

Лекция №2

# **ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ МАТРИЦЫ. ПРАВИЛО КРАМЕРА.**

# Повторение

**Матрицей**  
называется

прямоугольная таблица чисел,  
состоящая из  $m$  **строк** и  $n$  **столбцов**:  $A_{m \times n}$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -2 \end{pmatrix} = A_{2 \times 3} \quad m = 2; \quad n = 3;$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A_{3 \times 3} \quad m = 3; \quad n = 3;$$

Если **число строк и столбцов одинаковое** ( $m = n$ ),  
то такая **матрица** называется **квадратна**

**Я.**  
**ВОПРОС:** сколько чисел в **квадратной** матрице  $A_{3 \times 3}$  ?

**ОТВЕТ:**  $3 + 3 + 3 = \cdot = 3^2 = 9$

# Определитель матрицы

Определитель – это **число**, которое ставят в соответствие каждой **квадратной** матрице и вычисляют из элементов

по специальным формулам.  
Определитель (детерминант) матрицы  $A_{n \times n}$  обозначают:

$$\Delta_n = |A| = \det A$$

$$A_{n \times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ОТВЕТ:  $n \cdot n = n^2$  чисел

ВОПРОС: сколько чисел в **квадратной** матрице  $A_{n \times n}$  ?

ОДНО  
ЧИСЛО

Порядок определителя  $n$  – это размерность матрицы  $A_{n \times n}$ .

# Определитель второг порядка $n = 2$

$$\Delta_2 = |A_{2 \times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Произведение элементов главной диагонали входит в определитель

произведение элементов побочной диагонали **со своим знаком**; входит в определитель с противоположным знаком («-»).

Определитель второго порядка – это разность произведений элементов, стоящих на главной диагонали и на побочной диагонали:

**ЗАМЕЧАНИЕ** Порядок определителя  $n = 2$  показывает, что умножаем по ДВА элемента из разных строк и столбцов.

# Примеры вычисления определителей второго порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Пример 1.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -1 \cdot 2 - 4 \cdot (-5) = -2 + 20 = 18; \quad \text{ОТВЕТ}$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} &= (a+b) \cdot (a+b) - (a-b) \cdot (a-b) = \\ &= (a+b)^2 - (a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 - (a^2 - 2ab + b^2) = \\ &= \cancel{a^2} + 2ab + \cancel{b^2} - \cancel{a^2} + 2ab - \cancel{b^2} = 4ab \quad \text{ОТВЕТ} \end{aligned}$$

Пример 3.

$$\begin{vmatrix} \sin x & \cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1;$$

ОСНОВНОЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЕ  
ТОЖДЕСТВО

# Определитель третьего порядка $n = 3$

$$\Delta_3 = |A_{3 \times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

Для умножения  
выбираем  
по ТРИ элемента

составим ШЕСТЬ  
наборов  
по ТРИ элемента

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$$

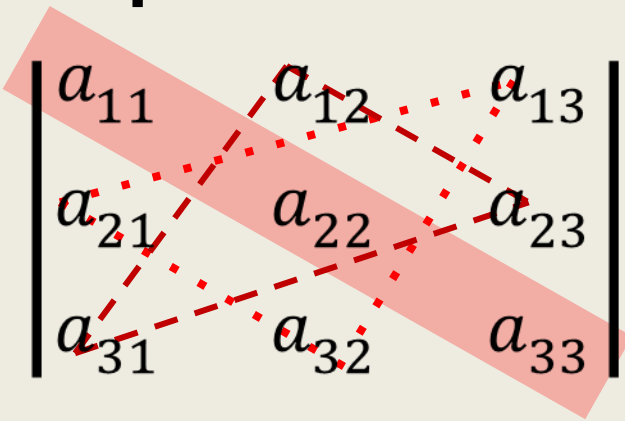
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

В определителе третьего порядка три слагаемых соединяются **знаком «+»**  
и три слагаемых имеют **противоположный знак «-»**.

Для запоминания этой формулы  
используют

правило  
**треугольника**  
и правило  
**Sarrus**

# Правило *треугольника*



$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33}$$

$$+ a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$$

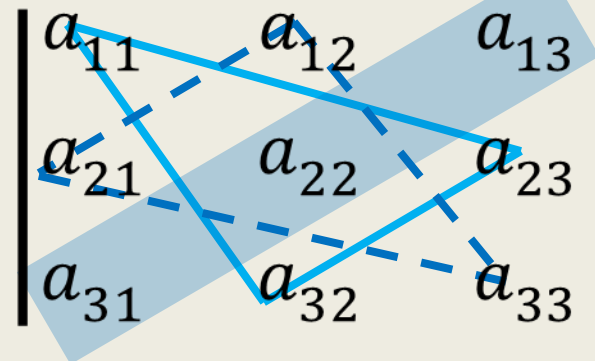
$$+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31}$$

Знак «+» имеют произведения трех элементов, стоящих: на **главной диагонали**; в вершинах двух треугольников, основания которых **параллельны главной диагонали**:

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$$

$$- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

$$- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$



Знак «-» имеют произведения трех элементов, стоящих: на **побочной диагонали**; в вершинах двух треугольников, основания которых **параллельны побочной диагонали**.

# Правило Саррюса

Припишем справа к определителю первый и второй

Знак “+” имеют произведения трех элементов, стоящих:

- на **главной диагонали**;
- и **параллельно главной диагонали**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \\ &+ a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} \\ &+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \end{aligned}$$

Знак “-” имеют произведения трех элементов, стоящих:

- на **побочной диагонали**;
- и **параллельно побочной диагонали**:

$$\begin{aligned} &- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\ &- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} \\ &- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \end{aligned}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$



# Примеры вычисления определителей третьего порядка

Пример

4.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + (-4) \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot (-5) \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot (-1) - (-4) \cdot 1 \cdot 1 =$$

$$= -10 - 1 - 12 + 5 + 6 + 4 = \text{Знак «+» имеют произведения трех элементов, стоящих: } -8; \text{ ОТВ ЕТ}$$

Пример

5.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Знак «-» имеют произведения трех элементов, стоящих:  $+ a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$   
 Знак «+» имеют произведения трех элементов, стоящих:  $- a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$   
 Знак «-» имеют произведения трех элементов, стоящих:  $- a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$   
 Знак «+» имеют произведения трех элементов, стоящих:  $- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31}$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} \text{ ОТВ ЕТ}$$

ДОМА вычислить каждый определитель вторым способом.

# Решение систем уравнений с помощью определителей (правило Крамера)

Пусть задана система из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

Составим из коэффициентов при  $x$  и  $y$  матрицу

и назовём  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  матрица  
ее системы

Назовём  $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} \phantom{a_{11}} & \phantom{a_{12}} \\ \phantom{a_{21}} & \phantom{a_{22}} \end{vmatrix}$  определитель  
системы

Назовём  $B = \begin{pmatrix} \phantom{b_1} \\ \phantom{b_2} \end{pmatrix}$  столбец правых  
частей.

Назовём  $X = \begin{pmatrix} \phantom{x} \\ \phantom{y} \end{pmatrix}$  столбец  
неизвестных.

Тогда система уравнений в матричной форме будет  
выглядеть:

$$A \cdot X = B \quad (\text{Проверить дома!})$$

$$+ \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} a_{23} \cdot a_{31} + \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13}$$

Составим новый  
определитель:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

Столбец правых частей  
поставили вместо первого столбца  
определителя системы  $\Delta$

Составим еще один  
определитель:

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{vmatrix}$$

Столбец правых частей  
поставили вместо второго столбца  
определителя системы  $\Delta$ .

- Если  $\Delta \neq 0$ , то решение системы находим по формулам **Крамера**:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}.$$

- Если  $\Delta = 0$ ,  $\Delta_x = 0$  и  $\Delta_y = 0$ , то система **имеет множество решений**.
- Если  $\Delta = 0$ , а хотя бы один из определителей  $\Delta_x \neq 0$  или  $\Delta_y \neq 0$ , то система **не имеет**



# Решение системы из трёх уравнений

Формулы **Крамера** можно использовать и для систем из трёх уравнений с тремя неизвестными  $x, y, z$ :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}$$

Определитель системы  $\Delta = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ; столбец правых частей  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ;

- Поставим столбец правых частей вместо первого столбца определителя системы.

Получится:  $\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ ;

- Поставим столбец правых частей вместо второго столбца определителя системы.

Получится:  $\Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$ ;

- Поставим столбец правых частей вместо третьего столбца определителя системы.

Получится:  $\Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$ ;

# Возможны ТРИ случая:

- Если  $\Delta \neq 0$ , то решение системы находим по формулам

**Крамера:**

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta};$$

- Если  $\Delta = 0, \Delta_x = 0, \Delta_y = 0$  и  $\Delta_z = 0$ , то система **имеет множество решений**.

- Если  $\Delta = 0$ , а хотя бы один из определителей  $\Delta_x \neq 0$ , или  $\Delta_y \neq 0$ , или  $\Delta_z \neq 0$ ,

то система **не имеет решений**.

# Домашнее задание: при составлении конспекта

## 1) Проверить

система уравнений может быть записана в матричной форме  $A \cdot X = B$ ;

то есть если выполнить умножение матриц и правило равенства двух матриц, из

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \text{ получи}$$
$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2 \end{cases}$$

## 2) вычислить определители из примера 4. по правилу Саррюса и из примера 5. по правилу треугольника.

3) Пример 6.  $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$  ОТВЕ  $x = \frac{5}{3}, y = \frac{2}{3}$ ; Как проверить  
Т: ответ?