

***«Пропорциональные отрезки
в прямоугольном
треугольнике»***

***Ученик, который учится без желанья,
подобен птице без крыльев.***

Саади

персидский мыслитель и писатель, 13 в.н.э.



Задание :

в прямоугольном треугольнике
отыскать **пропорциональные** отрезки
и раскрыть некоторые его важные свойства 🏆

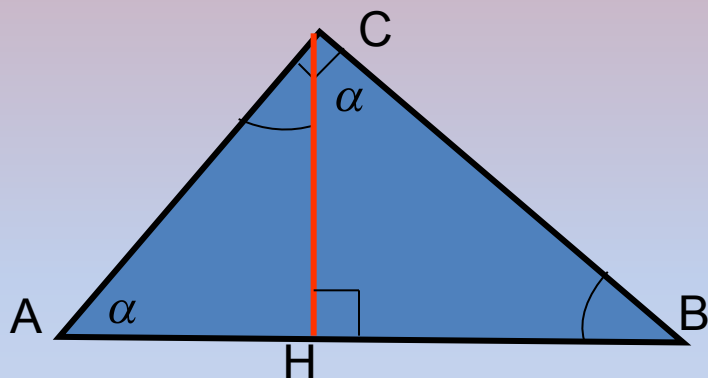
Верно ли утверждение:
два любых прямоугольных
треугольника – подобны

?

Свойство прямоугольного треугольника. 💡

Высота прямоугольного
треугольника, проведенная из
вершины прямого угла,
разделяет
треугольник на два подобных
треугольника, каждый из
которых подобен данному.

Свойство прямоугольного треугольника



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $CH \perp AB$

Доказать: $\triangle ACH$ и $\triangle CBH$ подобны
 $\triangle ACH$ и $\triangle ABC$ подобны
 $\triangle CBH$ и $\triangle ABC$ подобны

Доказательство:

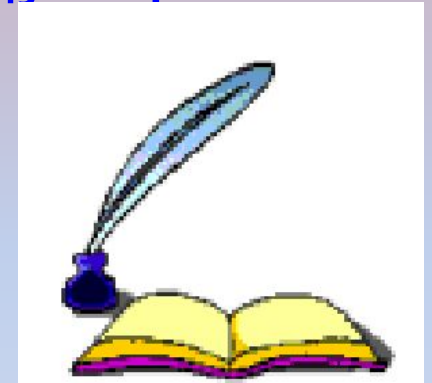
Пусть $\angle A = \alpha$, тогда $\angle B = 90^\circ - \alpha$,
 $\angle ACH = 90^\circ - \alpha$, $\angle BCH = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$.

Итак, прямоугольные треугольники ACH и CBH подобны, т.к. $\angle A = \angle BCH$,
прямоугольные треугольники ACH и ABC подобны, т.к. $\angle A$ - общий,
прямоугольные треугольники CBH и ABC подобны, т.к. $\angle B$ - общий.

Определение.

Отрезок XY называется средним геометрическим (или средним пропорциональным) между отрезками AB и CD , если

$$XY = \sqrt{AB \cdot CD}$$



а). Найдите среднее пропорциональное отрезков MN и KP , если $MN=4$, $KP=25$

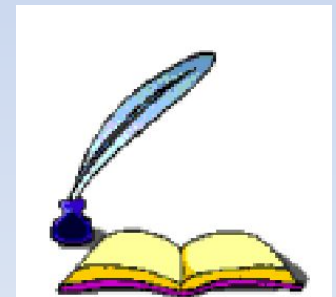
$$XY = \sqrt{MN \cdot KP} = \sqrt{4 \cdot 25} = 10$$

б). Найдите длину отрезка АВ, если среднее пропорциональное отрезков АВ и CD равно 90см и CD=100 см

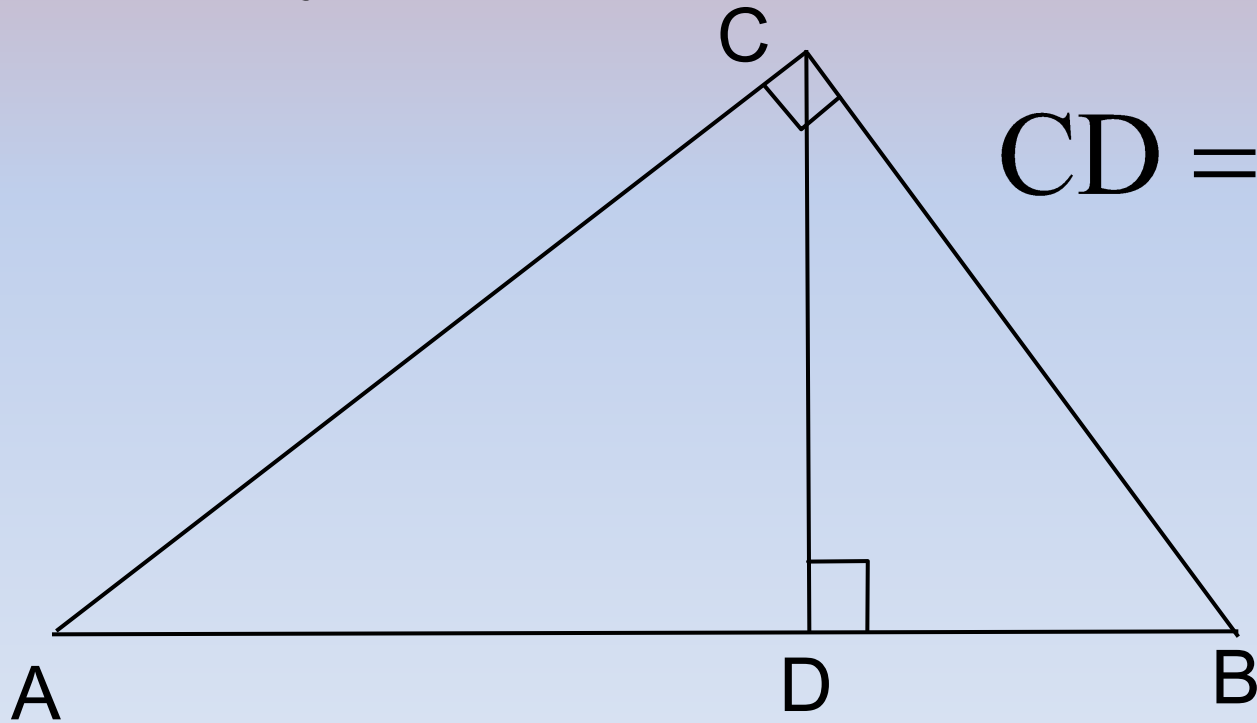
$$XY = \sqrt{AB \cdot CD}$$

$$\underline{XY^2} = AB \cdot \underline{CD}$$

$$AB = \frac{XY^2}{CD} = \frac{90 \cdot 90}{100} = 81$$

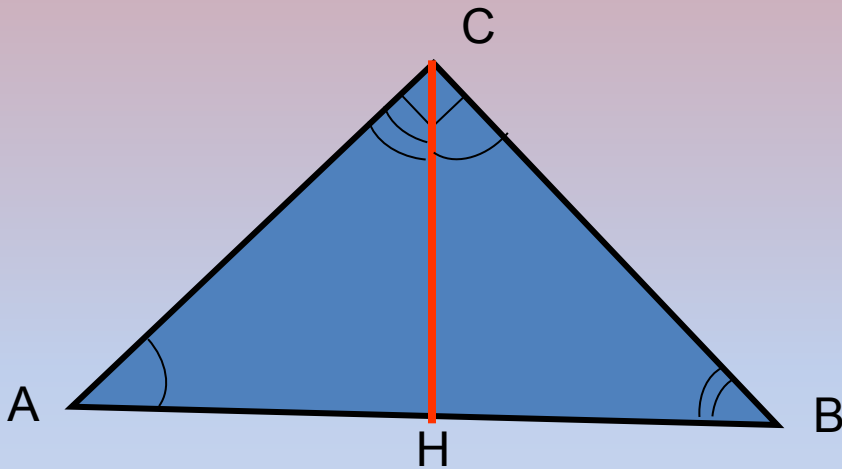


Утверждение 1. Высота прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между отрезками, на которые делится гипотенуза этой высотой.



$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

Свойство 1.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $CH \perp AB$

Доказать: $CH = \sqrt{AH \cdot HB}$

Доказательство:

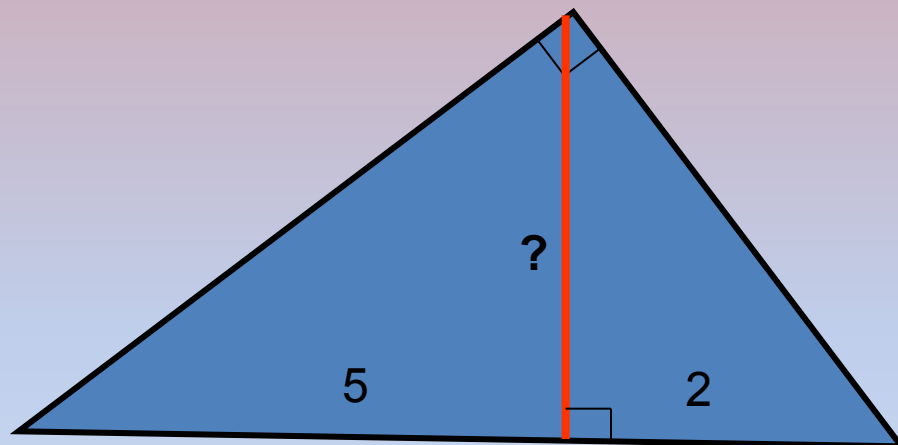
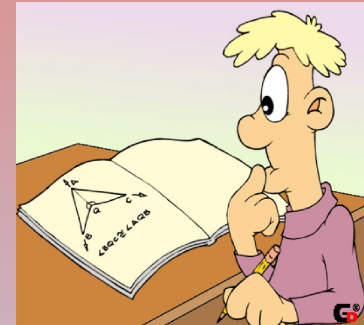
По доказанному $\triangle ACH$ и $\triangle CBH$ подобны, значит, сходственные стороны пропорциональны:

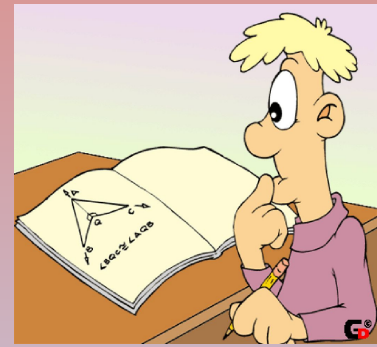
$$\frac{AH}{CH} = \frac{CH}{HB}, \text{ следовательно, } CH^2 = AH \cdot HB, \text{ т. е. } CH = \sqrt{AH \cdot HB}$$



1.

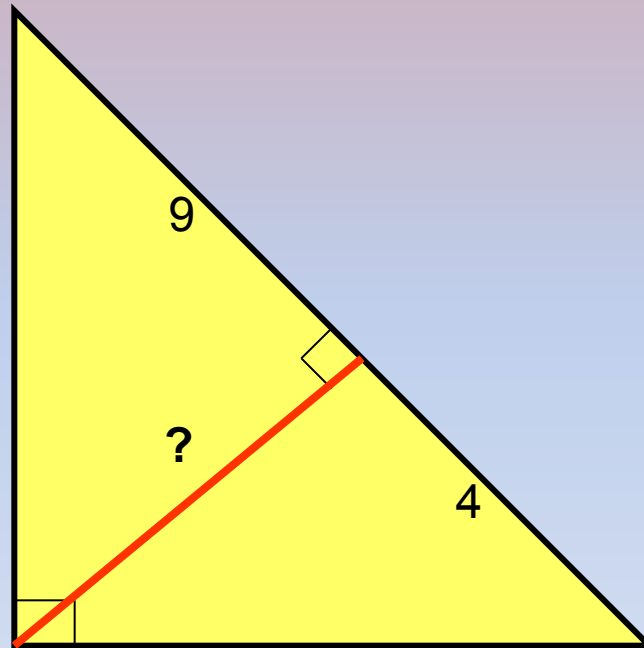
Реши задачу

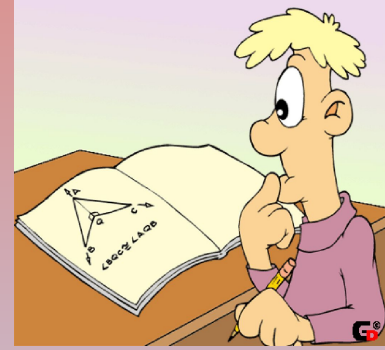




Реши задачу

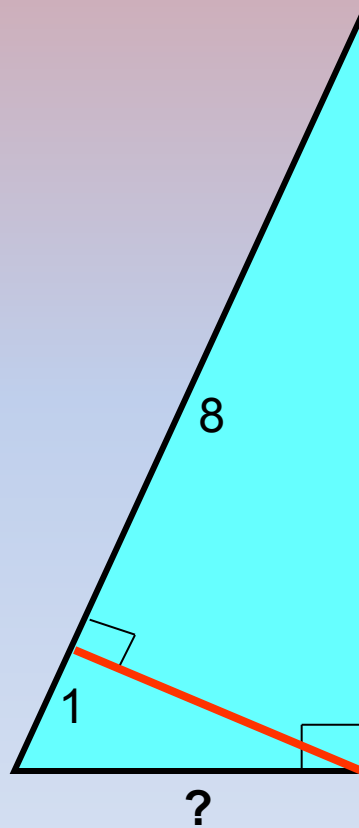
2.





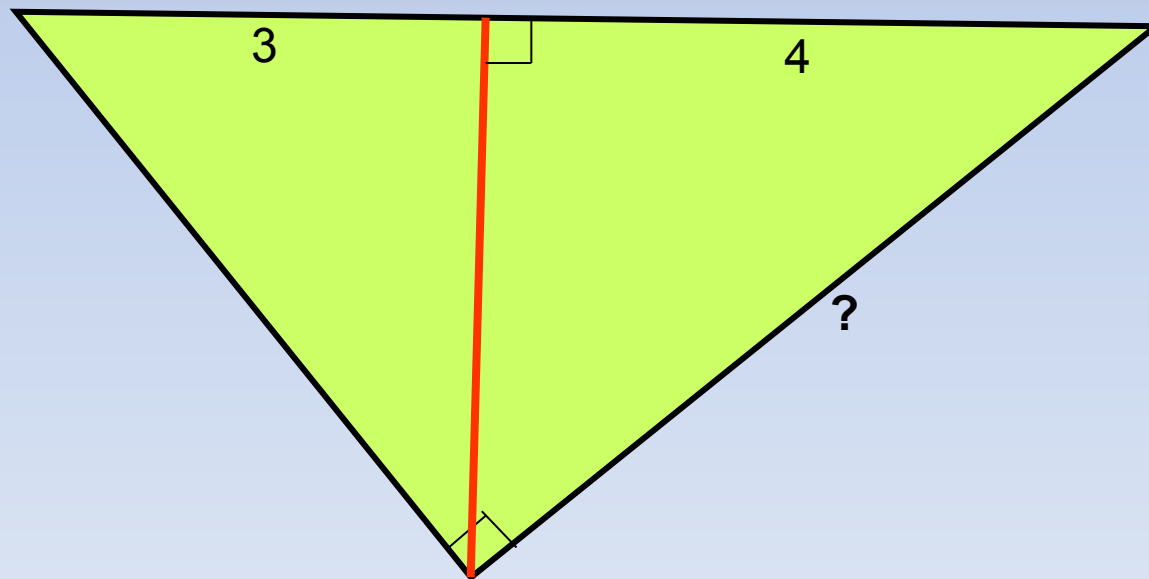
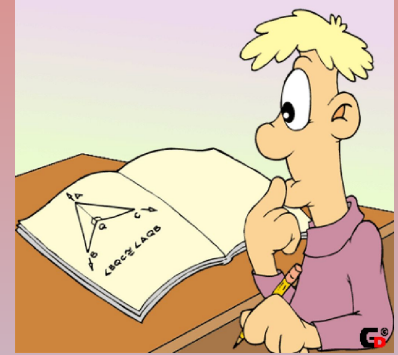
3.

Реши задачу



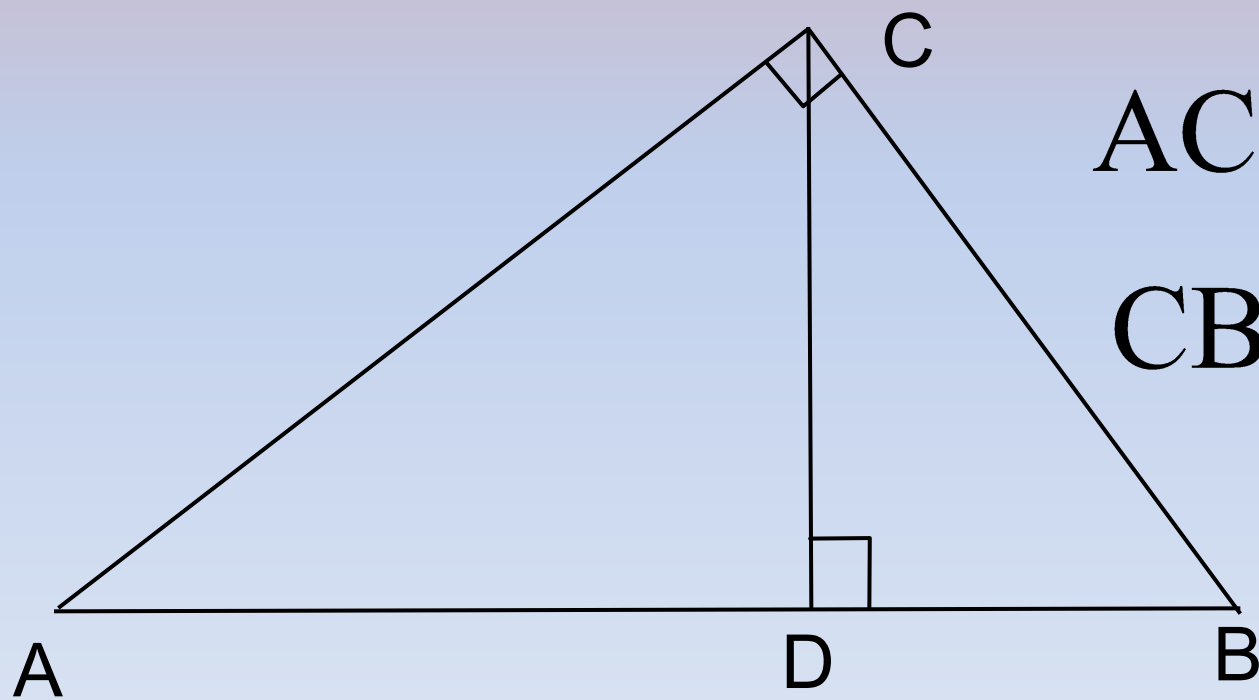
Реши задачу

4.



Утверждение 2

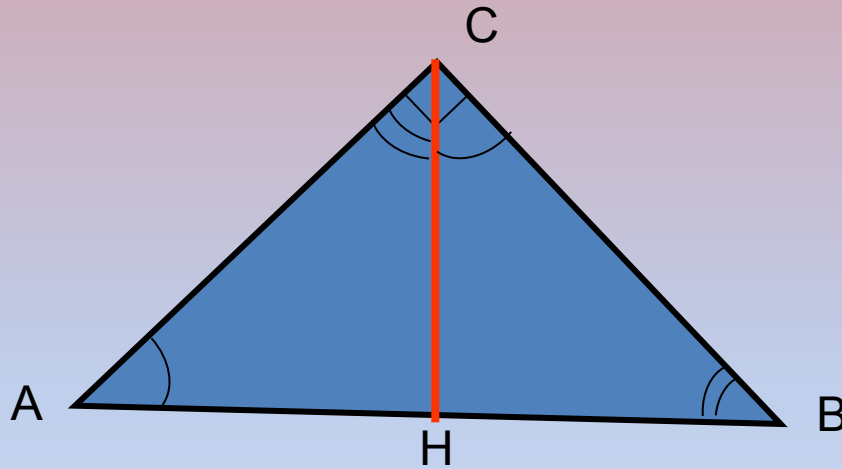
Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и отрезком гипотенузы, заключенным между этим катетом и высотой, проведенной из вершины прямого угла.



$$AC = \sqrt{AB \cdot AD}$$

$$CB = \sqrt{AB \cdot DB}$$

Свойство 2.



Дано: $\triangle ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$,
 $CH \perp AB$

Доказать: $AC = \sqrt{AB \cdot AH}$

$BC = \sqrt{AB \cdot BH}$

Доказательство:

По доказанному $\triangle ACH$ и $\triangle ABC$ подобны, значит, сходственные стороны пропорциональны:

Значит, $AC^2 = AB \cdot AH$, т. е. $AC = \sqrt{AB \cdot AH}$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AH}$$

По доказанному $\triangle BCH$ и $\triangle ABC$ подобны, значит, сходственные стороны пропорциональны:

Значит, $BC^2 = AB \cdot BH$, т. е. $BC = \sqrt{AB \cdot BH}$

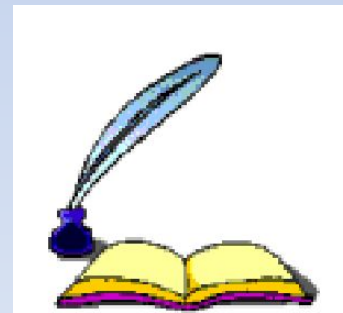
$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{BH}$$

Если в $\triangle ABC$ $\angle C=90^\circ$ и CD – высота, то:

$$CD = \sqrt{AD \cdot DB}$$

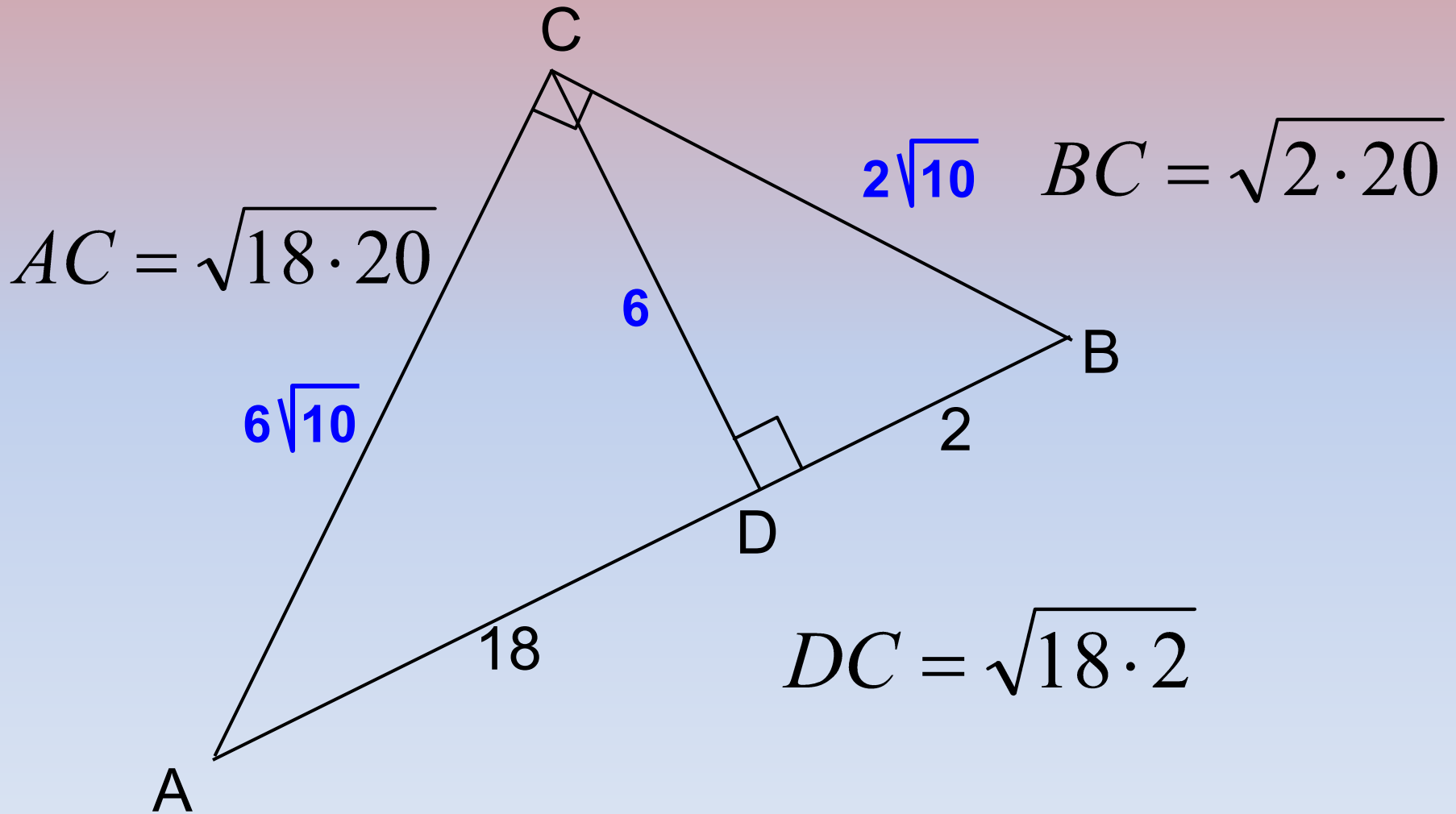
$$AC = \sqrt{AB \cdot AD}$$

$$CB = \sqrt{AB \cdot DB}$$

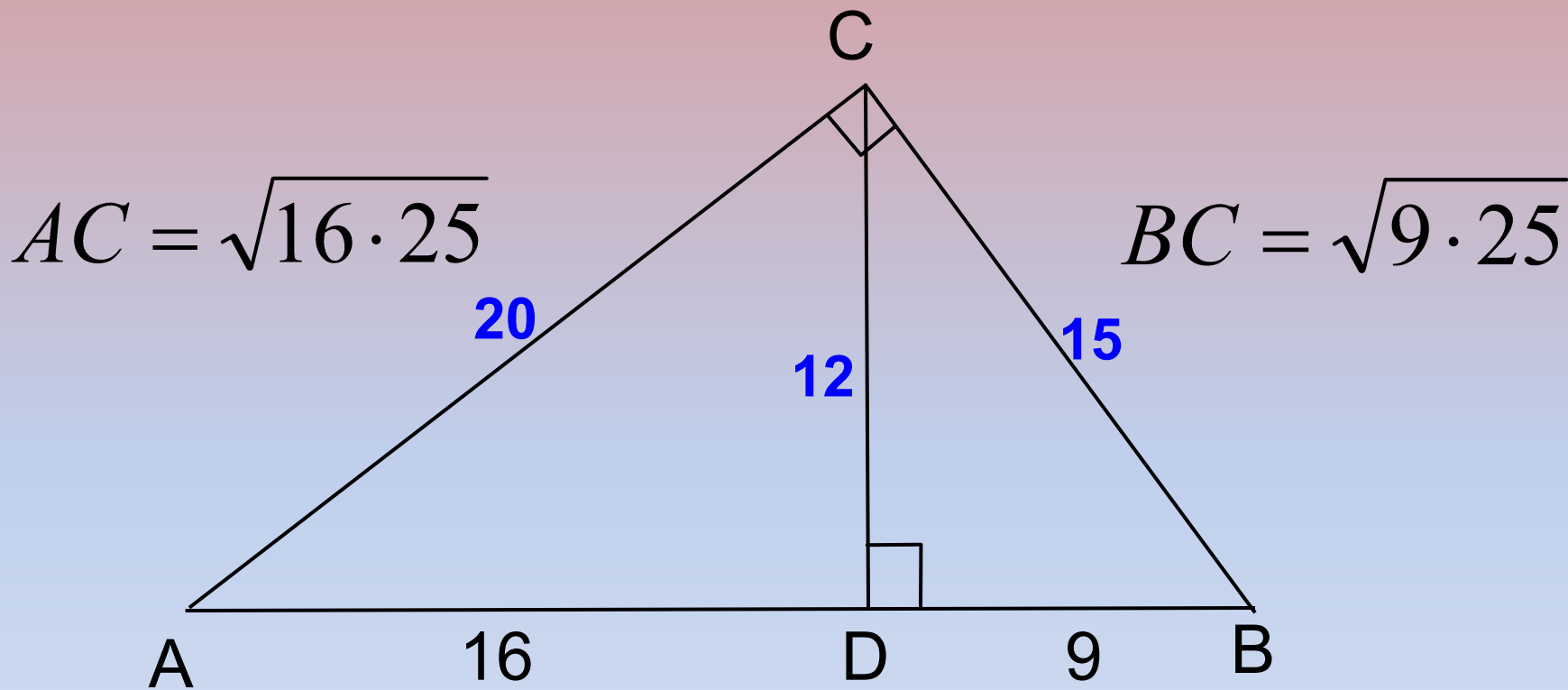


Задача 1.

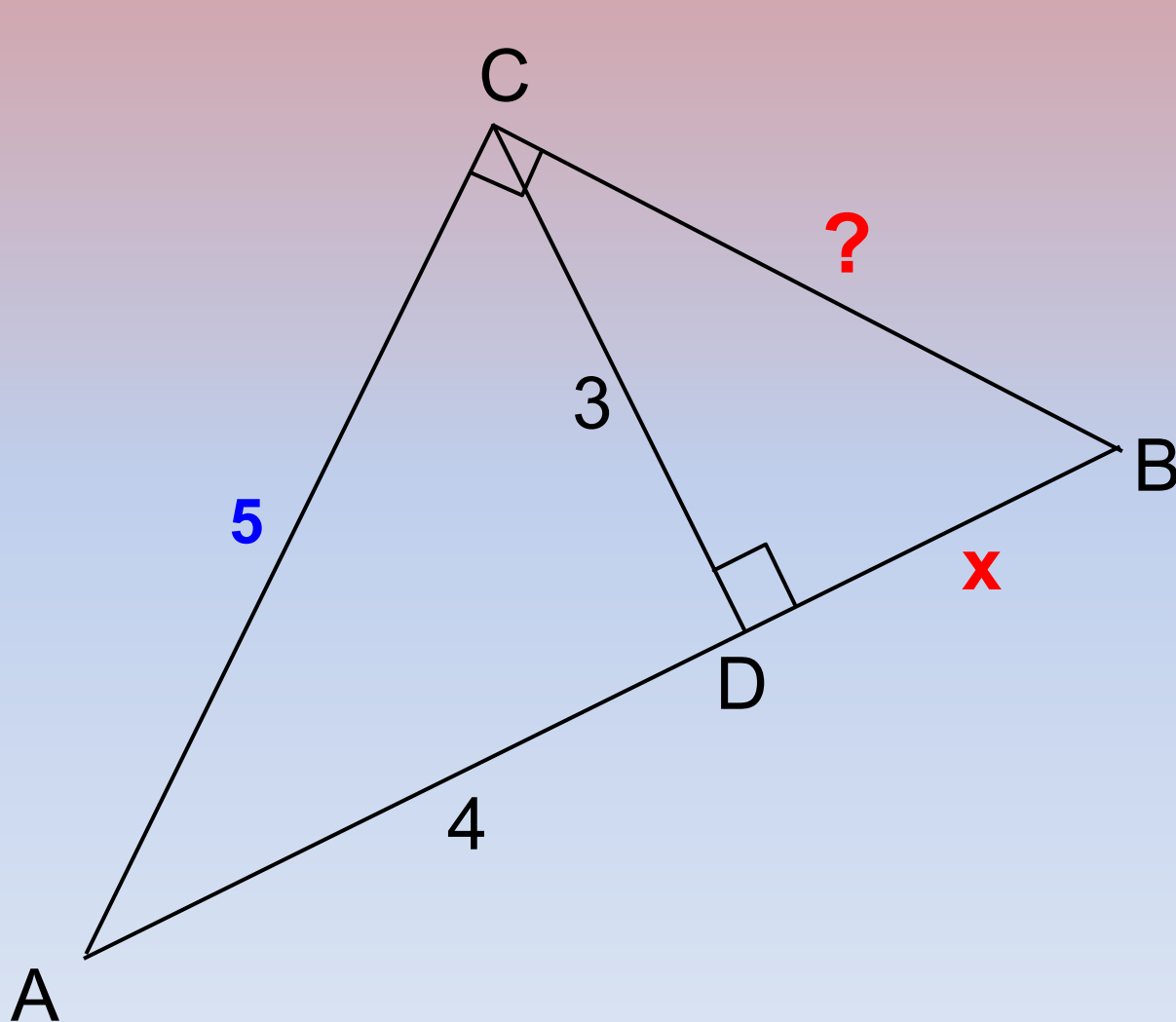
Найдите неизвестные линейные элементы
прямоугольного треугольника ABC.



Задача 2. Найдите неизвестные линейные элементы прямоугольного треугольника ABC.



Задача 3. Найдите неизвестные линейные элементы прямоугольного треугольника ABC.



$$3^2 = (\sqrt{4 \cdot x})^2$$

$$9 = 4x$$

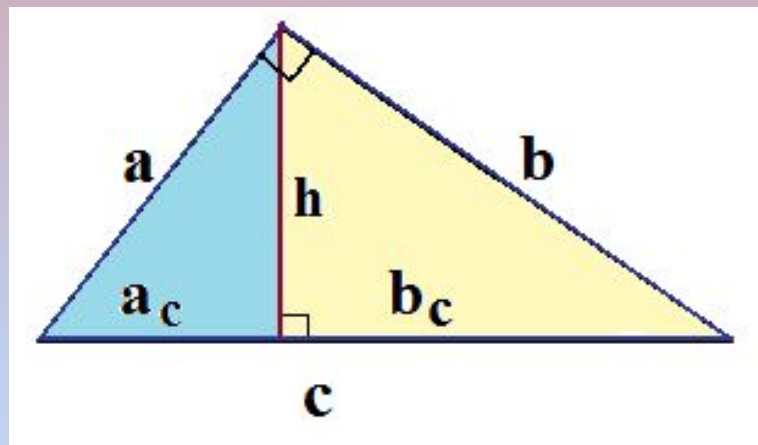
$$x = \frac{9}{4}$$

Вопрос 4:

*Назовите пропорциональные отрезки
в прямоугольном треугольнике*

Проверьте ответ:

*Высота прямоугольного
треугольника, проведенная
из вершины прямого угла,
есть среднее пропорциональное
между проекциями катетов
на гипотенузу.*



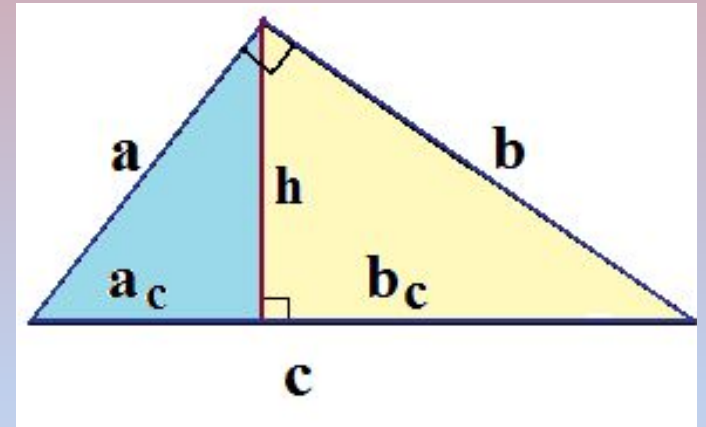
$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

Вопрос 5:

Назовите пропорциональные отрезки
в прямоугольном треугольнике

Проверьте ответ:

Катет прямоугольного треугольника
есть среднее пропорциональное
между гипотенузой и проекцией
этого катета на гипотенузу.

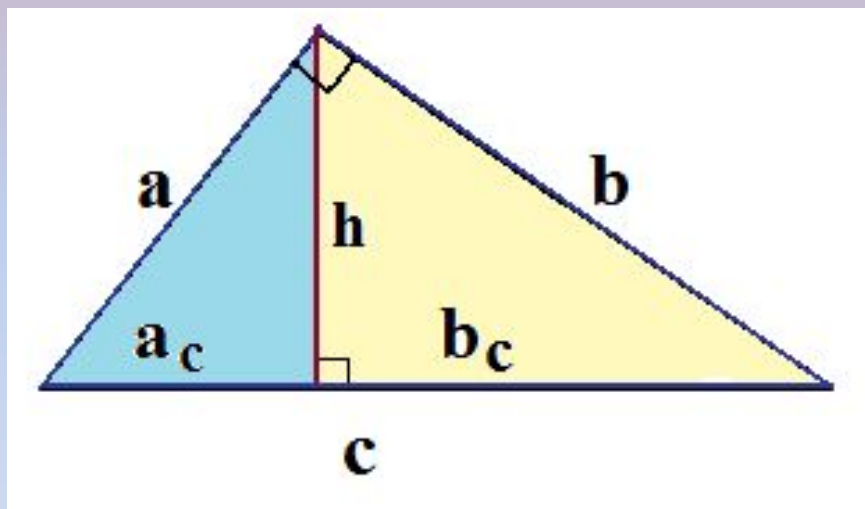


$$a^2 = c \cdot a_c$$

$$b^2 = c \cdot b_c$$

Решите задачи 1-2:

*Найти пропорциональные отрезки
в прямоугольном треугольнике по формулам:*



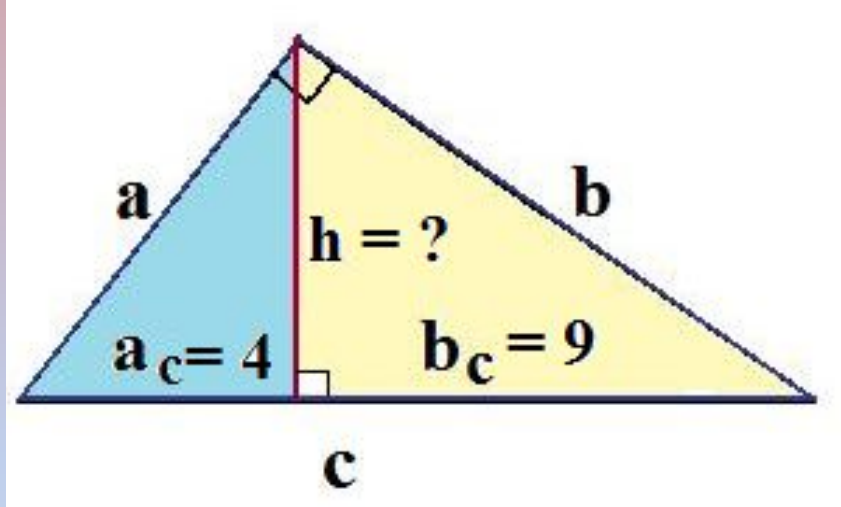
$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

$$a^2 = c \cdot a_c$$

$$b^2 = c \cdot b_c$$

Задача 1:

Найдите высоту в прямоугольном треугольнике



$$a_c = 4$$

$$b_c = 9$$

$$h = ?$$

Решение:

$$h^2 = a_c \cdot b_c$$

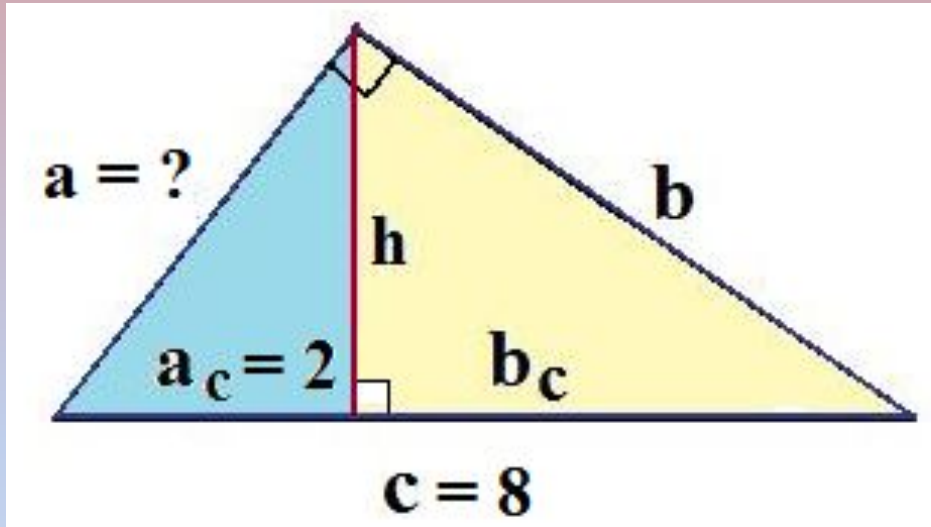
$$h^2 = 4 \cdot 9$$

$$h = 6$$

Ответ: $h = 6$

Задача2:

Найдите катет прямоугольного треугольника



$$a_c = 2$$

$$c = 8$$

$$a = ?$$

Решение:

$$a^2 = c \cdot a_c$$

$$a^2 = 8 \cdot 2$$

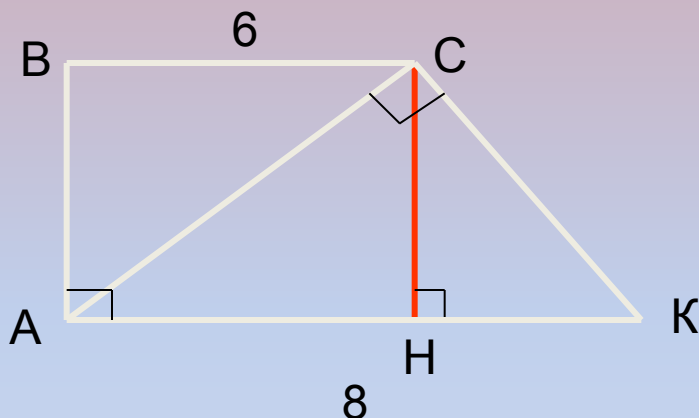
$$a = 4$$

Ответ: $a = 4$

Решение задачи



В трапеции $ABCK$ $AB \perp AK$, $AC \perp CK$, $BC = 6$, $AK = 8$.
Найдите углы трапеции.



Решение:

Проведём $CH \perp AK$,
т. к. $ABCK$ – трапеция и $AB \perp AK$, то
 $ABCH$ – прямоугольник, $AH = BC = 6$,
 $HK = AK - AH = 8 - 6 = 2$.

Т. к. $AC \perp CK$, то $\triangle ACK$ – прямоугольный,

CH – высота, проведённая из вершины прямого угла, значит,

$$CH = \sqrt{AH \cdot HK} = \sqrt{6 \cdot 2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

По теореме Пифагора ($\triangle CHK$) $CK^2 = CH^2 + HK^2$, $CK^2 = 12 + 4 = 16$, $CK = 4$.

(2 способ нахождения CK из $\triangle ACK$: $CK = \sqrt{AK \cdot HK} = \sqrt{8 \cdot 2} = \sqrt{16} = 4$)

В прямоугольном треугольнике CHK $HK = \frac{1}{2} CK$, значит, $\angle KCH = 30^\circ$,
 $\angle K = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

В трапеции $ABCK$ $\angle A = \angle B = 90^\circ$, $\angle K = 60^\circ$, $\angle BCK = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Ответ: 90° ; 90° ; 120° ; 60° .

