Элементы нелинейного функционального анализа

Глава 1. Дифференциальное исчисление в нормированных пространствах

§11. Теорема об обратном отображении.

ЛНП

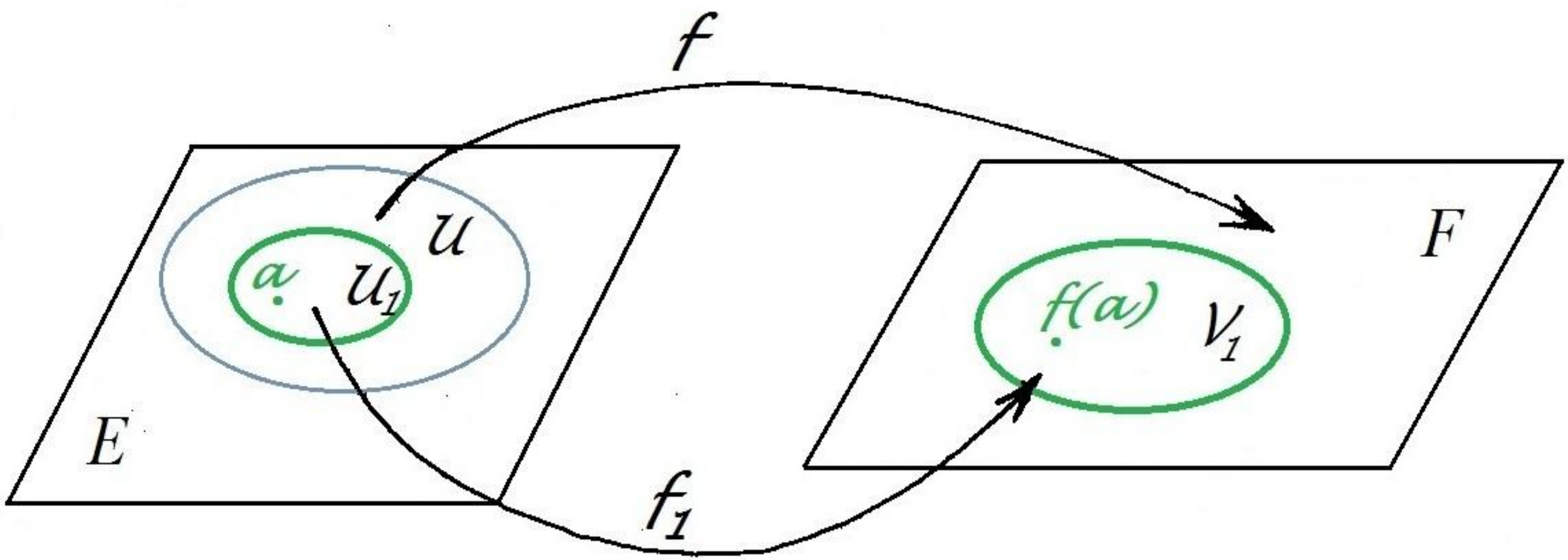
Опр. ЛОО $A: E \to F$ наз-ся *изоморфизмом*, если A отображает E на F взаимно-однозначно и обратный оператор A^{-1} также ограничен.

Теорема. Пусть E и F — банаховы пр-ва, $\mathcal{U}$ — открытое множ-во в E, отображение $f: \mathcal{U} \to F$ — гладкое класса C^r $(r \geq 1)$ и в некоторой точке $x_0 \in \mathcal{U}$ ЛОО $f'(x_0)$ явл-ся изоморфизмом E на F. Тогда $\exists$ открытое множ-во $\mathcal{U}_1 \ni x_0$ $(\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U})$ и открытое мн-во $V_1 \subset F$, такие, что отображ-е

$$f_1 = f\big|_{\mathcal{U}_1} : \mathcal{U}_1 \longrightarrow V_1 \text{ является}$$

C^r-диффеоморфизмом.

При этом $(f_1^{-1})'(y_0) = [f'(x_0)]^{-1}$ – обрат. оператор ($y_0 = f(x_0)$).



Задачи

N10.1. Пусть U – открытое множ-во в ЛНП E, V – открытое мн-во в ЛНП F, $f: U \longrightarrow V$ – C^r – диффеоморфизм ($r \geq 1$). Доказать, что $(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}$ для $\forall y \in V$, $x = f^{-1}(y)$.

№ 10.2. Зная производную функции $f(x)$, найти производную обратной функции $f^{-1}(y)$.

1) $y = \operatorname{tg} x$; 2) $y = \sin x$; 3) $y = e^x$;

4) $y = \operatorname{ch} x$; 5) $y = \operatorname{sh} x$.

1) $y = \operatorname{tg} x = f(x)$; $f^{-1}(y) = \operatorname{arctg} y = x$;
$y \in \mathbb{R}^1$.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}\ ; \quad \underline{(f^{-1})'(y) = [f'(x)]^{-1}.}$$

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \cos^2 x = \cos^2(\operatorname{arctg} y);$$

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x + 1} = \frac{1}{y^2 + 1}\ ;$$

$$(f^{-1})'(y) = (\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{y^2 + 1}.$$

N 10.3. Для отображения $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ найти матрицу оператора $(f^{-1})'(y^0)$:

1) $f(x) = f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$, $y^0 = (1, 1)$;

2) $f(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ x_1^3 \end{pmatrix}$, $y^0 = (2, 1)$.

Решение. 1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ x_2 & x_1 \end{pmatrix}$ — м-да пр-й $f'(x)$.

$$\begin{cases} x_1^2 = 1, \\ x_1 x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^1 = (1,1),\ x^2 = (-1,-1).$$ — два прообраза т. $y^0 = (1,1)$.

$A_1 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — невырожденa,

$A_2 = \dfrac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ — невырожд.

$$A_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ — невырождена,}$$

$$A_2 = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \text{ — невырожд.}$$

След-но, операторы $f'(x^1)$ и $f'(x^2)$ — изоморфизм $\mathbb{R}^2$ на $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ по теореме о локальном диффеом-ме (об обратном отображении) f — локальный дифф-м (кл. C^∞) в окрестн. т. x^1 и x^2;

т.е. $\exists$ окрестность O_1 точки x^1 и окрест-ность V_1 т. y^0, такие, что сужение

$f_1 = f|_{O_1} : O_1 \longrightarrow V_1$ — C^∞-диффеом-м,

также $\exists$ окрестность O_2 т. x^2 и окрест-ть V_2 т. y^0, такие, что $f_2 = f|_{O_2} : O_2 \longrightarrow V_2$ — C^∞-диффф-м.

Тогда $\dfrac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_1)\right]^{-1} = A_1^{-1}$.

Тогда $\dfrac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0) = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_1)\right]^{-1} = A_1^{-1}.$

Найдем A_1^{-1}:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right).$$

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_1^{-1}}{\partial y}(y^0)$$

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix} = \frac{\partial f_2^{-1}}{\partial y}(y^0)$$

Глава 2.
Гладкие многообразия

§ 1. Топологическое пространство и непрерывное отображение

1. Определение топологического пространства. Пусть X — множество произвольной природы и $\tau = \{U\}$ — совокупность его подмножеств, обладающая следующими свойствами:

1) $\varnothing, X \in \tau$;

2) объединение любой совокупности множеств из τ принадлежит τ;

3) пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ.

Такая совокупность подмножеств τ называется *топологией* на X. Множество X с заданной на нем топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается (X, τ), подмножества из совокупности τ называются *открытыми* (в пространстве (X, τ)).

Пример 1. X — числовая прямая $\mathbb{R}^1$. Топологию на $\mathbb{R}^1$ можно задать следующим набором подмножеств: пустое множество $\varnothing$, всевозможные интервалы и их объединения $U = \bigcup\limits_{\alpha} (a_\alpha, b_\alpha)$ (проверьте!).

П р и м е р 2. $X = \mathbb{R}^2$. Открытым множеством назовем всякое множество в $X = \mathbb{R}^2$, которое вместе с каждой своей точкой содержит достаточно малый открытый круг с центром в этой точке, а также пустое множество. Легко проверить, что система всех открытых множеств в $X = \mathbb{R}^2$ образует топологию.

П р и м е р 3. X — произвольное множество. Совокупность $\tau_0 = \{\varnothing, X\}$ задает топологию на X (проверьте!).

П р и м е р 4. X — произвольное множество, $\tau_1 = \{$всевозможные подмножества из $X\}$. Совокупность τ — топология на X (проверьте!).

Топология τ_1 называется *максимальной* или *дискретной*, а топология τ_0 — *минимальной* или *тривиальной*. Таким образом, на одном и том же множестве можно ввести различные топологии, например тривиальную и дискретную.

С понятием открытого множества в топологическом пространстве (X, τ) тесно связано двойственное понятие *замкнутого множества*: так называют множество, дополнение которого открыто. Таким образом, если $U \in \tau$, то $X \setminus U$ замкнуто, и обратно: если F замкнуто, то $X \setminus F$ открыто.

Упражнение 1°. Проверьте, что следующие множества замкнуты: отрезок $[a, b]$ в $\mathbb{R}^1$ с топологией примера 1; замкнутый круг в $\mathbb{R}^2$ с топологией примера 2.

2. Непрерывное отображение. Гомеоморфизм. Обсудим теперь определение непрерывного отображения топологических пространств.

Пусть (X, τ), (Y, σ) — два топологических пространства с топологиями τ, σ соответственно. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множеств.

Определение. Говорят, что f — *непрерывное отображение* топологических пространств, если полный прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества V пространства (Y, σ) является открытым множеством пространства (X, τ).

Если $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ — отображения топологических пространств, то естественно определяется суперпозиция $gf: X \to Z$ по правилу $(gf): x \mapsto g(f(x))$.

Теорема. *Если f, g непрерывны, то и gf непрерывно.*

Доказательство легко следует из замечания

$$(gf)^{-1}(W) = f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right),$$

где $W \subset Z$ — произвольное множество.

Определение. Два топологических пространства, (X, τ), (Y, σ), называются *гомеоморфными*, если существует отображение $f: X \to Y$, удовлетворяющее условиям: 1) $f: X \to Y$ — биективное отображение; 2) f непрерывно; 3) f^{-1} непрерывно.

Отображение f в этом случае называется ***гомеоморфизмом.***

Подпространство топологического пространства. Как видно из предыдущего, подмножества метрических и топологических пространств часто рассматриваются как самостоятельные объекты. При этом подмножество Y метрического пространства X естественно наследует метрику из X. Определим теперь понятие наследственной топологии на подмножестве Y, когда X — топологическое пространство.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, $Y \subset X$ — подмножество в X. Рассмотрим систему подмножеств множества Y

$$\tau_Y = \{V: V = U \cap Y, U \in \tau\}.$$

Теорема. *Система τ_Y является топологией на Y.*

Доказательство предлагается провести читателю (оно очевидно).

Топология τ_Y называется *индуцированной* или *наследственной топологией* из X. Пространство (Y, τ_Y) называется *подпространством* пространства (X, τ).

Литература

Борисович Ю.Г. и др.
«Введение в топологию»