

Элементы нелинейного функционального анализа

Глава 1. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

§ 11. Теорема об обратном отображе-
нии.

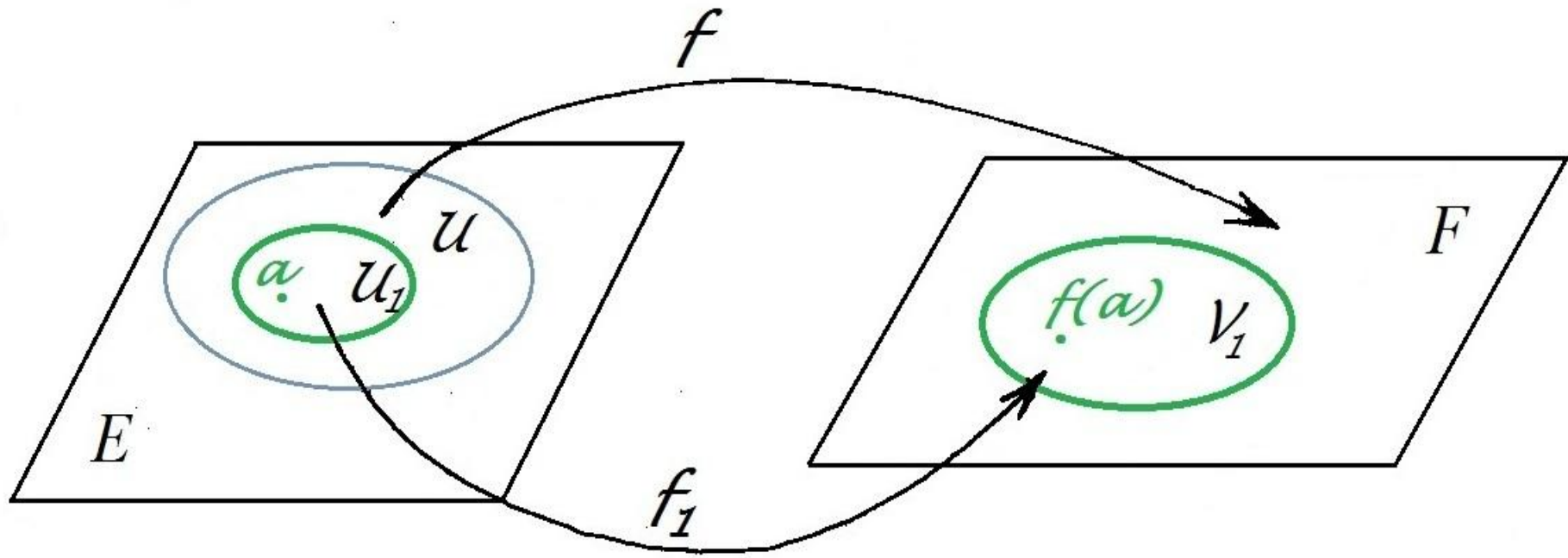
Опр. ЛОО $A: E \rightarrow F$ называется изоморфиз-
мом, если A отображает E на F
взаимно-однозначно и обратный
оператор A^{-1} также ограничен.

Теорема. Пусть E и F — банаховы
нр-ва, U — открытое множ-во в E ,
отображение $f: U \rightarrow F$ — гладкое
класса C^z ($z \geq 1$) и в некоторой
точке $x_0 \in U$ лво $f'(x_0)$ явл-ся изомор-
физмом E на F . Тогда \exists открытое
множ-во $U_1 \ni x_0$ ($U_1 \subset U$) и открытое
множ-во $V_1 \subset F$, такие, что отображ-е

$$f_1 = f|_{U_1}: U_1 \rightarrow V_1 \text{ является}$$

C^z -диффеоморфизмом.

При этом $(f^{-1})'(y_0) = [f'(x_0)]^{-1}$ обрат.
оператор ($y_0 = f(x_0)$).



Задачи

№10.1. Пусть U — открытое мн-во в ЛНП E , V — открытое мн-во в ЛНП F ,

$f: U \rightarrow V$ — C^r -диффеоморфизм ($r \geq 1$).

Доказать, что $(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}$

где $\forall y \in V, x = f^{-1}(y)$.

N 10.2. Зная производную функции $f(x)$, найти производную обратной функции $f^{-1}(y)$.

- 1) $y = \operatorname{tg} x$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = e^x$;
4) $y = \operatorname{ch} x$; 5) $y = \operatorname{sh} x$.

$$1) y = \operatorname{tg} x = f(x); \quad f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y = x; \\ y \in \mathbb{R}^1.$$

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \underline{(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}}$$

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'}, = \cos^2 x = \cos^2(\operatorname{arctg} y);$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{y^2 + 1};$$

$$(f^{-1})'(y) = (\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{y^2 + 1}.$$

N 10.3. Для отображения $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
найти матрицу оператора $(f^{-1})'(y^0)$:

$$1) f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}, \quad y^0 = (1, 1);$$

$$2) f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}, \quad y^0 = (2, 1).$$

Решение. 1) $\frac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ — м-ца
кр-й $f'(x)$.

$\begin{cases} x_1^2 = 1, \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^1 = (1, 1), x^2 = (-1, -1)$. — два
критических т. $y^0 = (1, 1)$.

$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — невырождена,

$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(-1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ — невырожд.

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \text{невырождена,}$$

$$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(-1, -1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} - \text{невырожд.}$$

След-но, операторы $f'(x^1)$ и $f'(x^2)$ —
изоморфизмы \mathbb{R}^2 на $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ по теореме
о локальном диффеом-ме (об обратном
отображении) f — локальный дифф-м

(кл. C^∞) в окрестности т. x^1 и x^2 ;

т.е. \exists окрестность O_1 точки x^1 и окрестность V_1 т. y^0 , такие, что существуют

$f_1 = f|_{O_1} : O_1 \rightarrow V_1$ — C^∞ -диффеоморфизм,

такие \exists окрестность O_2 т. x^2 и окрестность

V_2 т. y^0 , такие, что $f_2 = f|_{O_2} : O_2 \rightarrow V_2$ —

C^∞ -диффеоморфизм.

Тогда
$$\frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_1) \right]^{-1} = A_1^{-1}.$$

$$\text{Тогда } \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_1) \right]^{-1} = A_1^{-1}.$$

Найдем A_1^{-1} :

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right).$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0)$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y}(y^0)$$

Глава 2.

Гладкие многообразия

§ 1. Топологическое пространство и непрерывное отображение

1. Определение топологического пространства. Пусть X — множество произвольной природы и $\tau = \{U\}$ — совокупность его подмножеств, обладающая следующими свойствами:

- 1) $\emptyset, X \in \tau$;
- 2) объединение любой совокупности множеств из τ принадлежит τ ;
- 3) пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ .

Такая совокупность подмножеств τ называется *топологией* на X . Множество X с заданной на нем топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается (X, τ) , подмножества из совокупности τ называются *открытыми* (в пространстве (X, τ)).

Пример 1. X — числовая прямая \mathbb{R}^1 . Топологию на \mathbb{R}^1 можно задать следующим набором подмножеств: пустое множество \emptyset , всевозможные интервалы и их объединения $U = \bigcup_{\alpha} (a_{\alpha}, b_{\alpha})$ (проверьте!).

Пример 2. $X = \mathbb{R}^2$. Открытым множеством назовем всякое множество в $X = \mathbb{R}^2$, которое вместе с каждой своей точкой содержит достаточно малый открытый круг с центром в этой точке, а также пустое множество. Легко проверить, что система всех открытых множеств в $X = \mathbb{R}^2$ образует топологию.

Пример 3. X — произвольное множество. Совокупность $\tau_0 = \{\emptyset, X\}$ задает топологию на X (проверьте!).

Пример 4. X — произвольное множество, $\tau_1 = \{\text{всевозможные подмножества из } X\}$. Совокупность τ — топология на X (проверьте!).

Топология τ_1 называется *максимальной* или *дискретной*, а топология τ_0 — *минимальной* или *тривиальной*. Таким образом, на одном и том же множестве можно ввести различные топологии, например тривиальную и дискретную.

С понятием открытого множества в топологическом пространстве (X, τ) тесно связано двойственное понятие *замкнутого множества*: так называют множество, дополнение которого открыто. Таким образом, если $U \in \tau$, то $X \setminus U$ замкнуто, и обратно: если F замкнуто, то $X \setminus F$ открыто.

Упражнение 1°. Проверьте, что следующие множества замкнуты: отрезок $[a, b]$ в \mathbb{R}^1 с топологией примера 1; замкнутый круг в \mathbb{R}^2 с топологией примера 2.

2. Непрерывное отображение. Гомеоморфизм. Обсудим теперь определение непрерывного отображения топологических пространств.

Пусть (X, τ) , (Y, σ) — два топологических пространства с топологиями τ , σ соответственно. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — отображение множеств.

Определение. Говорят, что f — *непрерывное отображение* топологических пространств, если полный прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества V пространства (Y, σ) является открытым множеством пространства (X, τ) .

Если $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ — отображения топологических пространств, то естественно определяется суперпозиция $gf: X \rightarrow Z$ по правилу $(gf): x \mapsto g(f(x))$.

Теорема. Если f, g непрерывны, то и gf непрерывно.
Доказательство легко следует из замечания

$$(gf)^{-1}(W) = f^{-1}(g^{-1}(W)),$$

где $W \subset Z$ — произвольное множество.

Определение. Два топологических пространства, (X, τ) , (Y, σ) , называются *гомеоморфными*, если существует отображение $f: X \rightarrow Y$, удовлетворяющее условиям: 1) $f: X \rightarrow Y$ — биективное отображение; 2) f непрерывно; 3) f^{-1} непрерывно.

Отображение f в этом случае называется *гомеоморфизмом*.

Подпространство топологического пространства. Как видно из предыдущего, подмножества метрических и топологических пространств часто рассматриваются как самостоятельные объекты. При этом подмножество Y метрического пространства X естественно наследует метрику из X . Определим теперь понятие наследственной топологии на подмножестве Y , когда X — топологическое пространство.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, $Y \subset X$ — подмножество в X . Рассмотрим систему подмножеств множества Y

$$\tau_Y = \{V: V = U \cap Y, U \in \tau\}.$$

Теорема. Система τ_Y является топологией на Y .

Доказательство предлагается провести читателю (оно очевидно).

Топология τ_Y называется *индуцированной* или *наследственной топологией* из X . Пространство (Y, τ_Y) называется *подпространством* пространства (X, τ) .

Литература

Борисович Ю.Г. и др.
«Введение в топологию»