Лекция №2

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ.
ПРАВИЛО КРАМЕРА.

Повторение

Матрицей называется **прямоугольная таблица чисел,** состоящая из *m* ***строк и*** *n* ***столбцов:*** $A_{m\times n}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A_{2\times 3} \qquad m = 2; \; n = 3;$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_{3\times 3} \qquad m = 3; \; n = 3;$$

Если **число строк и столбцов одинаковое** $(m = n)$, то такая **матрица** называется **квадратная.**

ВОПРОС: сколько чисел в **квадратной** матрице $A_{3\times 3}$?

ОТВЕТ: $3 + 3 + 3 = \quad \cdot \quad = 3^2 = 9$

Определитель матрицы

Определитель – это ***число***, которое ставят в соответствие каждой **квадратной** матрице и вычисляют из элементов по специальным формулам.

Определитель (детерминант) матрицы $A_{n\times n}$ обозначают:

$$\Delta_n = |A| = detA$$

$$\underbrace{A_{n\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{} \Rightarrow \underbrace{\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}_{\text{одно число}}$$

ОТВЕТ: $n \cdot n = n^2$ чисел

ВОПРОС: сколько чисел в **квадратной** матрице $A_{n\times n}$?

Порядок определителя n – это размерность матрицы $A_{n\times n}$.

Определитель второг о порядка $n = 2$

$$\Delta_2 = |A_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$$

Произведение элементов главной диагонали входит в определитель со своим знаком;

произведение элементов побочной диагонали входит в определитель с противоположным знаком («−»).

Определитель второго порядка – это разность произведений элементов, стоящих на главной диагонали и на побочной диагонали:

ЗАМЕЧАНИЕ: Порядок определителя $n = 2$ показывает, что умножаем по ДВА элемента из разных строк и столбцов.

Примеры вычисления определителей второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 - 4 \cdot (-5) = -2 + 20 = 18;$$

ОТВЕТ

Пример 2.

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = (a+b) \cdot (a+b) - (a-b) \cdot (a-b) =$$

$$= (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) =$$

$$= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2} = 4ab$$

ОТВЕТ

Пример 3.

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \boxed{(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1;}$$

ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО

Определитель третьего порядка $n = 3$

$$\Delta_3 = |A_{3\times3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

Для умножения выбираем по ТРИ элемента

составим ШЕСТЬ наборов по ТРИ элемента

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

В определителе третьего порядка три слагаемых соединяются знаком «+»

и три слагаемых имеют противоположный знак «−».

Для запоминания этой формулы используют

правило ***треугольника***

и правило ***Саррюса***

Правило ***треугольника***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}$$

Знак «+» имеют произведения трех элементов, стоящих: на главной диагонали;

в вершинах двух треугольников, основания которых параллельны главной диагонали:

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Знак «−» имеют произведения трех элементов, стоящих: на побочной диагонали;

в вершинах двух треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

Правило **Саррюса**

Припишем справа к определителю первый и второй столбец.

Знак “+” имеют произведения трех элементов, стоящих:

- на главной диагонали;
- и параллельно главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}$$

Знак “–” имеют произведения трех элементов, стоящих:

- на побочной диагонали;
- и параллельно побочной диагонали:

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$

$$\left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

Примеры вычисления определителей третьего порядка

Пример 4.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \boxed{2\cdot(-5)\cdot 1} + 1\cdot(-1)\cdot 1 + (-4)\cdot 3\cdot 1$$

$$\boxed{-1\cdot(-5)\cdot 1} - 2\cdot 3\cdot(-1) - (-4)\cdot 1\cdot 1 =$$

$$= -10 - 1 - 12 + 5 + 6 + 4 =$$ Знак «+» имеют произведения трех элементов, стоящих: $-8;$ ОТВЕТ

Пример 5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 3 & -4 \\ -1 & -5 \\ 1 & -1 \end{matrix}$$

$+ a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}$ Знак «−» имеют произведения трех элементов, стоящих:

Знак “−” имеют произведения трех элементов, стоящих:
- на побочной диагонали;
- и параллельно побочной диагонали:

Знак “+” имеют произведения трех элементов, стоящих:
- на главной диагонали;
- и параллельно главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}$$

$$- a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} \quad - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}$$ ОТВЕТ

ДОМА вычислить каждый определитель вторым способом.

Решение систем уравнений с помощью определителей(правило ***Крамера***)

Пусть задана система из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \boldsymbol{a_{11}x + a_{12}y = b_1} \\ a_{21}x + a_{22}y = \boldsymbol{b_2} \end{cases}$$

Составим из коэффициентов при x и y матрицу

и назовём ее $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ матрица системы

Назовём $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} \quad & \quad \end{vmatrix}$ определитель системы

Назовём $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ столбец правых частей.

Назовём $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$ столбец неизвестных.

Тогда система уравнений в матричной форме будет выглядеть:

$$A \cdot X = B$$

(Проверить дома!)

$$+\ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \ +\ a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$$

a_{11} a_{12} a_{21} a_{22} b_1 b_2

Составим новый определитель:

$$\Delta_x = \left|\qquad\right|$$

Столбец правых частей поставили вместо первого столбца определителя системы Δ

Составим еще один определитель:

$$\Delta_y = \left|\qquad\right|$$

Столбец правых частей поставили вместо второго столбца определителя системы Δ.

- Если $\Delta \neq 0$, то решение системы находим по формулам ***Крамера***:

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}\ , \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}\ .}$$

- Если $\Delta = 0, \Delta_x = 0$ и $\Delta_y = 0$, то система **имеет множество решений**.
- Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$,

то система **не имеет**

Примеры решения системы из двух уравнений

Пример 6. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} \mathbf{1}\cdot x - \mathbf{1}\cdot y = \mathbf{1} \\ \mathbf{1}\cdot x + \mathbf{2}\cdot y = \mathbf{3} \end{cases}$

РЕШЕНИЕ: Составим матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$;

Вычислим определители: $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - (-1)\cdot 1 = 2 + 1 = \mathbf{3}$;

$\Delta_x = \left| \qquad \right| = 1\cdot 2 - (-1)\cdot 3 = 2 + 3 = \mathbf{5}$;

$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} \left| \qquad \right| = 1\cdot 3 - 1\cdot 1 = 3 - 1 = \mathbf{2}$;

Так как $\Delta = 3 \neq 0$, то система имеет решение. По формулам ***Крамера*** находим:

$\boxed{+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13} \ \frac{\Delta_x}{\Delta}} = \text{—};$ $\qquad \boxed{-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} \ \frac{\Delta_y}{\Delta}} = \text{—};$

ОТВЕТ: $x = \frac{5}{3}, y = \frac{2}{3}$; или $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$ Как проверить ответ?

Решение системы из трёх уравнений

Формулы ***Крамера*** можно использовать и для систем из трёх уравнений с тремя неизвестными x, y, z:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Определитель системы $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$; столбец правых частей $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$;

- Поставим столбец правых частей вместо первого столбца определителя системы.
  Получится: $\Delta_x = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$;
- Поставим столбец правых частей вместо второго столбца определителя системы.
  Получится: $\Delta_y = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$;
- Поставим столбец правых частей вместо третьего столбца определителя системы.
  Получится: $\Delta_z = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$;

Возможны ТРИ случая:

- Если $\Delta \neq 0$, то решение системы находим по формулам ***Крамера***:

$$\boxed{x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta};}$$

- Если $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0$ и $\Delta_z = 0$, то система **имеет множество решений**.

- Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей $\Delta_x \neq 0$, или $\Delta_y \neq 0$, или $\Delta_z \neq 0$,

  то система **не имеет решений**.

Домашнее задание: при составлении конспекта

1) Проверить
:

система уравнений может быть записана в матричной форме $A \cdot X = B;$

то есть если выполнить умножение матриц и правило равенства двух матриц, из

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

получим

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

2) вычислить определители из примера 4. по правилу Саррюса и из примера 5. по правилу треугольника.

3) Пример 6. $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ ОТВЕТ: $x = \frac{5}{3}, y = \frac{2}{3};$ Как проверить ответ?