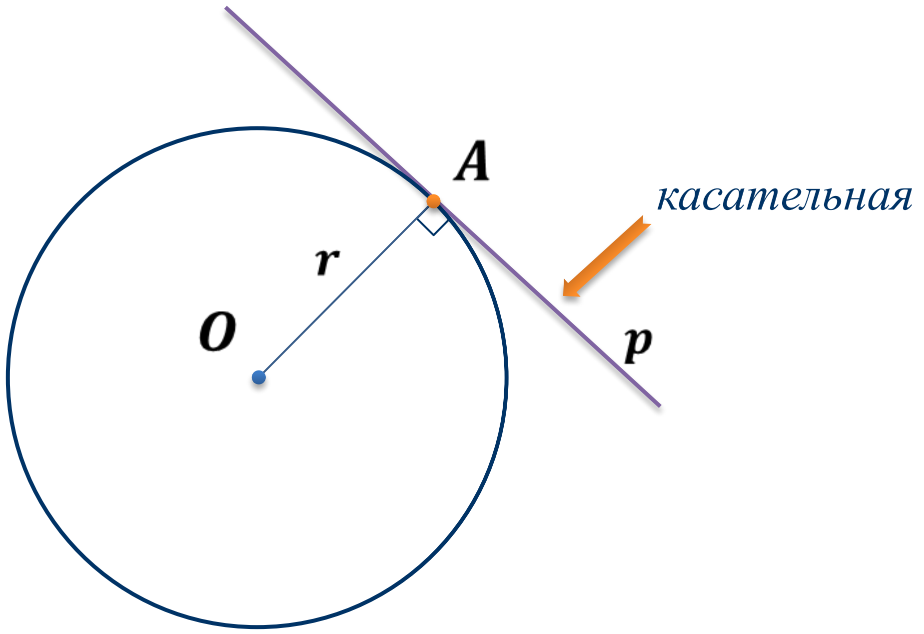
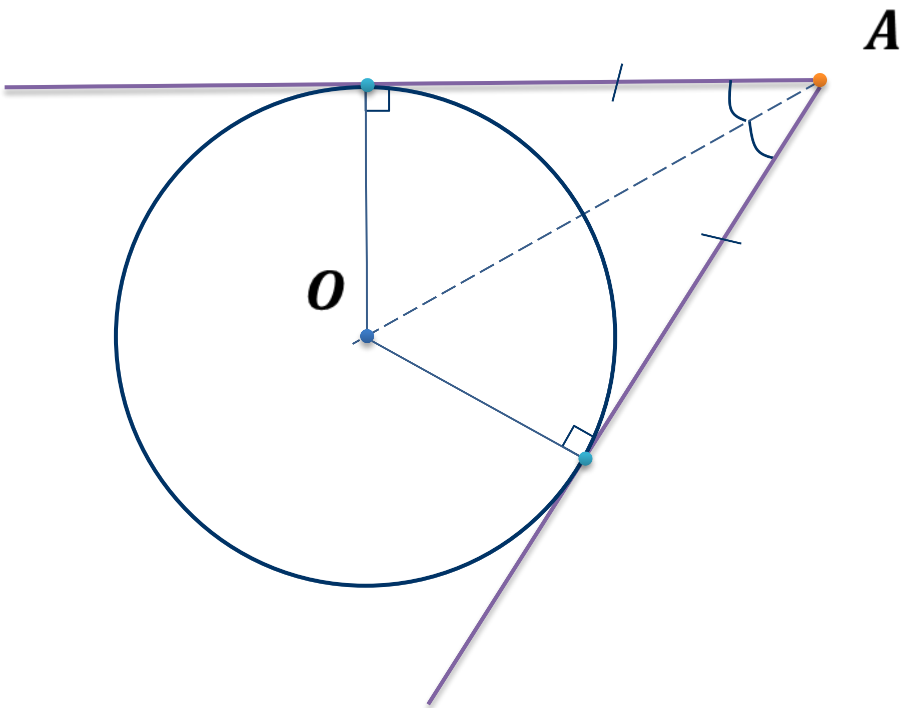
Вписанная окружность

Касание прямой и окружности

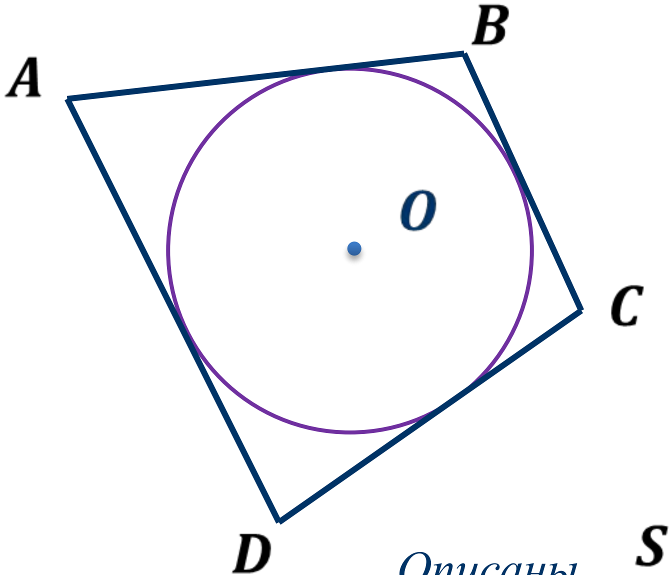


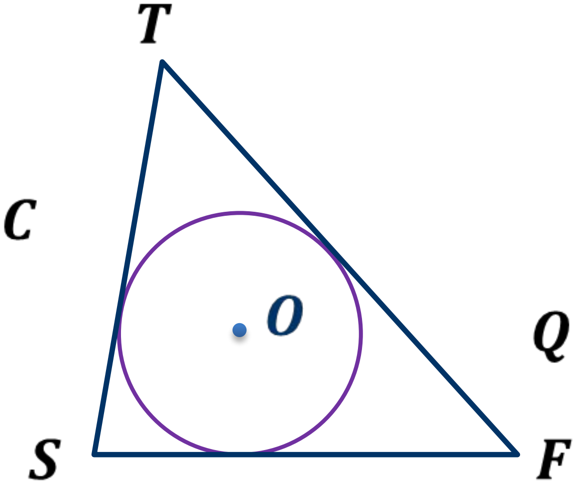
Теорема. Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и составляют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности.

Окружность вписанная в угол

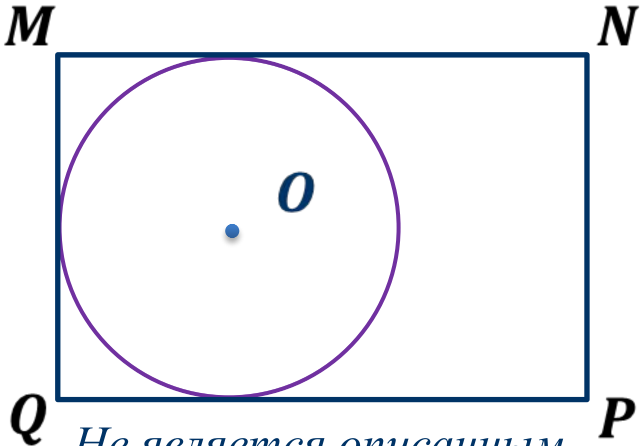


Определение. Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется **вписанной** в многоугольник, а многоугольник – **описанным около** этой **окружности**.





Описаны около окружности



Не является описанным около окружности

Теорема. В любой треугольник можно вписать окружность.

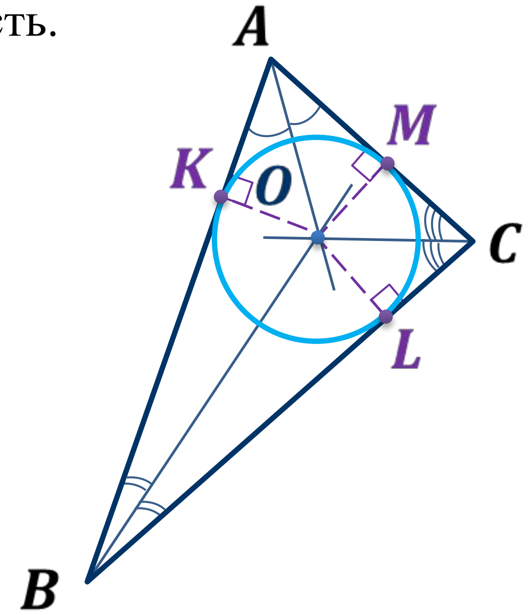
Доказательство.

$OK \perp AB,\ OL \perp BC,\ OM \perp AC.$

$OK = OL = OM.$

Окружность касается всех трех сторон ΔABC.

Окружность вписана в треугольник ΔABC.



Все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

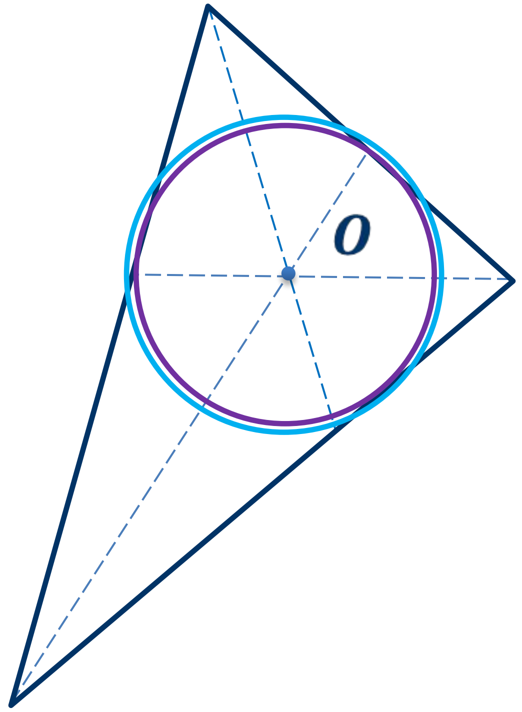
Замечания.

1. В треугольник можно вписать только **одну** окружность.

Доказательство. Допустим, в треугольник можно вписать две окружности.

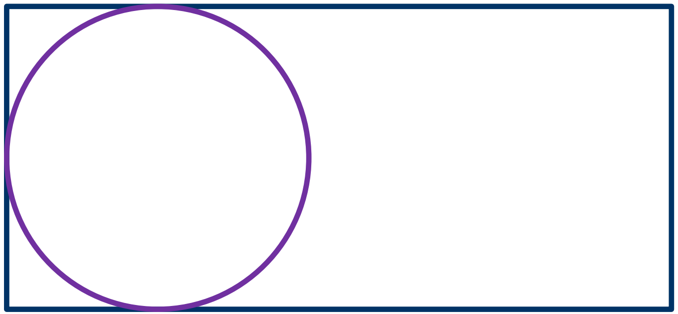
Тогда центр второй окружности был бы равноудален от всех сторон треугольника и лежал бы на пересечении его биссектрис.

Но так как все биссектрисы пересекаются в единственной точке – в точке O – и радиус равен расстоянию от точки O до сторон треугольника, то и вписанная в треугольник окружность **единственная**.



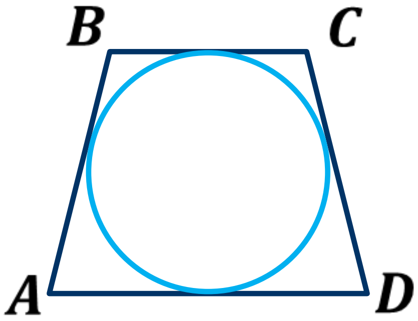
Замечания.

2. В отличие от треугольника **не во всякий** четырехугольник можно вписать окружность.



Доказательство.
Рассмотрим прямоугольник, у которого смежные стороны не равны.

В такой прямоугольник можно «поместить» окружность, касающуюся **трех** его сторон, но **нельзя** «поместить» окружность так, чтобы она касалась всех четырех его сторон, т.е. **нельзя вписать окружность**.



Если же в четырехугольник можно вписать окружность, то его стороны обладают следующим замечательным **свойством**:

В любом описанном четырехугольнике ***суммы противоположных сторон равны****.*

$$AB + CD = BC + AD$$

Если в четырехугольник можно вписать окружность, то его стороны обладают следующим замечательным **свойством**:

В любом описанном четырехугольнике ***суммы противоположных сторон равны***.

$$AB + CD = BC + AD$$

Доказательство.

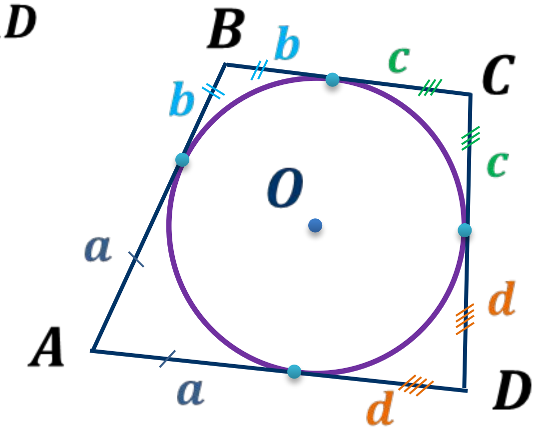
Рассмотрим четырехугольник $ABCD$.

$$AB + CD = a + b + c + d$$

$$BC + AD = a + b + c + d$$

$$AB + CD = BC + AD$$

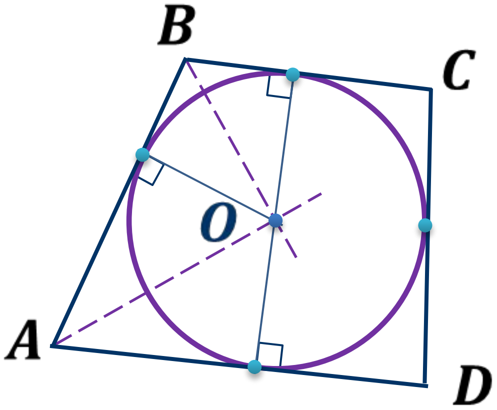
Следовательно, **суммы противоположных сторон <u>в описанном четырехугольнике</u> равны**.



Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

Если **суммы противоположных сторон** выпуклого четырехугольника **равны**, то **в него можно вписать окружность**.

Доказательство.



Рассмотрим выпуклый четырехугольник $ABCD$.

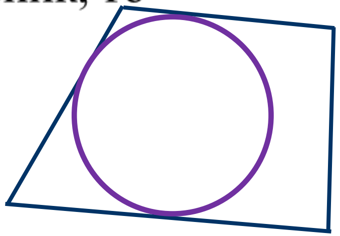
Пусть $AB + CD = BC + AD$.

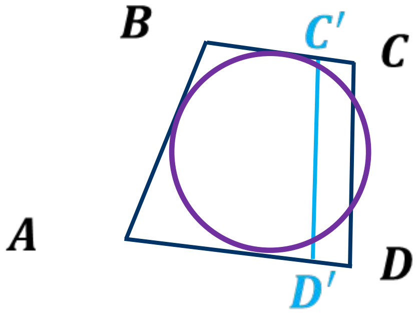
Доказажем, что эта окружность касается также стороны CD.

1) Прямая CD не имеет общих точек с окружностью.

2) Прямая CD пересекает окружность в двух точках, т.е. является секущей.

Так как $ABC'D'$ – описанный четырехугольник, то $AB + C'D' = BC' + AD'$.





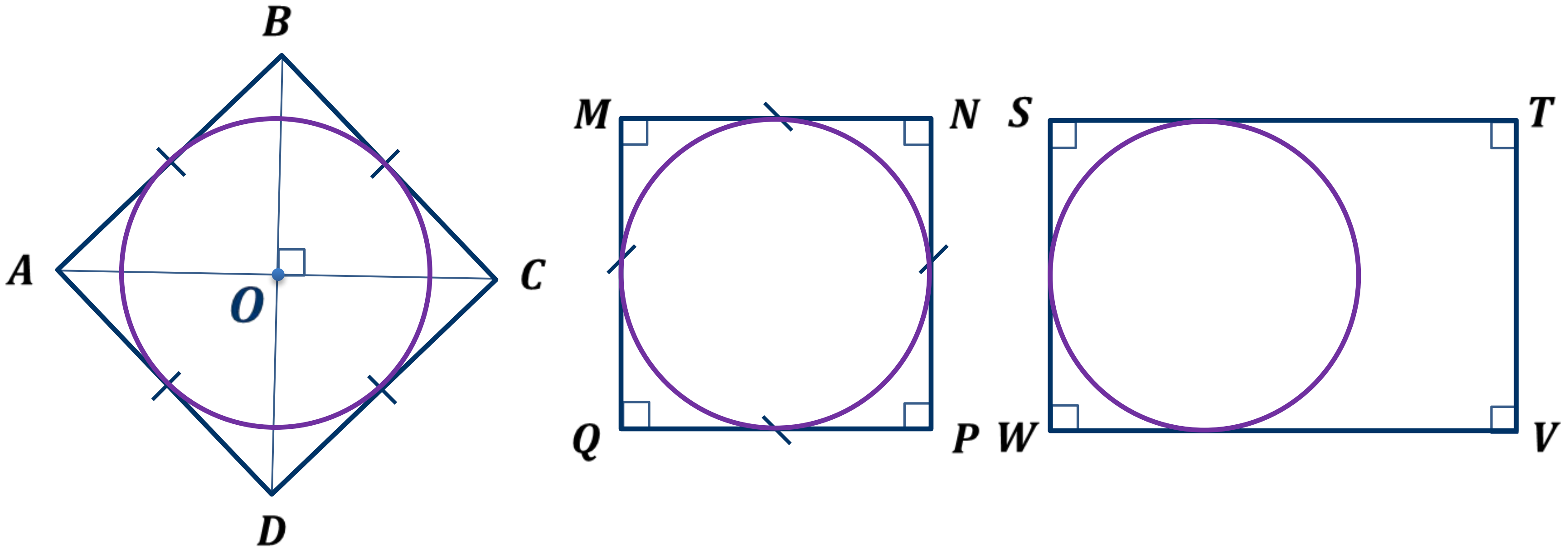
$BC' = BC - C'C, \quad AD' = AD - D'D$

$AB + C'D' = BC - C'C + AD - D'D.$

$C'D' + C'C + D'D = BC + AD - AB = CD$

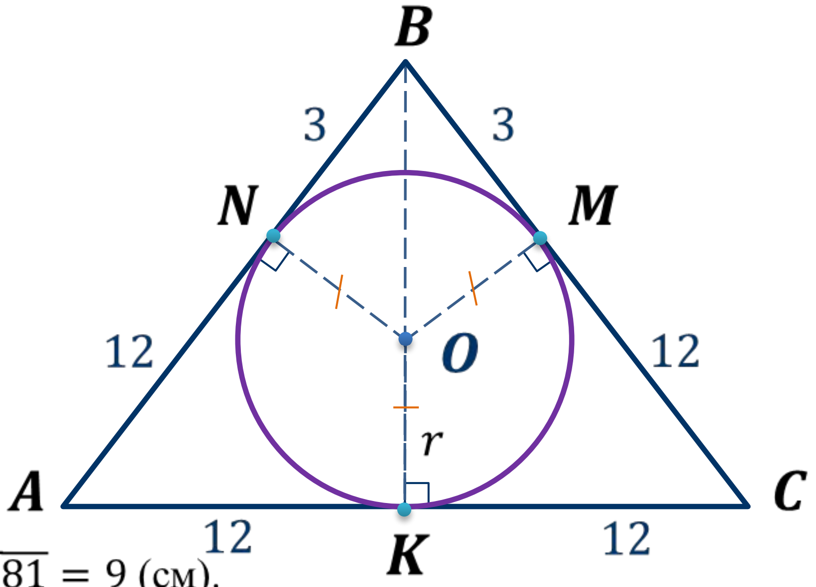
Следовательно, окружность касается стороны CD.

Можно ли описать около окружности ромб, квадрат и прямоугольник. Почему?



$AB + CD = BC + AD$ $\quad MN + PQ = MQ + NP$ $\quad ST + VW \neq SW + TV$

Задача. В равнобедренном треугольнике точка касания вписанной окружности делит боковую сторону на отрезки длиной 12 см и 3 см, считая от основания. Найдите площадь треугольника.



Решение.

$OK \perp AC, \qquad OM \perp BC, \qquad ON \perp AB$

$OK = OM = ON = r$

$BN = BM = 3$ (см)

$AN = AK = KC = CM = 12$ (см)

Рассмотрим ΔABK.

$BK \perp AC \Rightarrow \Delta ABK$ – прямоугольный.

$AB = AN + NB = 3 + 12 = 15$ (см)

$BK^2 = AB^2 - AK^2 = 15^2 - 12^2 = 81 \Rightarrow BK = \sqrt{81} = 9$ (см).

$AC = AK + KC = 12 + 12 = 24$ (см)

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 9 = 108 \text{ (см}^2\text{)}$$

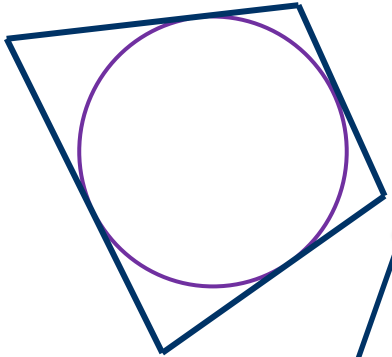
Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны.

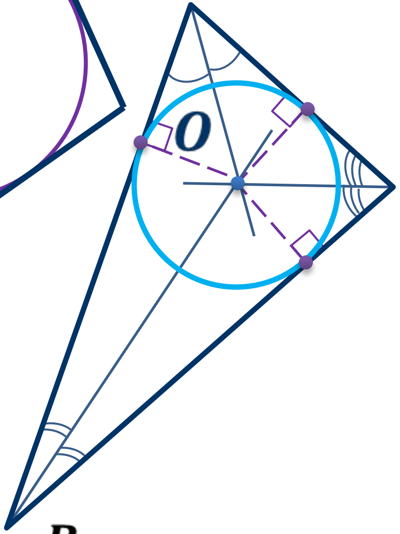
$AB^2 = BK^2 + AK^2$

$S = \frac{1}{2} a \cdot h$

Ответ: $S_{\Delta ABC} = 108$ (см^2).

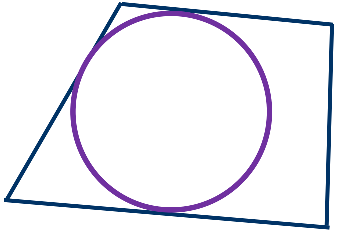
Если все стороны многоугольника касаются окружности, то окружность называется ***вписанной*** в многоугольник, а многоугольник – ***описанным около*** этой ***окружности***.





Теорема. В любой треугольник можно вписать окружность.

В отличие от треугольника ***не во всякий*** четырехугольник можно вписать окружность.



Если в четырехугольник можно вписать окружность, то его стороны обладают следующим замечательным **свойством**:

В любом описанном четырехугольнике ***суммы противоположных сторон равны***.

$$AB + CD = BC + AD$$