«Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике»

Ученик, который учится без желания, подобен птице без крыльев.

Саади

персидский мыслитель и писатель, 13 в.н.э.

Задание :

в прямоугольном треугольнике

отыскать **пропорциональные** отрезки

и раскрыть некоторые его важные свойства

Верно ли утверждение:
два любых прямоугольных треугольника – подобны

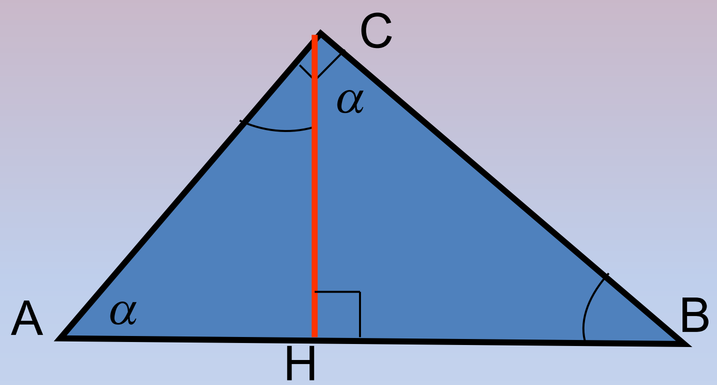
?

Свойство прямоугольного треугольника.

Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, разделяет треугольник на два подобных треугольника, каждый из которых подобен данному.

α

Свойство прямоугольного треугольника



Дано: $\triangle ABC, \angle ACB = 90^0$,
$CH \perp AB$

Доказать: $\triangle ACH$ и $\triangle CBH$ подобны
$\triangle ACH$ и $\triangle ABC$ подобны
$\triangle CBH$ и $\triangle ABC$ подобны

Доказательство:

Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle B = 90^0 - \alpha$,

$\angle ACH = 90^0 - \alpha$, $\angle BCH = 90^0 - (90^0 - \alpha) = \alpha$.

Итак, прямоугольные треугольники ACH и CBH подобны, т.к. $\angle A = \angle BCH$,

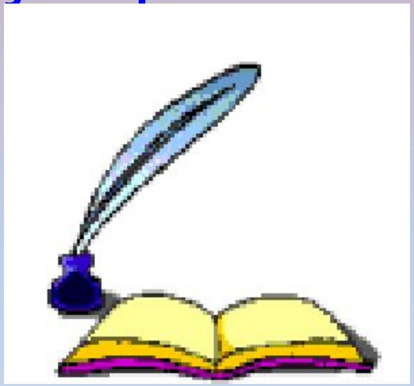
прямоугольные треугольники ACH и ABC подобны, т.к. $\angle A$ - общий,

прямоугольные треугольники CBH и ABC подобны, т.к. $\angle B$ – общий.

Определение.

Отрезок XY называется средним геометрическим (или средним пропорциональным) между отрезками AB и CD, если

$$XY = \sqrt{AB \cdot CD}$$



а).Найдите среднее пропорциональное отрезков MN и KP, если MN=4, KP=25

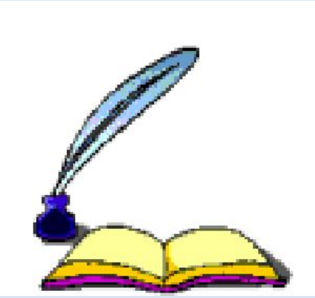
$$XY = \sqrt{MN \cdot KP} = \sqrt{4 \cdot 25} = 10$$

б). Найдите длину отрезка AB, если среднее пропорциональное отрезков AB и CD равно 90см и CD=100 см

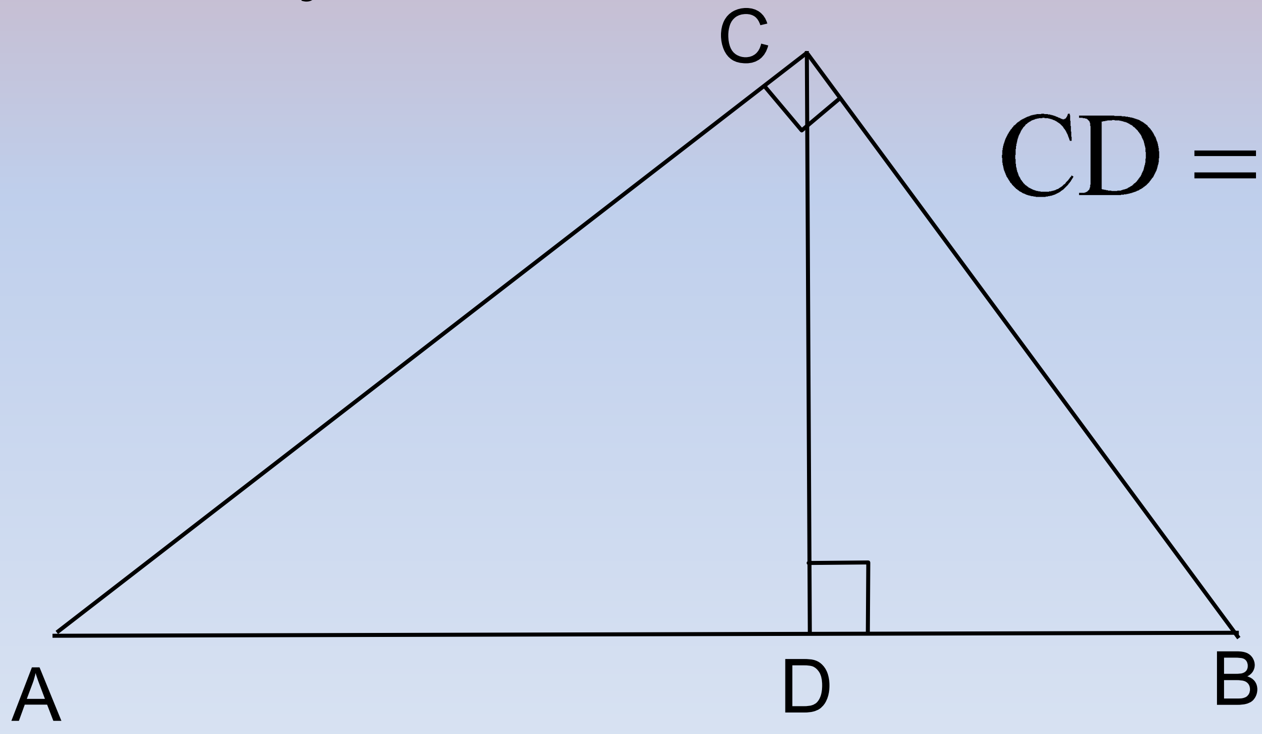
$$XY = \sqrt{AB \cdot CD}$$

$$XY^2 = AB \cdot CD$$

$$AB = \frac{XY^2}{CD} = \frac{90 \cdot 90}{100} = 81$$

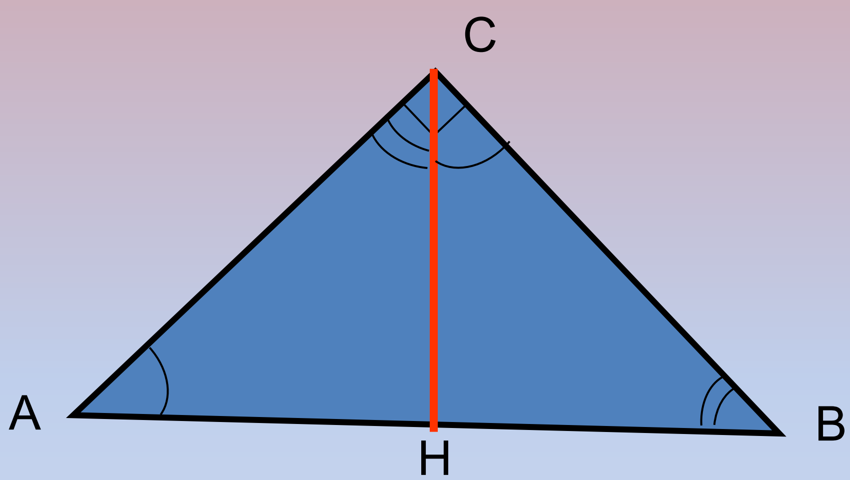


Утверждение1. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.



$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

Свойство 1.



Дано: $\triangle$ ABC, $\angle$ ACB = 90^0,
CH $\perp$ AB

Доказать: CH = $\sqrt{AH \cdot HB}$

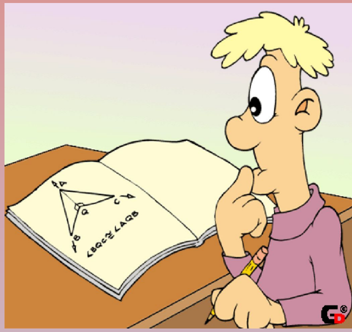
Доказательство:

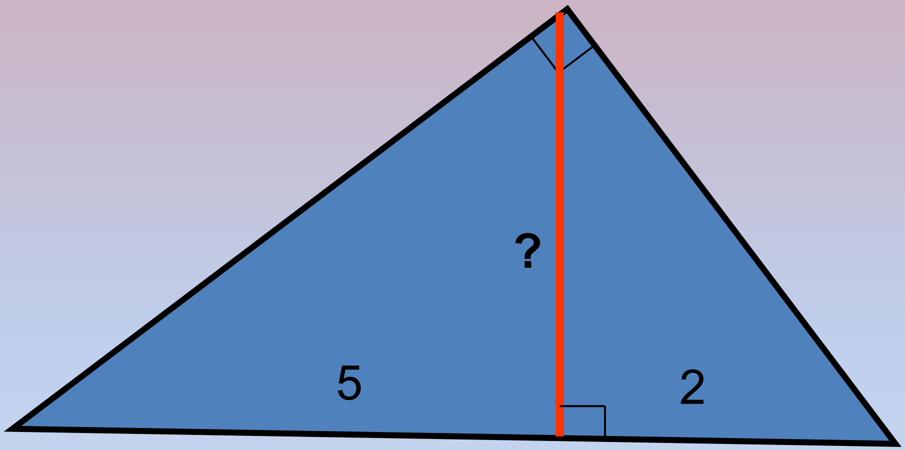
По доказанному $\triangle$ ACH и $\triangle$ CBH подобны, значит, сходственные стороны пропорциональны:

$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB}$, следовательно, CH^2 = AH · HB, т. е. CH = $\sqrt{AH \cdot HB}$

1.

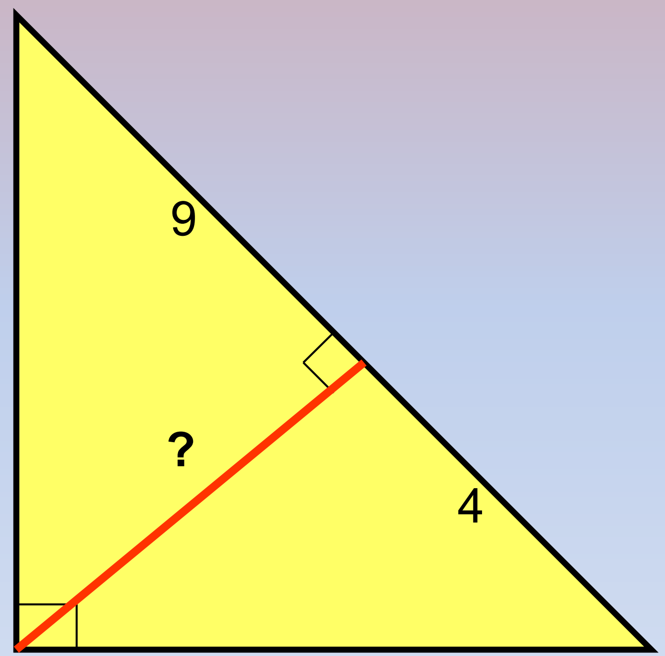
Реши задачу

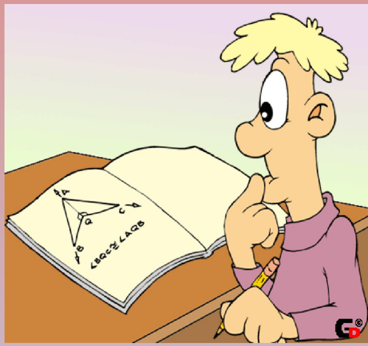




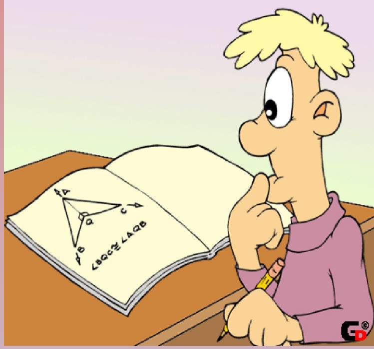
2.

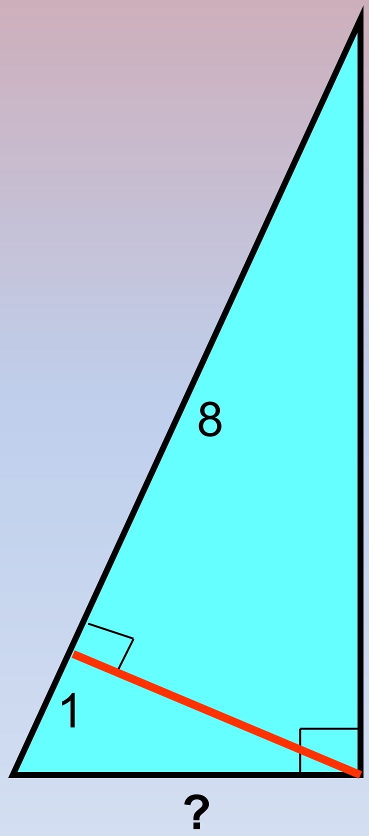
Реши задачу





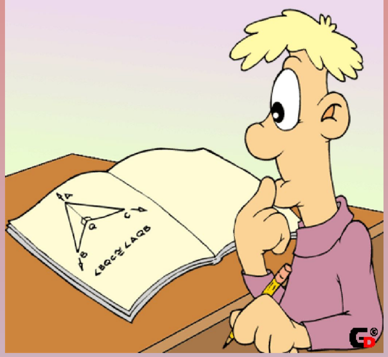
3. Реши задачу

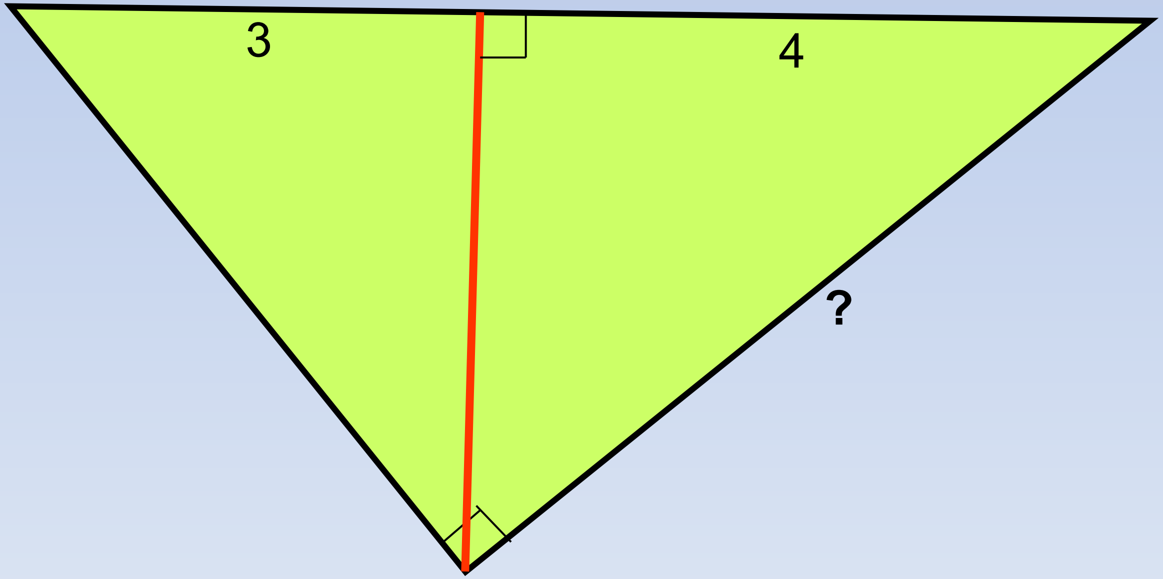




Реши задачу

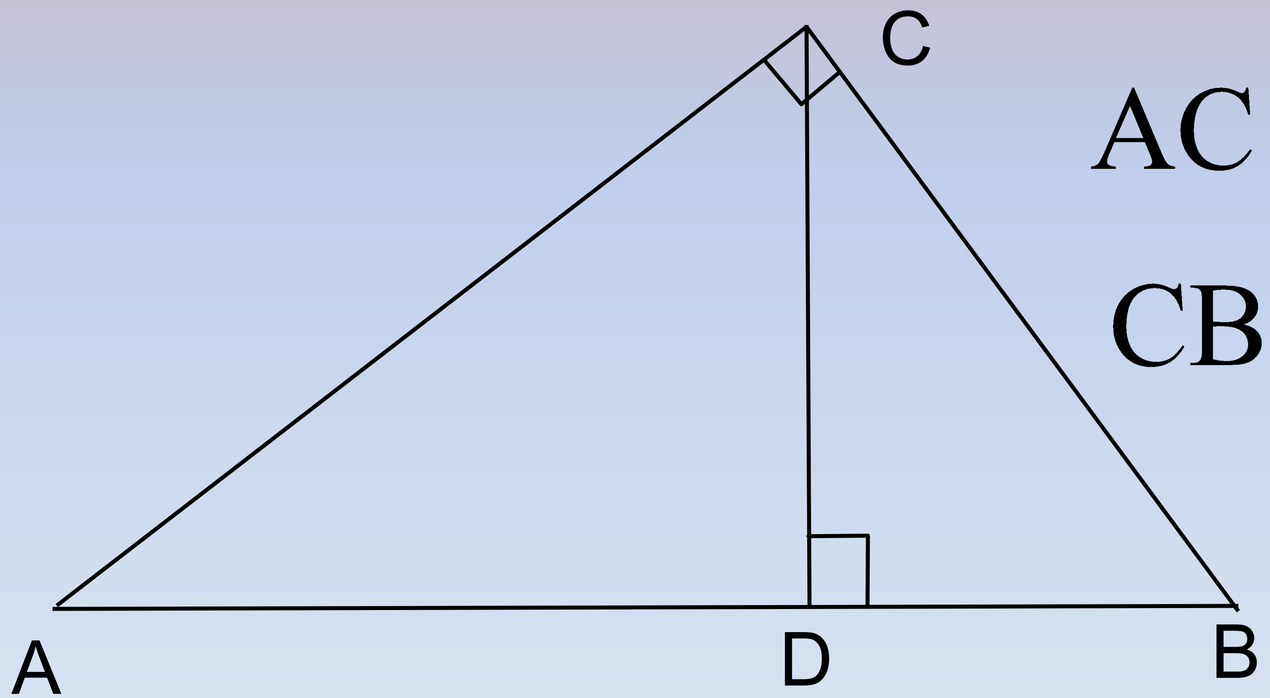
4.





Утверждение 2

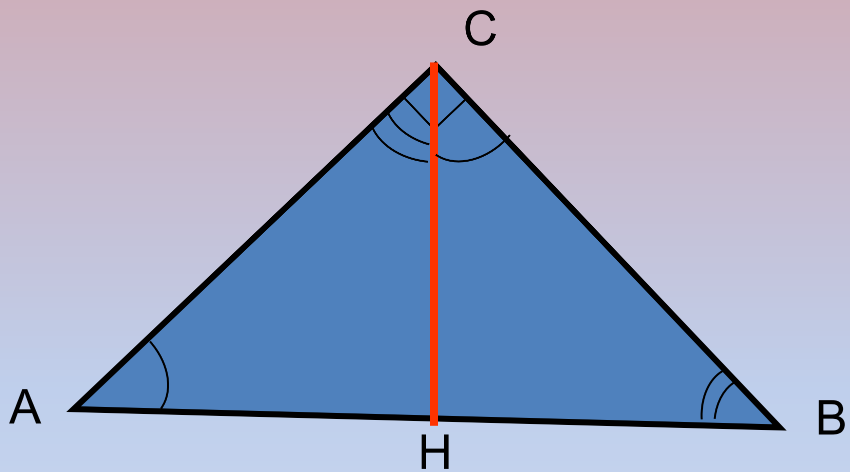
Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между этим катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.



$$AC = \sqrt{AB \cdot AD}$$

$$CB = \sqrt{AB \cdot DB}$$

Свойство 2.



Дано: $\triangle$ ABC, $\angle$ ACB = 90^0,
CH $\perp$ AB

Доказать: AC = $\sqrt{AB \cdot AH}$

BC = $\sqrt{AB \cdot BH}$

Доказательство:

По доказанному $\triangle$ACH и $\triangle$ ABC подобны, значит, сходственные стороны пропорциональны:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AH}$$

Значит, $AC^2 = AB \cdot AH$, т. е. AC = $\sqrt{AB \cdot AH}$

По доказанному $\triangle$ BCH и $\triangle$ABC подобны, значит, сходственные стороны пропорциональны:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BH}$$

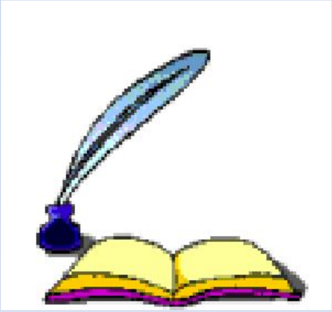
Значит, $BC^2 = AB \cdot BH$, т. е. BC = $\sqrt{AB \cdot BH}$

Если в Δ ABC $\angle$C=90^0 и CD – высота, то:

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

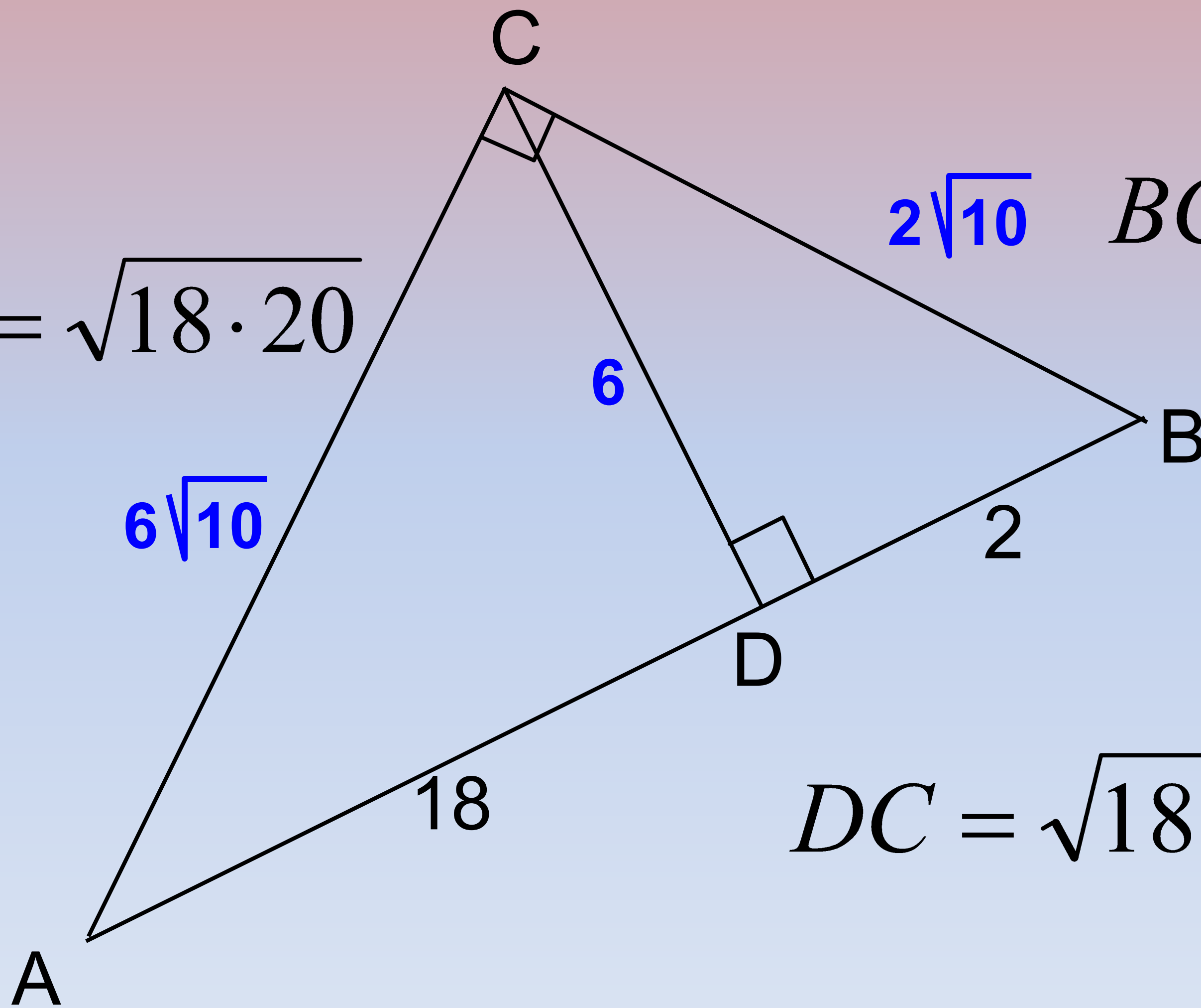
$$AC = \sqrt{AB \cdot AD}$$

$$CB = \sqrt{AB \cdot DB}$$



Задача 1.

Найдите неизвестные линейные элементы прямоугольного треугольника АВС.



$$BC = \sqrt{2 \cdot 20}$$

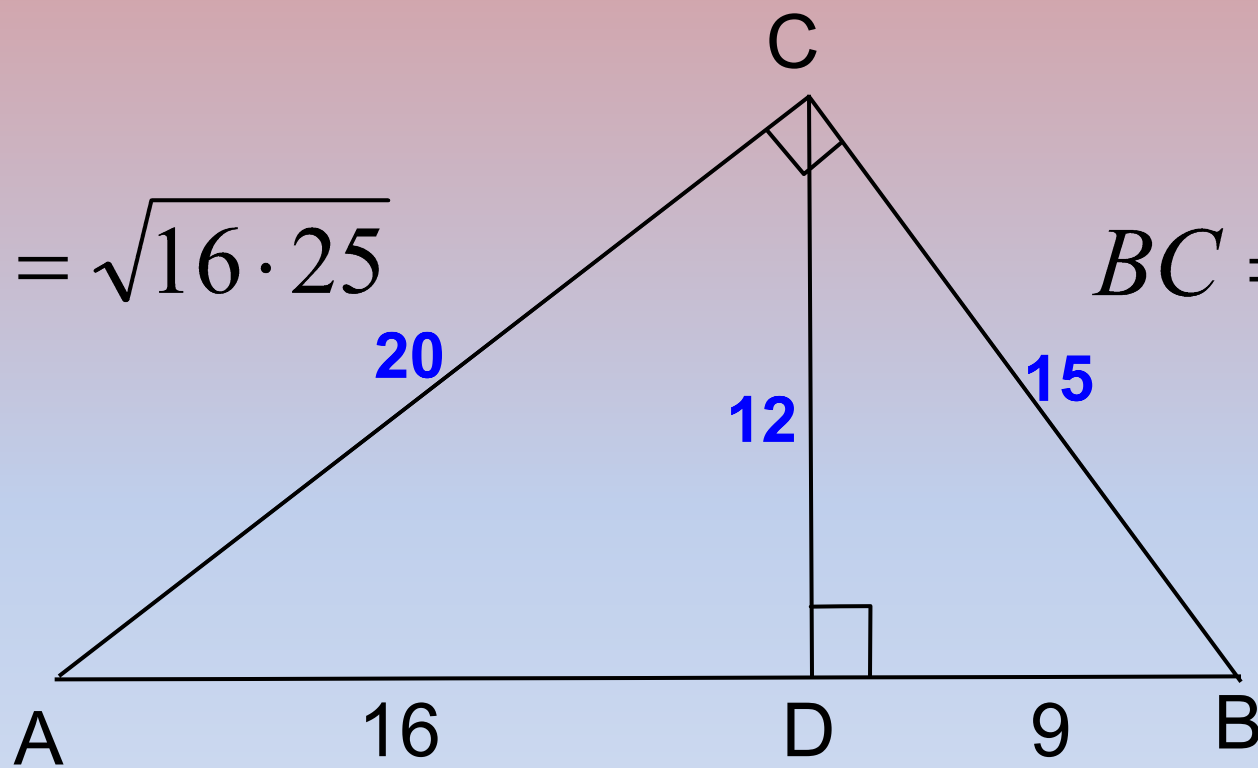
$$AC = \sqrt{18 \cdot 20}$$

$$DC = \sqrt{18 \cdot 2}$$

Задача 2. Найдите неизвестные линейные элементы прямоугольного треугольника АВС.

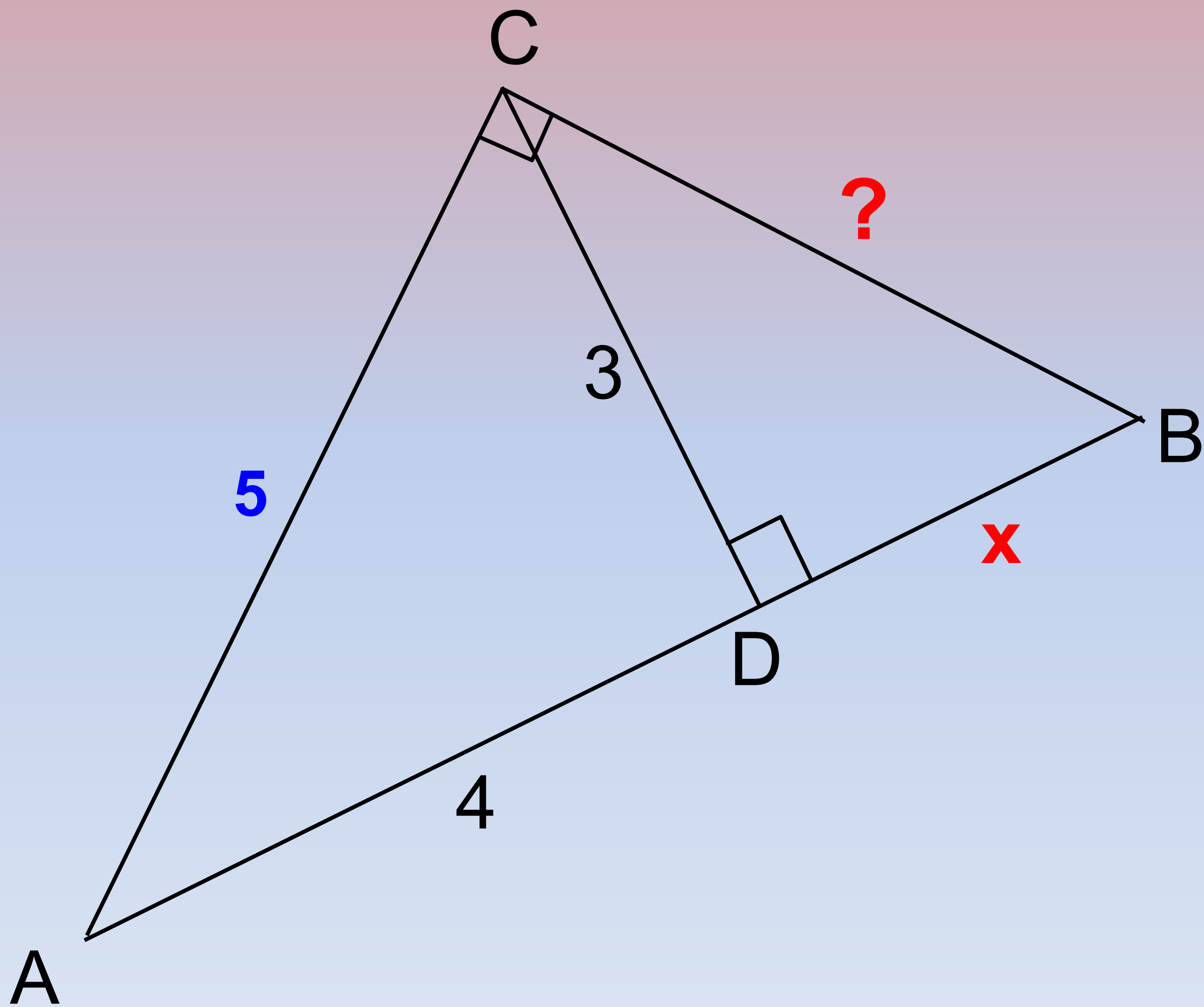
$$AC = \sqrt{16 \cdot 25}$$

$$BC = \sqrt{9 \cdot 25}$$



$$DC = \sqrt{16 \cdot 9}$$

Задача 3. Найдите неизвестные линейные элементы прямоугольного треугольника ABC.



$$3^2 = \left(\sqrt{4 \cdot x}\right)^2$$

$$9 = 4x$$

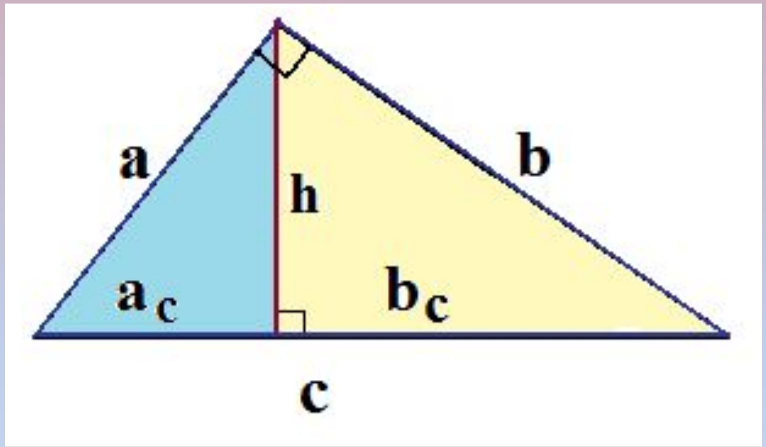
$$x = \frac{9}{4}$$

Вопрос 4:

Назовите пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике

Проверьте ответ:

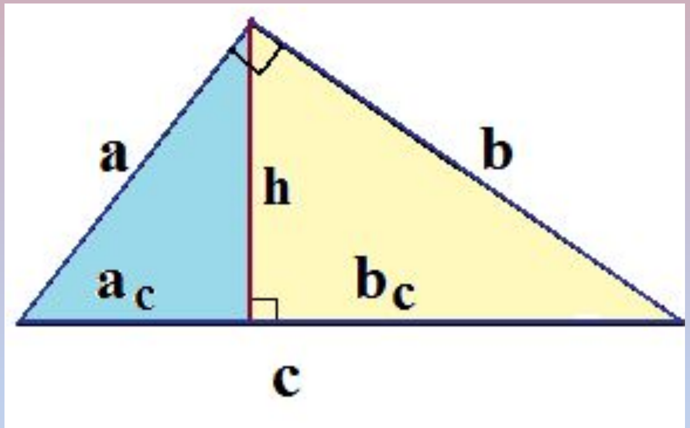
Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу.



$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

Вопрос 5:

Назовите пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике



Проверьте ответ:

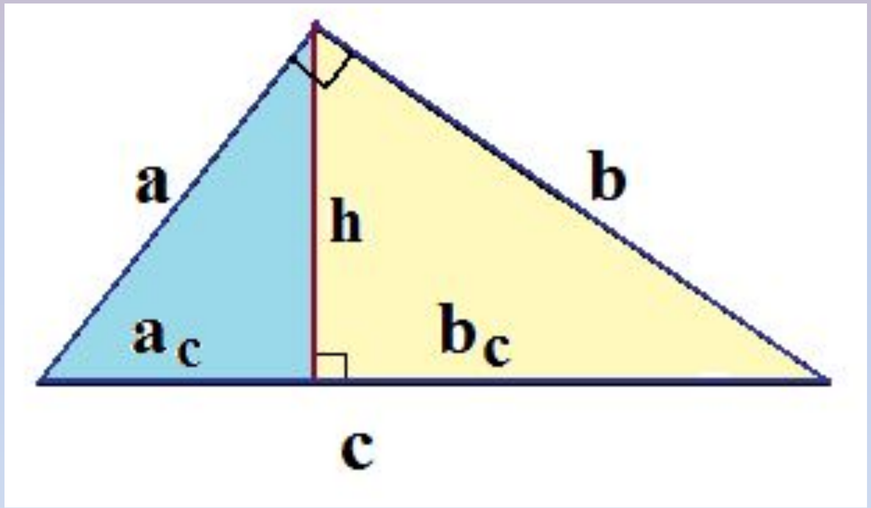
Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

$$a^2 = c \cdot a_c$$

$$b^2 = c \cdot b_c$$

Решите задачи 1-2:

Найти пропорциональные отрезки
в прямоугольном треугольнике по формулам:



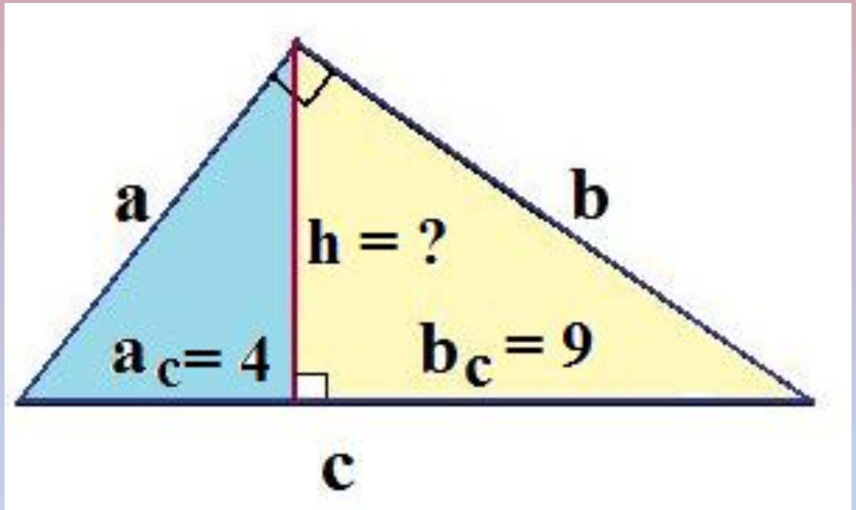
$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = c \cdot a_c$$

$$b^2 = c \cdot b_c$$

Задача1:

Найдите высоту в прямоугольном треугольнике



$a_c = 4$

$b_c = 9$

$h = ?$

Решение:

$h^2 = a_c \cdot b_c$

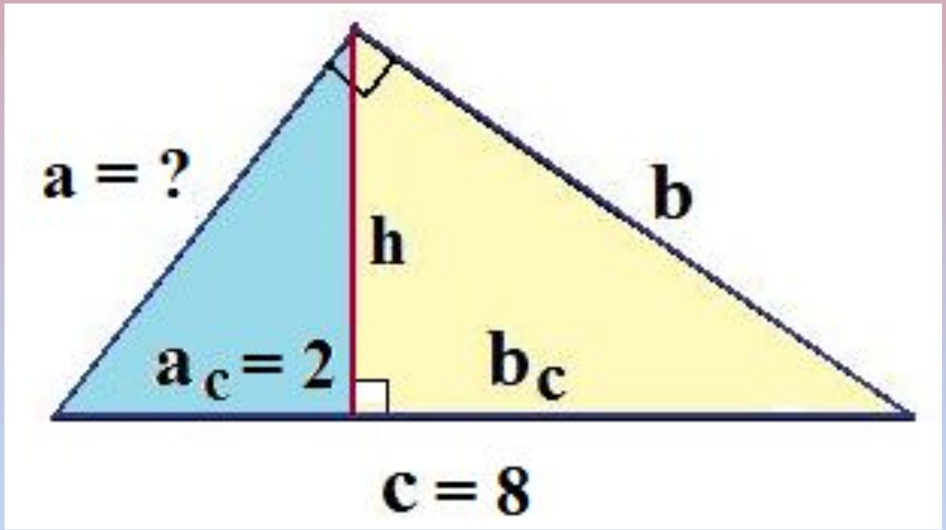
$h^2 = 4 \cdot 9$

$h = 6$

Ответ: $h = 6$

Задача2:

Найдите катет прямоугольного треугольника



$a_c = 2$

$c = 8$

$a = ?$

Решение:

$a^2 = c \cdot a_c$

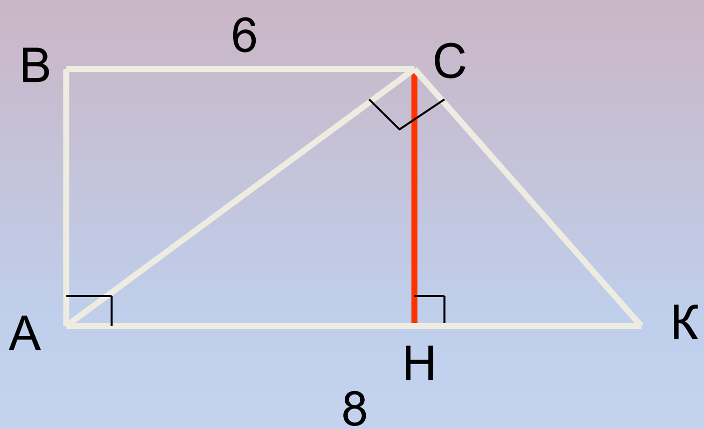
$a^2 = 8 \cdot 2$

$a = 4$

Ответ: $a = 4$

Решение задачи

В трапеции ABCK $AB \perp AK$, $AC \perp CK$, BC = 6, AK = 8.
Найдите углы трапеции.



Решение:

Проведём $CH \perp AK$,

т. к. ABCK – трапеция и $AB \perp AK$, то ABCH – прямоугольник, AH = BC = 6,
HK = AK – AH = 8 – 6 = 2.

Т. к. $AC \perp CK$, то $\triangle ACK$ – прямоугольный,
CH – высота, проведённая из вершины прямого угла, значит,

$$CH = \sqrt{AH \cdot HK} = \sqrt{6 \cdot 2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

По теореме Пифагора ($\triangle CHK$) $CK^2 = CH^2 + HK^2$, $CK^2 = 12 + 4 = 16$, CK = 4.

(2 способ нахождения CK из $\triangle ACK$: $CK = \sqrt{AK \cdot HK} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$)

В прямоугольном треугольнике CHK HK = ½ CK, значит, $\angle KCH = 30^0$,
$\angle K = 90^0 - 30^0 = 60^0$.

В трапеции ABCK $\angle A = \angle B = 90^0$, $\angle K = 60^0$, $\angle BCK = 180^0 - 60^0 = 120^0$.

Ответ: 90^0; 90^0; 120^0; 60^0.