Нехаев И.Н., доцент Поволжского государственного технологического университета
Колчев А.А., доцент Казанского Федерального Университета

**Курс Волгатеха (ПГТУ) «Линейная алгебра и геометрия»
для направления «Программная инженерия»**

ТЕМА

Введение в общую алгебру

Поволжский РЦКО

Ключевые вопросы лекции

- Что такое множество и какие существуют операции над множествами?
- Какие бывают отношения и какими свойствами они обладают?
- Что такое алгебраическая структура(АС) с одной или с двумя операциями?
- Чем различаются группоид, моноид, группа, кольцо и поле?
- Как определить тип АС по описанию?

План уроков темы

- Описание множеств. Операции над множествами.
- Отношения. Свойства отношений.
- Функция. Отображение. Операции.
- Алгебраические системы и их изоморфизм.
- Группы, кольца, поля. Примеры

Множества

- **Множество** – совокупность любых объектов, называемых элементами множества.
- **Примеры множеств**: множество жителей данного города, множество целых чисел, множество студентов данной группы и т. д.

- Важные обозначения:

- $x \in A$ – x принадлежит A

- $x \notin A$ – x не принадлежит A

- $\varnothing$ – *пустое множество*

Способы задания множеств

1) Перечислением всех элементов

- A = {Петр, Сергей, Юлия, Ольга}
- B={1,3,5,7,9}

Способы задания множеств

1) *Перечислением всех элементов*

- A = {Петр, Сергей, Юлия, Ольга}
- B={1,3,5,7,9}

2) *Характеристическим предикатом,* который описывает свойство всех элементов, входящих в множество.

- $\{x|P(x)\}$ (или $\{x:\ P(x)\}$) - множество всех элементов x, для которых высказывание *P*(x) истинно".

Способы задания множеств

1) Перечислением всех элементов

- A = {Петр, Сергей, Юлия, Ольга}
- B={1,3,5,7,9}

2) Характеристическим предикатом, который описывает свойство всех элементов, входящих в множество.

- $\{x|P(x)\}$ (или $\{x:\ P(x)\}$) - множество всех элементов x, для которых высказывание $P(x)$ истинно".

- $A=\{x:\ \ x^2+3x-2=0,\ \ x\in R\}$ - множество корней уравнения;
- $A=\{x:\ \ x\le 10,\ \ x\in N\}$ множество натуральных чисел от 1 до 10.

Сравнение множеств

- Множество **A** называется ***подмножеством*** множества **B**, если все элементы **A** содержатся в **B**.

$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A \Rightarrow a \in B$$

- Два множества называются ***равными***, если они содержат одинаковые наборы элементов.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A$$

.

Сравнение множеств

- Множество **A** называется ***подмножеством*** множества **B**, если все элементы **A** содержатся в **B**.

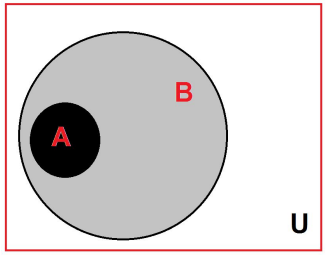
$$A \subset B \Leftrightarrow \forall a \in A \Rightarrow a \in B$$

- Два множества называются ***равными***, если они содержат одинаковые наборы элементов.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ и } B \subset A$$

- **Универсальное** множество (универсум) ***U***

  — множество, включающее все элементы и все множества, участвующие в рассматриваемой задаче.



- **Булеан** множества ***U*** – это множество всех подмножеств ***U*** (2^U)
- **Пустое** множество **Ø** является подмножеством всех множеств.
- Любое множество является подмножеством Универсального множества ***U***:

$$A \subset U \Leftrightarrow A \in 2^U$$

Алгебра множеств

- **Алгебра множеств** в теории множеств — это непустая система подмножеств, замкнутая относительно операций дополнения (разности) и объединения (суммы).

Семейство S подмножеств множества U ($S \subset 2^U$) называется алгеброй, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\emptyset \in S$
2. Если $A \in S$, то и его дополнение $U \backslash A \in S$
3. Если $A, B \in S$, то и объединение $A \cup B \in S$

(Статья из википедии:)

Операции над множествами

Основные операции, определяемые над множествами:

- **Пересечение** : $A \cap B := \{ x : x \in A \text{ и } x \in B \}$
- **Объединение**: $A \cup B := \{ x : x \in A \text{ или } x \in B \}$.

Если множества A и B не пересекаются, то $A \cap B = \varnothing$.

- **Разность**: $A \setminus B := \{ x : x \in A \text{ и } x \notin B \}$.
- **Симметрическая разность**:

$$A \triangle B := \{ x : (x \in A \text{ и } x \notin B) \text{ или } (x \notin A \text{ и } x \in B) \}.$$

- **Дополнение**:

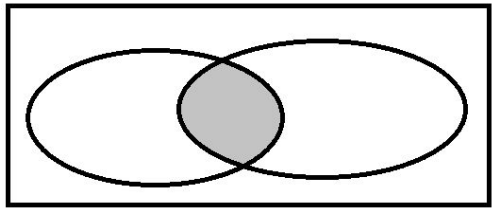
$$\overline{A} := \{x : x \notin A\}$$

Операции над множествами. Примеры

Пусть A={К, А, Т, Я}, B={Н, И, К, О, Л, А, Й}

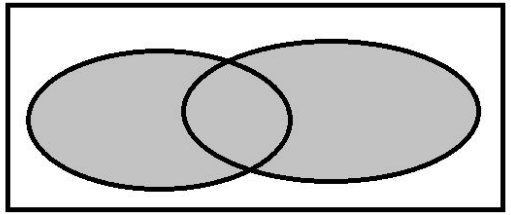
Пересечение :

- A ∩ B := { A, K}



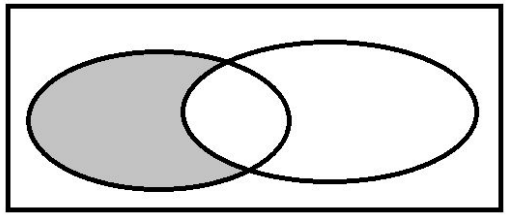
Объединение:

- A ∪ B := {А, И, Й, К, Л, Н, О, Т, Я} .



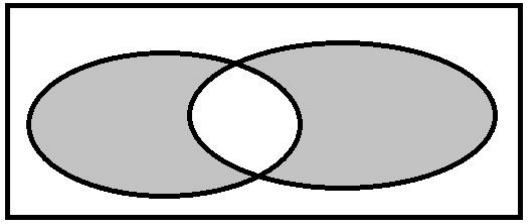
Разность:

- A ∖ B := {Т, Я } ;



Симметрическая разность:

- A ∆ B := { И, Й, Л, Н, О, Т, Я }.



Свойства операций над множествами

- 1) Коммутативность.
- 2) Ассоциативность.
- 3) Дистрибутивность.
- 4) Свойство нуля.
- 5) Свойство единицы
- 6) Закон поглощения

+ Идемпотентность,
инволютивность,
закон де Моргана

Декартово произведение

Декартово или прямое произведение:

- $A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$.

ПРИМЕР : $A = \{ 6, 5, 7 \}$; $B = \{11, 14, 12\}$

- $A \times B = \{ (6,11),(6,14),(6,12),(5,11),(5,14),(5,12),(7,11),(7,14),(7,12), \}$.
- *Прямое произведение множеств – операция* ***многоместная***

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

- В результате получаются множества, состоящие из упорядоченной последовательности вида

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1 \in A_1 ; a_2 \in A_2 ; \ldots ; a_n \in A_n$.

- .

Декартово произведение

ТЕМА
Введение
в общую алгебру

- **Декартово или прямое произведение**:
- A × B = { (a , b) : a ∈ A , b ∈ B }.
- ПРИМЕР : A = { 6, 5, 7 } ; B = {11, 14, 12}
- A × B = { (6 ,11),(6,14),(6,12), (5 ,11),(5,14),(5,12), (7,11),(7,14),(7,12), }.
- *Прямое произведение множеств – операция* ***многоместная***

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \prod_{i=1}^{n} A_i$$

- В результате получаются множества, состоящие из упорядоченной последовательности вида

$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где $a_1 \in A_1; a_2 \in A_2; \ldots; a_n \in A_n$.

- Такие последовательности называются *кортежами* или *векторами*. Сами элементы при этом называются *компонентами* (*координатами*) кортежа.

- ***Степенью множества*** называется декартовое произведение множества A само на себя *n* раз:
- $A^n = A \times A \times A \ldots \times A$ – n раз
- ПРИМЕР: A={2,7}
- $A^2 = A \times A = = \{ (2 ,2),(2,7),(7,2), (7 ,7)\}$.

План уроков темы

- Описание множеств. Операции над множествами.
- Отношения. Свойства отношений.
- Функция. Отображение. Операции.
- Алгебраические системы и их изоморфизм.
- Группы, кольца, поля. Примеры

Отношения

- ***Опр. N-местным (n-арным) отношением,*** *заданным на множествах* $M_1, M_2, \dots, M_n$ *называется любое подмножество декартова произведения* $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$

- Отношение обычно обозначается буквой **R** (**R**elation - отношение).

- Говорят, что $a_1, a_2, \dots, a_n$ находятся в отношении **R**, если $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$

Отношения

- ***Опр. N-местным (n-арным) отношением,*** *заданным на множествах* $M_1, M_2, \dots, M_n$ *называется любое подмножество декартова произведения* $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$

- Отношение обычно обозначается буквой **R** (**R**elation - отношение).

- Говорят, что $a_1, a_2, \dots, a_n$ находятся в отношении **R**, если $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in R$
- Бинарное отношение **R** на множестве A - любое подмножество A x A.
- **Примеры отношений**: «**x** -спортсмен», «**x** работает в компании **y**», «**x**-y нравится **y**», «**z=x+y**»
- Для бинарных отношений: **xRy** («**x<y**», «**x=y**»)

Способы задания отношения

- ***Перечислением всех элементов***

- **M1** = {Петр, Сергей, Мирон}
- **M2** = {Юлия, Ольга}
- **R** - «Нравится», $\boldsymbol{R \subset M1 \times M2}$

- **R** = {(Петр, Юлия), (Сергей, Ольга), (Мирон, Ольга), (Сергей, Юлия)}

Способы задания отношения

Таблично *(перечислением всех элементов)*

- **M1** = {Петр, Сергей, Мирон, Юлия, Ольга}
- **M2** = $\{x\colon\ x \in N, x < 200\}$
- **M3** = {Йошкар – Ола, Ульяновск, Набережные Челны, Саранск, Нижний Новгород, … }

- **R** - «**x** имеет возраст **y** и живет в городе **z**»,

$$\boldsymbol{R \subset M1 \times M2 \times M3}$$

- R1 - «**x** имеет возраст **y**»
- R2 - «**x** живет в городе **z**»

Способы задания отношения

Предикатом, который описывает свойство всех **n**-к элементов, входящих в отношение.

- $\{(a_1, a_2, \dots, a_n)\colon P(a_1, a_2, \dots, a_n)\}$ - множество всех кортежей $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, для которых высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ истинно".

- Пример. **R** - «не больше»:

$$R = \{(x, y)\colon x < y \text{ ИЛИ } x = y\}$$

Способы задания отношения

Графический способ задания отношений

- **M** = {Петр, Сергей, Мирон, Юлия, Ольга}
- **R** = {(Петр, Юлия), (Юлия, Петр), (Мирон, Ольга), (Ольга, Мирон), (Сергей, Юлия), (Юлия , Сергей), (Ольга, Юлия), (Юлия , Ольга)}

Матрица бинарного отношения

M = {Петр, Сергей, Мирон, Юлия, Ольга}
R = {(Петр, Юлия), (Юлия, Петр), (Мирон, Ольга), (Ольга, Мирон), (Сергей, Юлия), (Юлия ,Сергей), (Ольга, Юлия), (Юлия ,Ольга)}

Бинарному отношению $R \in M \times M$,
где M = $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – конечное множество мощности **n**, соответствует квадратная матрица **C** порядка **n**, в которой элемент c_{ij}, стоящий на пересечении **i**-й строки и **j**-го столбца, равен 1, если между a_i и a_j имеет место отношение **R**, или 0, если оно отсутствует

Свойства бинарного отношения

Пусть **R** – отношение на множестве M, $R \in M \times M$.

Тогда отношение **R**:

- **рефлексивно**, если $\forall\, a \in M\colon\ a\, R\, a$
  (главная диагональ матрицы рефлексивного отношения содержит только единицы);

Свойства бинарного отношения

Пусть **R** – отношение на множестве **M**, $R \in M \times M$.

Тогда отношение **R**:

- **рефлексивно**, если $\forall\, a \in M\colon a\, R\, a$;

- **антирефлексивно**, если $\forall\, a \in M\colon \neg\,(a\, R\, a)$
  (главная диагональ матрицы антирефлексивного отношения содержит только нули);

Свойства бинарного отношения

Пусть **R** – отношение на множестве **M**, $R \in M \times M$.

Тогда отношение **R**:

- **симметрично**, если $\forall\, a, b \in M$: $a\, R\, b \Rightarrow b\, R\, a$
  (матрица такого отношения симметрична относительно главной диагонали, т.е. $c_{ij} = c_{ji}$);

Свойства бинарного отношения

Пусть **R** – отношение на множестве **M**, $R \in M \times M$.

Тогда отношение **R**:

- **симметрично**, если $\forall a, b \in M: a R b \Rightarrow b R a$;
-
- **антисимметрично**, если $\forall a, b \in M: a R b$ и $b R a \Rightarrow a = b$

(в матрице такого отношения отсутствуют единицы, симметричные относительно главной диагонали);

Свойства бинарного отношения

Пусть **R** – отношение на множестве **M**, $R \in M \times M$.

Тогда отношение **R**:

- **транзитивно**, если $\forall\, a, b, c \in M$: $a\, R\, b$ и $b\, R\, c \Rightarrow a\, R\, c$

  Примеры транзитивного отношения: “>”, “=”, “есть путь”, “есть функция”, «является подмножеством»

  Пример нетранзитивного отношения: “общается с”, “нравится”

Отношения эквивалентности

Если отношение ***R*** на множестве ***M*** рефлексивно, симметрично и транзитивно одновременно, то это отношение **эквивалентности.**

Примеры отношения эквивалентности.

- $M1 = \{x: x \in N, x < 100\}$. ***R1*** - отношение "оканчиваться на одну цифру".

- Пусть M2=**Z** (множество целых чисел). ***R2*** - отношение «имеют одинаковый остаток от деления на 3".

- (отношение конгруэнтности, подобия, …)

Отношения эквивалентности

Ключевое свойство отношения эквивалентности:

- множество ***A*** разбивается на **непересекающиеся классы эквивалентности,** элементы внутри такого класса эквивалентны друг друга с точки зрения рассматриваемого отношения.

Примеры разбиения

- Для ***R1*** - отношение "оканчиваться на одну цифру“ множество **M1** делится на 10 классов эквивалентности например K5={5,15,25,…,95}, K9={9, 19,29,…,99}.
- Для ***R2*** - отношение «имеет одинаковый остаток от деления на 3“ множество **M2** делится на 3 класса K0={0,±3, ±6,…}, K1={…,-2,1,4, 7,…}, K2={…,-1,2,5,8…}.

Отношения порядка

- ***Связное (полное) отношение*** – *отношение* ***R****, в котором для любой пары* ***a,b*** *из условия* ***a ≠ b*** *следует* ***aRb*** *или* ***bRa*** .

Примером **связного (полного) отношения** является отношение «***быть выше по росту***», заданное на множестве студентов некоторой группы.

Отношения порядка

- ***Связное (полное) отношение*** – *отношение* ***R****, в котором для любой пары* ***a,b*** *из условия* ***a ≠ b*** *следует* ***aRb*** *или* ***bRa*** .

- ***Отношение частичного порядка*** *– отношение, которое рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.*

Пример: отношение «*является подмножеством*» (⊂), заданное на булеане U, отношение «доминирует» на R^2.

- ***Отношение линейного порядка*** *– отношение частичного порядка, которое связно.*

Пример: является отношение ≥, заданное на множестве вещественных чисел.

Отношения порядка

- ***Связное (полное) отношение*** – *отношение* ***R****, в котором для любой пары* ***a,b*** *из условия* $a \neq b$ *следует* ***aRb*** *или* ***bRa*** .

- ***Отношение строгого порядка*** *– отношение, которое антирефлексивно, антисимметрично и транзитивно.*

- ***Отношение строгого линейного порядка*** *– связное отношение строгого порядка.*

Применение отношений

- ***Описание смысла подмножеств***

R = {(Петр, Юлия), (Юлия, Петр), (Мирон, Ольга), (Ольга, Мирон), (Сергей, Юлия), (Юлия ,Сергей),(Ольга, Юлия),(Юлия ,Ольга)}, **R** = ?

Применение отношений

- ***Описание смысла подмножеств***

R = {(Петр, Юлия), (Юлия, Петр), (Мирон, Ольга), (Ольга, Мирон), (Сергей, Юлия), (Юлия ,Сергей),(Ольга, Юлия),(Юлия ,Ольга)}, **R** = ?

- ***Формирование новых множеств с использованием свойств отношений:***

$R1$ – "выше чем" (транзитивно). $R1 = \{(\text{Иван}, \text{Вася}), (\text{Вася}, \text{Саша})\}$

$R2 = \overline{R1}$ (транзитивное замыкание), $R2 = R1 \cup (\text{Иван}, \text{Саша})$

Применение отношений

- ***Описание смысла подмножеств***

R = {(Петр, Юлия), (Юлия, Петр), (Мирон, Ольга), (Ольга, Мирон), (Сергей, Юлия), (Юлия ,Сергей),(Ольга, Юлия),(Юлия ,Ольга)}, **R** = ?

- ***Формирование новых множеств с использованием свойств отношений:***

$R1$ – "выше чем" (транзитивно). $R1 = \{(\text{Иван}, \text{Вася}), (\text{Вася}, \text{Саша})\}$

$R2 = \overline{R1}$ (транзитивное замыкание), $R2 = R1 \cup (\text{Иван}, \text{Саша})$

- ***Конструирование предикатов для описания множеств***

$$M = \{x: \boldsymbol{x \in N} \text{ И } \boldsymbol{x \leq 10}\}, \qquad M = \{(x, y): \boldsymbol{y = f(x)}\}$$

M = {x: $\boldsymbol{x^2 - 1 = 0, x \in R}$} ➔ M = {-1, +1} (и наоборот)

План уроков темы

- Описание множеств. Операции над множествами.
- Отношения. Свойства отношений.
- Функция. Отображение. Операции.
- Алгебраические системы и их изоморфизм.
- Группы, кольца, поля. Примеры

Соответствие

- **Соответствие** *между множествами* **A** *и* **B** *– это множество, представляющее собой некоторое подмножество их декартова произведения:* $P \subset A \times B$ *или* $P: A \to B$.
  A-начало, B – конец соответствия

- Если $(a, b) \in P$ то говорят, что **b** соответствует **a** в соответствии **P**

- ***Образ элемента a в множестве B при соответствии P*** *– множество всех* **b** *, соответствующих элементу* **a**.
  Обозначается: **b = P(a)**.

- ***Прообраз элемента b в множестве A при соответствии P*** *– множество всех* **a** *, соответствующих элементу* **b**.
  Обозначается **a = P^{-1}(b)** .

Соответствие

- ***Область определения соответствия P (обозначается D(P)*** *) – множество таких* ***a****, для которых существует образ.*
- ***Область значений соответствия P (обозначается E(P)*** *) – множество таких* ***b****, для которых существует прообраз.*

Виды соответствий

- ***Всюду определенное соответствие*** : ***D(P) = A***. В противном случае соответствие называется частичным.

- ***Сюръективное соответствие (сюръекция)*:** **E(P) = B**.

Виды соответствий

- ***Инъективное соответствие (инъекция)*** – *соответствие, при котором прообразом любого элемента из множества* **E(P)** *является единственный элемент из множества* ***D(P)***.

- ***Функциональное соответствие (функция)*** – *соответствие , при котором образом любого элемента из множества* ***D(P)*** *является единственный элемент из множества* **E(P)**.

Виды соответствий

- ***Взаимнооднозначное соответствие*** *– соответствие, которое функционально и инъективно.*
- ***Биекция (1-1 соответствие)*** *– соответствие, которое всюду определено, сюръективно, функционально и инъективно.*
- ***Отображение A в B*** *– соответствие, которое всюду определено и функционально.*
- ***Отображение A на B*** *– соответствие, которое всюду определено, функционально и сюръективно.*

Алгебраические операции

- Под **алгебраической операцией** понимается отображение, которое одному или нескольким элементам множества (аргументам) ставит в соответствие другой элемент (значение).
- Операции классифицируются по присущим им специфическим свойствам и по количеству аргументов арности).

- **Унарная** операция на множестве ***A*** это отображение
$$f : A \to A.$$
- Примерами унарных операций могут служить операции перехода от множества к его дополнению, изменение знака числа. Унарную операцию называют **оператором**.

- **Нульарная операция** на множестве ***A*** **-** произвольный фиксированный элемент множества ***A.*** Нульарные операции позволяют фиксировать элементы множества A, обладающие некоторыми специальными свойствами. Примером нульарной операции является, например, фиксирование нуля в множестве целых чисел с операцией сложения.

Бинарная операция

Пусть ***A***, ***B***, ***C*** тройка непустых множеств.

- ***Бинарной операцией*** **f** на паре множеств ***A*** и ***B*** со значениями в ***C*** называется отображение
  $f : A \times B \to C$, которое ставит в соответствие упорядоченной паре (a, b) ∈ ***A*** × ***B*** некоторый элемент множества ***C***.

Если ***A*** = ***B*** = ***C***, то бинарная операция называется внутренней, в противном случае - внешней.

Бинарную операцию принято обозначать знаком действия, который ставится между операндами (инфиксная форма записи). Например, для произвольной бинарной операции (*) результат её применения к двум элементам ***a*** и ***b*** записывается в виде $a * b$.

- Говорят, что множество ***A*** **замкнуто** относительно операции ∗, если $a_1 * a_2 \in A$ для любых $a_1 * a_2 \in A$.

Свойства (типы) бинарных операций

Рассмотрим бинарную операцию на множестве $\boldsymbol{A}$, обозначив ее звездочкой $(*)$. Эту операцию называют:

1) ***ассоциативной***,
если $(a * b) * c = a * (b * c) \quad \forall a, b, c \in \boldsymbol{A};$
2) ***коммутативной***,
если $a * b = b * a \quad \forall a, b \in \boldsymbol{A};$
3) ***идемпотентной***,
если $a * a = a \quad \forall a \in \boldsymbol{A}.$

Пусть $(\circ)$ и $(*)$ - две бинарные операции, заданные на множестве $\boldsymbol{A}$. Операция $(*)$ называется ***дистрибутивной*** относительно операции $(\circ)$, если

$$(a \circ b) * c = (a * c) \circ (b * c), \qquad c * (a \circ b) = (c * a) \circ (c * b) \qquad \forall a, b, c \in \boldsymbol{A}.$$

Нулевой элемент

- Элемент **0** множества ***A*** называют левым (правым) нулем относительно данной операции $*$, если $\mathbf{0}*a=\mathbf{0}$ ($a*\mathbf{0}=\mathbf{0}$) для любого $a \in \boldsymbol{A}$.

- Если $\mathbf{0}'$ — левый нуль и $\mathbf{0}''$ — правый нуль существуют, то они совпадают, так как $\mathbf{0}'=\mathbf{0}'*\mathbf{0}''=\mathbf{0}''$. В этом случае говорят просто о **нуле относительно операции,** при этом он единственен и для него одновременно выполнены оба равенства $\mathbf{0}*x=\mathbf{0}$ и $x*\mathbf{0}=\mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ d & 1 \end{pmatrix}.$$

Нейтральный элемент

- Элемент **e** множества ***A*** называют левым (правым) нейтральным элементом относительно операции (*), если **e***a=a (a***e**=a) для любого элемента a∈***A*** .

  Для левого **e**′ и правого **e**″ нейтральных элементов, если они оба существуют, выполнены равенства **e**′=**e**′***e**″=**e**″, следовательно, они совпадают. В этом случае элемент **e** называют **нейтральным элементом**.

Нейтральным элементом относительно операции умножения на множестве натуральных чисел является число 1. На множестве целых чисел нейтральным элементом относительно операции сложения будет число 0.

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ d & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Алгебраические операции

- Пусть $*$ - бинарная операция на множестве $\boldsymbol{A}$, обладающая нейтральным элементом $\boldsymbol{e}$. Элемент a' называется симметричным к элементу $a \in \boldsymbol{A}$ относительно операции $*$, если $a'*a = \boldsymbol{e} = a*a'$.

- **Аддитивные операции.** Если операция на множестве ***коммутативна и ассоциативна***, то ее часто обозначают знаком **+** и называют ***сложением***.

  При этом нейтральный элемент, если он существует, обозначается 0 и называется нулем , а (единственный) симметричный элемент к элементу a обозначается через $-a$ и называется противоположным к a элементом.

- **Мультипликативные операции.** Если операция на множестве ***ассоциативна***, то ее часто обозначают знаком $\cdot$ и называют ***умножением***.

  При этом нейтральный элемент, если он существует, обозначается 1 и называется единицей , а (единственный) симметричный элемент к элементу a обозначается через a^{-1} и называется обратным к a элементом.

План уроков темы

- Описание множеств. Операции над множествами.
- Отношения. Свойства отношений.
- Функция. Отображение. Операции.
- Алгебраические системы и их изоморфизм.
- Группы, кольца, поля. Примеры

Алгебраические структуры

- **Опр**. Непустое множество ***A***, вместе с одной или несколькими алгебраическими операциями, определенными на этом множестве называют ***алгебраической структурой (системой).***

Обозначения:

- (***A***, *) – пример обозначения алгебраической структуры с одной алгебраической операцией;
- (***A***, *, ∘) – алгебраическая структура с двумя операциями
- и т.п. .

Алгебраические структуры (АС)

- **Опр**. Непустое множество ***A***, вместе с одной или несколькими алгебраическими операциями, определенными на этом множестве называют ***алгебраической структурой (системой).***

Примеры:

- (***R***, +) – множество вещественных чисел с операцией +;
- (***R***,+,*) – множество вещественных чисел с операциями + и *;
- (M_n(***R***), +), (M_n(***R***) , +, ×) - множество квадратных матриц n-го порядка, определенных на множестве действительных чисел с операциями матричного сложения (+) и умножения (×).

Группоид

- **Опр**. Непустое множество ***A***, в котором определена только одна бинарная операция, называется ***группоидом*.**

В группоиде на бинарную операцию нет никаких ограничений.

Полугруппа

- **Опр**. Непустое множество ***A***, в котором определена только одна бинарная операция, называется ***группоидом.***

В группоиде на бинарную операцию нет никаких ограничений.

- **Опр**. Алгебраическая структура (***A***, ∗) называется ***полугруппой***, если операция ∗ является ***ассоциативной***.

Если операция ∗ является ***коммутативной***, то полугруппа (***A***, ∗) называется ***коммутативной полугруппой.***

Примеры: ((***N***, +), (***N***, ·) *)*.

Моноид

- **Опр**. Полугруппа ***A***, в которой существует ***единичный элемент***, называется полугруппой с единицей, или ***моноидом.***

Примеры:

- Аддитивная полугруппа $(M_n(\boldsymbol{R}), +)$ - это коммутативный моноид (единичный элемент - нулевая матрица).
- Мультипликативная полугруппа $(M_n(\boldsymbol{R}), \times)$ - это некоммутативный моноид (единичный элемент - единичная матрица E)

Группа

- **Опр**. Моноид ***G***, в котором для любого элемента существует ***симметричный или противоположный элемент***, называется ***группой.***

Т.о., для операции группы выполняются следующие свойства:

- A1. Операция $*$ ***ассоциативна***:
  $\forall x, y, z \in G \quad x * (y * z) = (x * y) * z;$
- A2. операция $*$ обладает ***нейтральным элементом*** e:
  $\exists e \in G : \ \forall x \in G \quad x * e = e * x = x;$
- A3. все элементы множества ***G обратимы*** относительно операции $*$:
  $\forall x \in G \ \exists \ x' \in G \ x * x' = x' * x = e.$

Абелева группа

- **Опр**. Группа (***G*** , ***∗***) называется ***абелевой***, если операция ***∗*** в ней коммутативна.

Примеры:

- (**V**, **+**), **V** - множество **n**-к чисел:

- (Z, +). **Z** - множество целых чисел относительно операции +

Абелева группа

- **Опр**. Группа (***G*** , *******) называется ***абелевой***, если операция ******* в ней коммутативна.

Примеры:

- (**V**, **+**), **V** - множество **n**-к чисел:
- (Z, +). **Z** - множество целых чисел относительно операции +
- Группа ***G***, содержащая конечное число элементов, называется **конечной**, а число её элементов называется порядком и обозначается | ***G*** |. В противном случае группа называется бесконечной.
- Группу относительно сложения называют ***аддитивной*** группой. Группу относительно умножения называют ***мультипликативной*** группой.

Свойства групп

- Утверждение 1. ***Нейтральный элемент единственен:***

Если e_1 , e_2 — нейтральные, то $e_1 * e_2 = e_1$, $e_2 * e_1 = e_2 \Rightarrow e_2 = e_1$.

- Утверждение 2. ***Для каждого элемента a обратный элемент a' единственен.***

Пусть для элемента *a* существуют два обратных элемента a_1' и a_2'. Тогда …

.

Свойства групп

- Утверждение 3. ***Верны законы сокращения***:
  $c * a = c * b \Leftrightarrow a = b$, $a * c = b * c \Leftrightarrow a = b$.

Действительно, пусть $c * a = c * b$, e – единичный элемент группы и c' – обратный к c элемент. Тогда …

- Утверждение 4. ***Группа содержит единственное решение x любого уравнения*** $x * c = b$ ***или*** $c * x = b$.

Доказательство. Решением уравнения $a * x = b$ в группе A называется такой элемент $c \in A$, что $a * c = b$. Возьмем $c = a' * b$, где a' – обратный к a элемент.

Тогда …

.

Свойства групп

- Обратный элемент к нейтральному есть сам нейтральный элемент: $e^{-1} = e$.
- $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.
- $(a^{-1})^{-1} = a$.
- $e^n = e$, *для любого* $n \in Z$.

АС с двумя операциями: кольцо

- *Опр.* ***Кольцо*** — это непустое множество M, на котором заданы две бинарные операции: **+** и **×** (называемые **сложение** и **умножение**), со следующими свойствами:

- 1)-4) (M, +) –абелева группа;
- 5) (M, *) – полугруппа;
- 6) дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$
$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

Пример: (**Z**, +, *)

Кольцо многочленов

Кольцо многочленов — кольцо, образованное многочленами от одной или нескольких переменных с коэффициентами из другого кольца.

Многочленом от одной переменной над кольцом ***K*** называется выражение

$$f = f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad a_i \in K,$$

где **x** – некоторая переменная из кольца **K**.

Если a n ≠ 0 , то a n называется старшим коэффициентом многочлена f , a n – степенью многочлена f (обозначение: n = deg f) Нулевому многочлену 0 степень не приписывается. Два многочлена равны , если равны коэффициенты при одинаковых степенях x . Множество всех многочленов от x над кольцом K будем обозначать символом K [x] . На множестве K [x] определим операции сложения и умножения:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum_{i=0}^{n} b_i x^i = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i,$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k, \quad \text{где} \quad c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j,$$

при определении операции сложения мы добавляем нулевые слагаемые с тем, чтобы получить записи с одинаковыми степенями x .

АС с двумя операциями: поле

- *Опр.* **Кольцо *F*** называется **полем** , если множество его ненулевых элементов F \ { 0 } , **непусто и образует абелеву группу.** Эта группа называется **мультипликативной** группой поля.

- 1)-4) (***F***, +) –абелева группа;
- 5)-8) (***F*** { 0 }, *) – абелева группа;
- 9) дистрибутивность умножения относительно сложения:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$
$$(b + c) \times a = b \times a + c \times a$$

Примеры: (**Q**, +, *), (**R**, +, *), **Z***p*={0,1,2,…,*p*−1} с операциями "сложения по модулю *p*" и "умножения по модулю *p*" **является полем для любого простого числа** *p*. Поля, состоящие из конечного числа элементов называются полями Галуа.

- Изоморфизм алгебраических структур одного вида позволяет результаты в одной АС переносить в другую АС:

$$(R^+,*) \leftrightarrow (R,+)$$

$$\ln(a * b) = \ln(a) + \ln(b)$$