

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определение

Матрицей порядка $(m \times n)$ называется таблица элементов, состоящая из m – строк и n - столбцов.

Обозначаются матрицы заглавными латинскими буквами: A, B, C, D, \dots

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mn} \end{pmatrix}$$

Значения m и n называются ее *размерностью*.

Виды матриц:

- ⊙ Матрица называется ***квадратной***, если количество столбцов равно количеству строк, т.е. $m = n$.
Элементы $a_{11}, a_{22} \dots a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы.
- ⊙ Квадратная матрица называется ***диагональной***, если все ее элементы, не стоящие на главной диагонали, равны нулю.
- ⊙ Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все ее элементы, стоящие над или под диагональю, равны нулю.
- ⊙ Диагональная матрица называется ***единичной***, если все ее элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1.

- Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю.
- Матрица называется *транспонированной* к *данной*, если элементы строк и столбцов исходной матрицы поменять местами.

Например:

исходная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

транспонированная

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами.

1) Матрицы *с одинаковой размерностью* можно *складывать* путем алгебраического сложения соответствующих элементов матриц *A* и *B*, т.е.

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \text{ где } i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$$

2) *Любую матрицу* можно *умножить на число*, для этого достаточно каждый элемент матрицы умножить на это число.

3) Две матрицы можно *перемножать*, если *количество столбцов одной матрицы равно количеству строк другой матрицы*.

Если матрица A имеет размерность $(m \times n)$, а матрица B имеет размерность $(n \times k)$, то размерность матрицы произведения $C = AB$, равна $(m \times k)$, а элементы вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

где $i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,k$.

Примеры:

$$1) \begin{pmatrix} 3 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & 6 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -5 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -11 \\ 0 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2) 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & -5 \\ 0 & -5 & 15 \\ 5 & -15 & 5 \end{pmatrix}$$

Примеры:

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Вычислить произведение матриц

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+25 & 1-15-5 & -3-6+0 \\ 0+0+15 & 0+10-3 & 0+4+0 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 26 & -19 & -9 \\ 15 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Для каждой *квадратной матрицы* можно вычислить *определитель*.

Определитель – это **число**.

Обозначается определитель греческой буквой Δ или \det

Пусть дана *квадратная матрица 2-ого порядка*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

тогда ее определитель равен

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определитель *квадратной матрицы 3-ого*
порядка равен

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{13}a_{32} -$$

$$(a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32})$$

Схематично можно представить в виде:

The diagram illustrates the expansion of a 3x3 determinant. On the left, a 3x3 grid of asterisks (*) is enclosed in vertical bars. This is followed by an equals sign. To the right of the equals sign are two 3x3 grids of asterisks, each enclosed in vertical bars and separated by a minus sign. Red lines are drawn across the grids to show the paths of the terms. The first grid has three red lines forming a downward-sloping staircase from top-left to bottom-right. The second grid has three red lines forming an upward-sloping staircase from top-left to bottom-right. This visualizes the formula: the determinant is the sum of the products of elements along the downward-sloping diagonal minus the sum of the products of elements along the upward-sloping diagonal.

Пример.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - 6 \cdot 2 = 3$$

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 \cdot 2 + 5 \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 \cdot (-2) - \\ &\quad - (1 \cdot 7 \cdot (-2) + 0 \cdot 5 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-1)) = \\ &= 14 - 5 + 0 - (-14 + 0 - 3) = 26 \end{aligned}$$

Свойства определителей.

1. Определитель *не* меняется при транспонировании.
2. Если две строки или два столбца определителя поменять местами, то определитель *меняет знак*.
3. Общий множитель строки или столбца можно выносить за знак определителя.
4. Если элементы какой-либо строки (или столбца) равны элементам другой строки (или столбца), то данный определитель *равен нулю*.

5. Если элементы какой-либо строки (или столбца) пропорциональны элементам другой строки (или столбца), то данный определитель *равен нулю*.

6. Если элементы какой-либо строки (или столбца) определителя равны нулю, то данный определитель *равен нулю*.

Минором элемента a_{ij} матрицы A называется определитель, полученный вычеркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Обозначается минор M_{ij}

Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

минор элемента a_{33} будет иметь вид

$$M_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента матрицы a_{ij} называется значение минора этого элемента, взятого с тем же знаком, если $i+j$ четное и с противоположным знаком, если $i+j$ нечетное, т.о.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

7) *Определитель равен* сумме произведений элементов какой-либо строки (или какого-либо столбца) на их алгебраические дополнения.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

Такой способ вычисления определителя называется *разложением по строке* (или по столбцу).

Этот способ является универсальным в том смысле, что вычислять можно определители любого порядка.

Пример.

$$\begin{aligned}\Delta &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & -2 \\ 0 & 7 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 17 - 5 + 14 = 26\end{aligned}$$

МАТРИЦА, ОБРАТНАЯ К ДАННОЙ

Матрица называется *невырожденной*,
если ее определитель *не равен нулю*.

Матрица A^{-1} называется, обратной к
данной матрице

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

если она удовлетворяет условию:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

где E – единичная матрица.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Можно доказать, что любая
невырожденная матрица имеет
обратную.

Нахождение обратной матрицы с помощью союзной

Дана невырожденная матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Составим матрицу *из алгебраических дополнений* элементов матрицы A и *транспонируем* ее.

В результате получим матрицу, которая называется *союзной*:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Тогда обратная матрица вычисляется по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$.

Пример

Найти матрицу, обратную данной

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

1) Вычислим определитель матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 + 2 + 0 - (1 + 0 + 0) = -2 \neq 0$$

значит, матрица A - невырожденная и имеет обратную матрицу.

Вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -3$$

тогда союзная матрица имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Вычислим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -6 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1 & -2 & 3 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \end{pmatrix}$$

Выполним проверку, согласно определению:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ -1 & -2 & 3 \\ -0,5 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Условие выполнено, значит, матрица найдена верно.

Ответ: обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & -0,5 \\ -1 & -2 & 3 \\ -0,5 & -0,5 & 1,5 \end{pmatrix}$$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Системой n линейных уравнений с n

неизвестными называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица коэффициентов
при неизвестных,

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ - неизвестные переменные системы,

$B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ - свободные коэффициенты.

Решить систему линейных уравнений (СЛУ),
значит, найти такие значения (x_1, x_2, \dots, x_n)
которые при подстановке в уравнения системы
дают верное равенство.

Система называется *совместной*, если она имеет
хотя бы одно решение, и *несовместной*, если
она не имеет решений.

Совместная система уравнений называется
определенной, если она имеет единственное
решение, и *неопределенной*, если она имеет
более одного решения.

Таким образом, система может иметь *единственное решение, множество решений или не иметь решения.*

Матрица A называется *невыврожденной*, если ее определитель не равен нулю.

Если матрица коэффициентов при неизвестных является невырожденной, то СЛУ имеет единственное решение.

В противном случае СЛУ может иметь множество решений (является неопределенной) или не иметь решения (является несовместной).

Если свободные коэффициенты СЛУ равны нулю, то СЛУ называется *однородной* (ОСЛУ).

Если матрица коэффициентов при неизвестных ОСЛУ является *вырожденной*, то система имеет *множество решений*.

Если матрица коэффициентов при неизвестных является *невырожденной*, то ОСЛУ имеет *единственное нулевое решение*.

Решение СЛУ методом Крамера.

Дана СЛУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

Пусть определитель матрицы коэффициентов при неизвестных не равен нулю:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

т.е. матрица A – невырожденная.

Значит, система имеет единственное решение.

Вычислим определители $\Delta_{x_1}, \Delta_{x_2}, \Delta_{x_3}$:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

Тогда решение системы линейных уравнений будет единственным и вычисляется по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

Пример

Решить СЛУ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Вычислим определитель коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 8 - 3 - (2 + 30 + 2) = -34 \neq 0$$

Вычислим определители

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -25 + 16 - 1 - (4 + 10 + 10) = -10 - 24 = -34$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 20 - 12 - (-2 + 75 + 8) = 13 - 81 = -68;$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 4 + 15 - (-10 + 24 + 1) = 0$$

Тогда решение СЛУ имеет вид

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-34}{-34} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-68}{-34} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{0}{-34} = 0$$

При подстановке полученных значений в заданную систему получаем верное

ТОЖДЕСТВО:

$$\begin{cases} 1 + 2 \cdot 2 - 0 = 5 \\ 3 \cdot 1 - 2 + 2 \cdot 0 = 1 \\ 2 \cdot 1 + 2 + 5 \cdot 0 = 4 \end{cases}$$

Значит, решение найдено верно.

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 0.$

Решение СЛУ с помощью обратной матрицы

СЛУ можно представить в матричной форме

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = B$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{ невырожденная}$$

матрица коэффициентов при
неизвестных X ;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \text{ столбец неизвестных искомым}$$

переменных;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \text{ столбец свободных}$$

коэффициентов.

По условию, матрица A - невырожденная, то обратная к ней существует и решение СЛУ будет *единственным*.

Тогда из матричного уравнения

$$A \cdot X = B \text{ следует, что } A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \text{ или}$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B \text{ или } X = A^{-1} \cdot B$$

Итак, чтобы найти решение СЛУ, необходимо найти обратную матрицу, а затем умножить ее на столбец свободных коэффициентов.

Пример 1.

Решить СЛУ

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4 \end{cases}$$

Решение:

Вычислим определитель коэффициентов
при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -5 + 8 - 3 - (2 + 30 + 2) = -34 \neq 0$$

Найдем решение системы с помощью
обратной матрицы)

Исходная матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Найдем обратную матрицу к данной с
помощью *союзной* матрицы.

Найдем алгебраические дополнения
элементов матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -11$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 7$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7$$

Союзная матрица имеет вид

$$A^* = \begin{pmatrix} -7 & -11 & 3 \\ -11 & 7 & -5 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{-34} \begin{pmatrix} -7 & -11 & 3 \\ -11 & 7 & -5 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

Находим решение заданной системы линейных уравнений

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{-34} \begin{pmatrix} -7 & -11 & 3 \\ -11 & 7 & -5 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ответ: $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 0.$