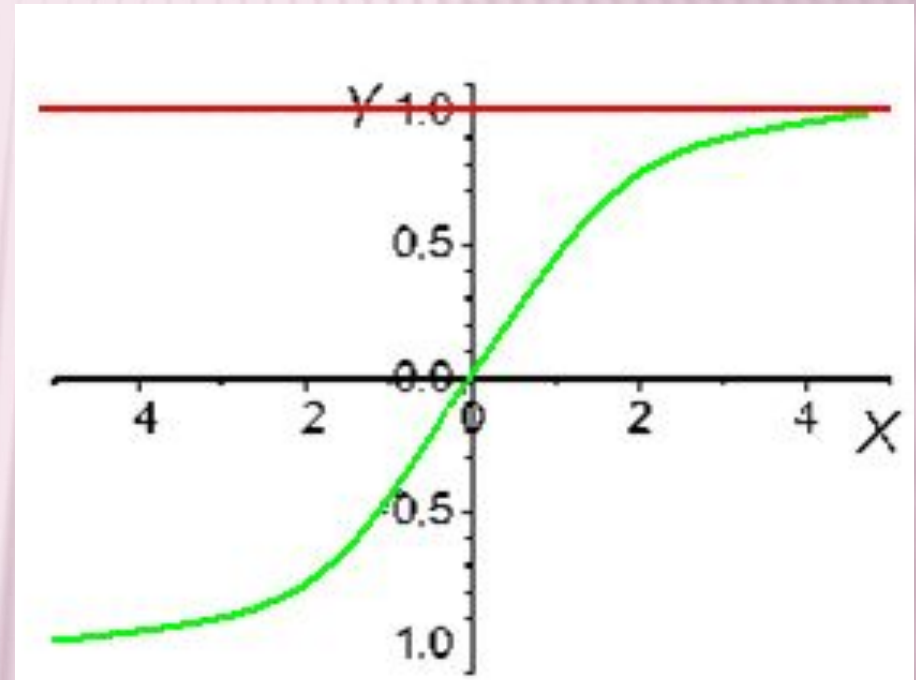
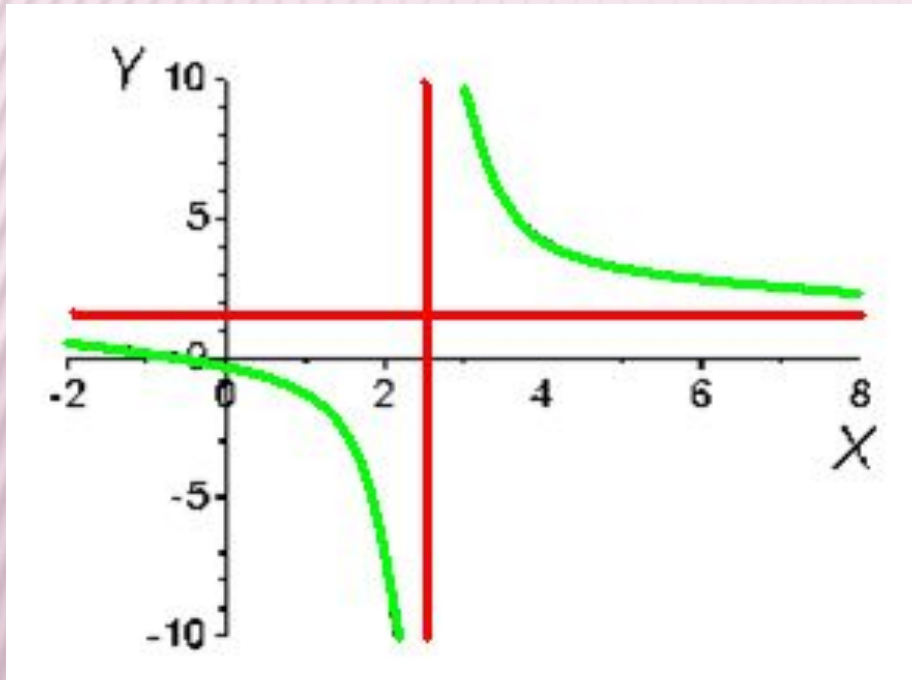
ЗНАЧЕНИЙ $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ИЛИ $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ РАВНО $\pm \infty$



Наличие вертикальной асимптоты характеризует поведение функции в окрестности данной конечной точки (не на бесконечности).

ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ АСИМПТОТА

Определение. Прямая $y = b$ называется горизонтальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$



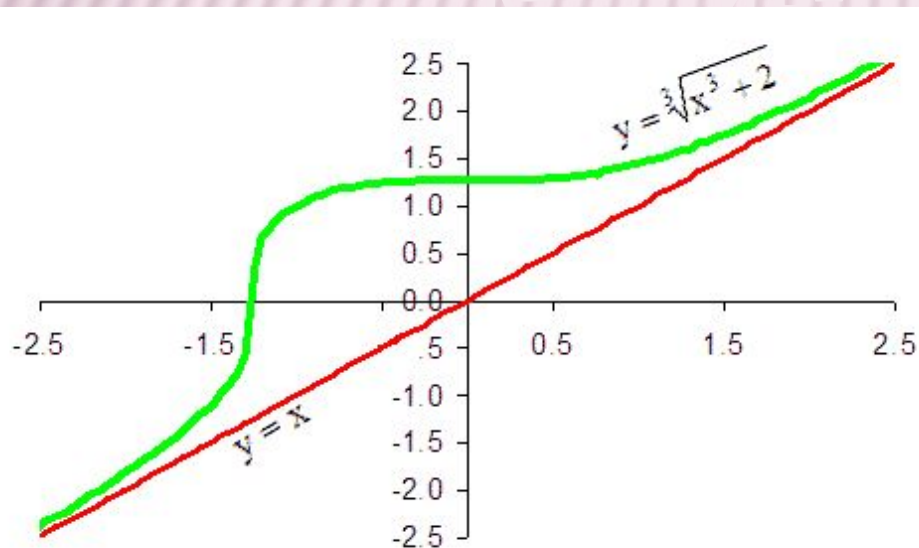
НАКЛОННАЯ АСИМПТОТА

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ПРЯМАЯ $Y = KX + B$ НАЗЫВАЕТСЯ НАКЛОННОЙ АСИМПТОТОЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $Y = F(X)$,

ЕСЛИ $[F(X) - (KX + B)] = 0$

ФОРМАЛЬНО, ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ АСИМПТОТУ МОЖНО РАССМАТРИВАТЬ КАК ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ НАКЛОННОЙ, ЕСЛИ $K=0$.

ТЕОРЕМА. ДЛЯ ТОГО, ЧТОБЫ ПРЯМАЯ $Y = KX + B$ БЫЛА НАКЛОННОЙ АСИМПТОТОЙ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $Y = F(X)$, НЕОБХОДИМО И ДОСТАТОЧНО, ЧТОБЫ СУЩЕСТВОВАЛИ ДВА ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯ:



$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx)$$

РАССМОТРИМ ПОЛНУЮ СХЕМУ
ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И
ПОСТРОЕНИЯ ЕЕ ГРАФИКА ПО
ПОЛУЧЕННЫМ РЕЗУЛЬТАТАМ
ИССЛЕДОВАНИЯ.

$$y = \frac{x^2 - x + 6}{x - 6}$$

Решение :

1. $x \in (-\infty; 6) \cup (6; +\infty)$

2. $f(-x) = \frac{x^2 + x + 6}{-x - 6} \Rightarrow$ функция ни четная, ни нечетная \Rightarrow
симметрии графика нет.

3. $x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0; -1)$

$y = 0 \Rightarrow x^2 - x + 6 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 6} \Rightarrow$ в поле действительных чисел решения нет \Rightarrow точек пересечения с осью OX нет.

4. Вертикальная асимптота : $x = 6$

Наклонная асимптота : $y = kx + b \Rightarrow$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x + 6}{x^2 - 6x} = 1$$

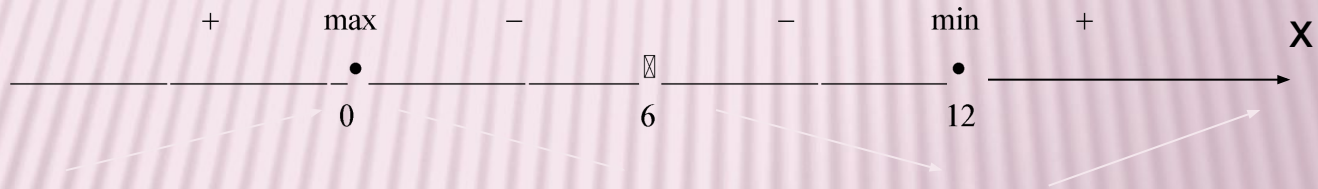
$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2 - x + 6}{x - 6} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - x + 6 - x^2 + 6x}{x - 6} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5x + 6}{x - 6} = 5 \Rightarrow y = x + 5$$

$$5. \quad y' = \frac{(2x-1)(x-6) - (x^2 - x + 6)}{(x-6)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 13x + 6 - x^2 + x - 6}{(x-6)^2} = \frac{x^2 - 12x}{(x-6)^2}$$

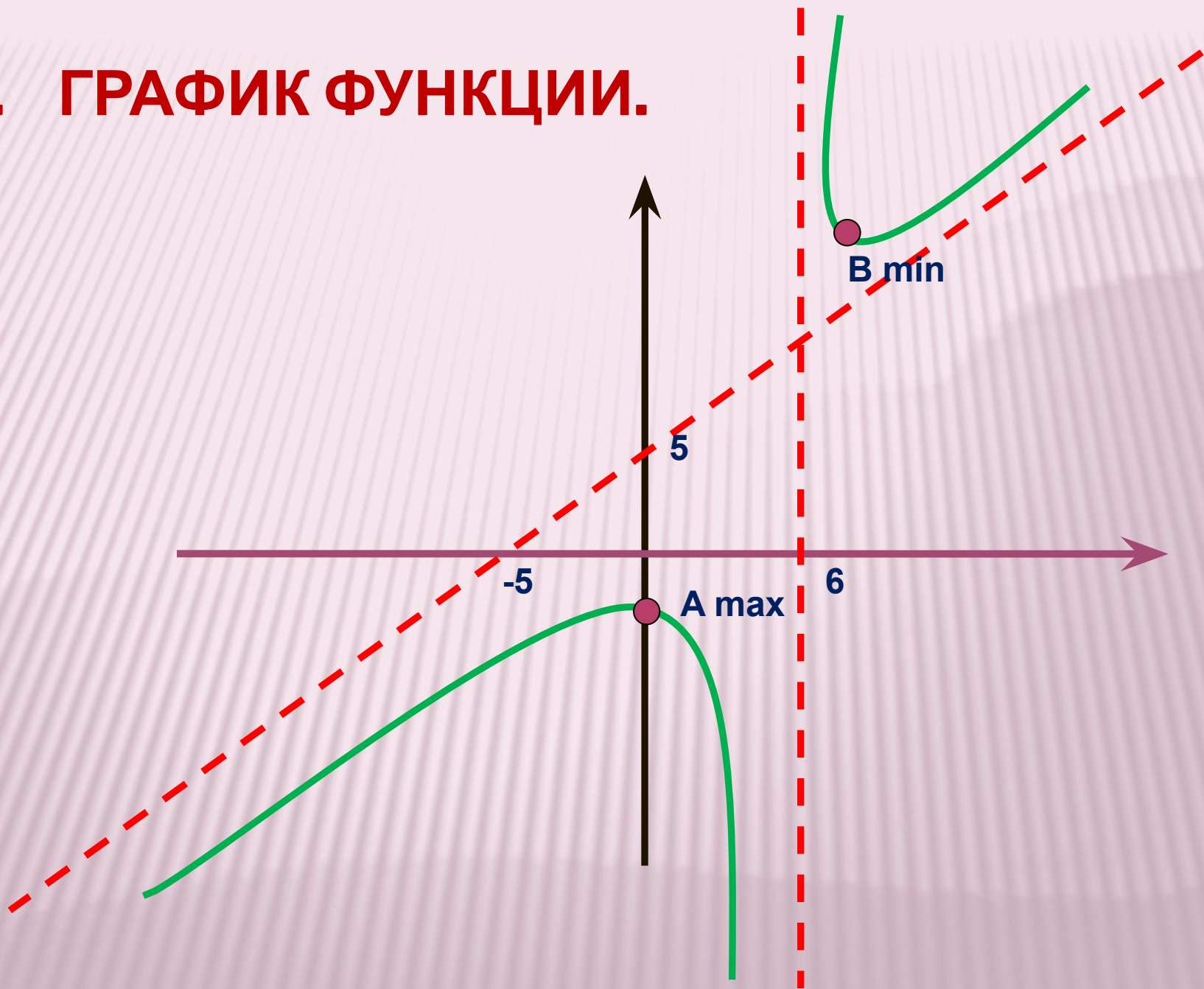
$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x(x-12) = 0 \\ x-6 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 12 \\ x \neq 6 \end{cases}$$



$$f_{\max}(0) = -1 \Rightarrow A(0; -1)$$

$$f_{\min}(12) = \frac{144 - 12 + 6}{12 - 6} = \frac{138}{6} = 23 \Rightarrow B(12; 23)$$

7. ГРАФИК ФУНКЦИИ.



$$y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 9}$$

РЕШЕНИЕ :

1. $x \in (-\infty; -3) \cup (-3; 3) \cup (3; +\infty)$

2. $f(-x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 9} \Rightarrow f(-x) = f(x) \Rightarrow$ функция четная,

график симметричен оси OY

3. $x = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{9} \Rightarrow A(0; -\frac{2}{9})$

$y \neq 0 \Rightarrow$ точек пересечения с осью OY нет.

4. Вертикальные асимптоты

(существуют в точках разрыва)

$$x = -3 \quad \text{и} \quad x = 3$$

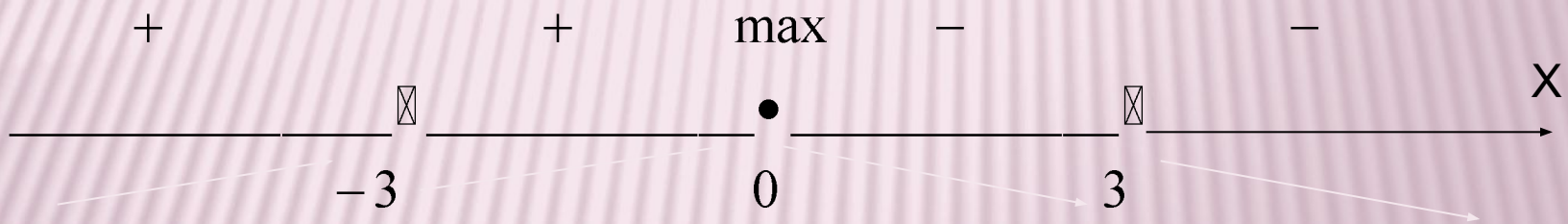
Наклонная асимптота: $y = kx + b \Rightarrow$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^3 - 9x} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 9} \right) = 1 \Rightarrow y = 1$$

$$5. \quad y' = \frac{2x(x^2 - 9) - 2x(x^2 + 2)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{2x(x^2 - 9 - x^2 - 2)}{(x^2 - 9)^2} = \frac{-22x}{(x^2 - 9)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \neq \pm 3 \end{cases}$$

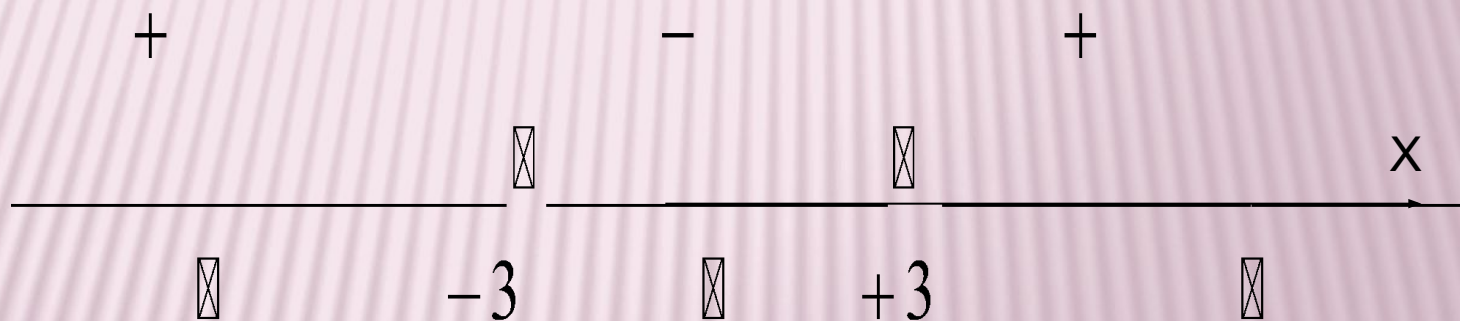


$$f_{\max}(0) = -\frac{2}{9} \Rightarrow A \left(0; -\frac{2}{9}\right)$$

$$6. \quad y''' = \frac{-22(x^2 - 9)^2 - 2(x^2 - 9)2x(-22x)}{(x^2 - 9)^4} =$$

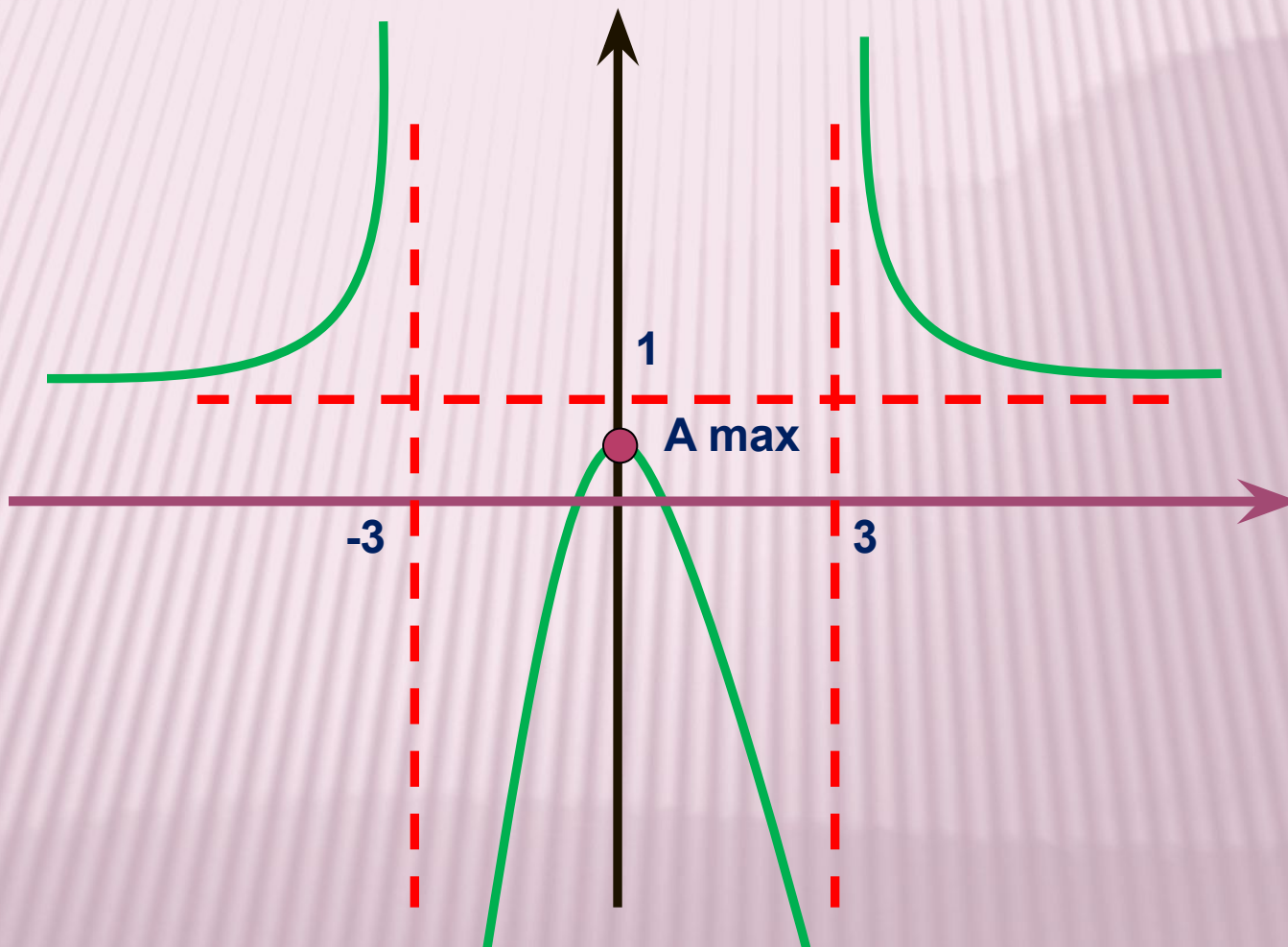
$$= \frac{-22(x^2 - 9)(x^2 - 9 - 4x^2)}{(x^2 - 9)^4} = \frac{22(3x^2 + 9)}{(x^2 - 9)^3}$$

$$y''' \neq 0$$



Точек перегиба нет.

7. ГРАФИК ФУНКЦИИ.



ЗАДАНИЕ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО ВЫПОЛНЕНИЯ

Исследовать и построить график
функции

$$y = \frac{x^2 + 3x - 4}{\sqrt{x}}$$

По
алгоритму