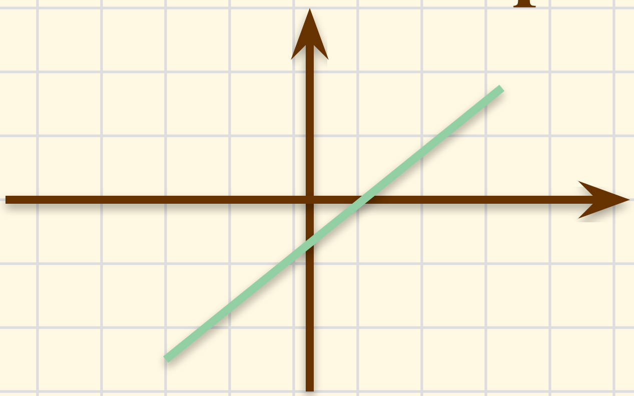
Задачи на нахождение экстремума

- **Решение различных экономических задач в формате ЕГЭ часто сводится к отысканию экстремальных (минимальных или максимальных) значений некоторой функции. Нередко такими функциями являются линейная функция или квадратичная функция**

Линейная функция y=kx+m

- 1) Если задан промежуток, которому принадлежит x, то экстремальное значение функция принимает на одном из концов промежутка.



Линейная функция y=kx+m

- 2) Если линейная функция рассматривается только на множестве целых чисел, то число из этого промежутка, при котором функция принимает наибольшее или наименьшее значение, будет ближайшим целым числом к тому концу промежутка, на котором она принимает соответствующее экстремальное значение

Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$

- Квадратичная функция принимает экстремальное значение при

$$x = -\frac{b}{2a}$$

№1.

Индивидуальный предприниматель за 288 тысяч рублей приобрёл цех по производству носков. Затраты на изготовление x тысяч пар носков в месяц составляют (x^2+6x+7) тысяч рублей. Если продавать одну пару носков по c рублей, то прибыль от продажи x тысяч пар носков в месяц составит $cx - (x^2+6x+7)$ тысяч рублей ($c>6$). Предприниматель имеет возможность изготавливать и продавать такое количество пар носков, которое обеспечивает наибольшую прибыль. При каком наименьшем значении c предприниматель окупит затраты на покупку цеха не более чем за 32 месяца?

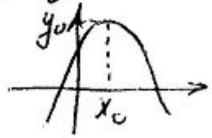
1) Прибыль $P(x)$ от продажи x тысяч пар носков в месяц составляет по условию:

$$P(x) = cx - (x^2 + 6x + 7)$$

$$P(x) = cx - x^2 - 6x - 7$$

$$P(x) = -x^2 + x(c-6) - 7$$

($P(x)$ - парабола, ветви которой направлены вниз, свое наибольшее значение принимает в вершине параболы)



2)

$$a = -1$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad b = (c-6) \quad c = -7$$

$$x_0 = -\frac{c-6}{-2} = \frac{6-c}{-2} = \frac{c-6}{2}$$

3) $$P\left(\frac{c-6}{2}\right) = -\left(\frac{c-6}{2}\right)^2 + \frac{(c-6)}{2}\cdot(c-6) - 7 =$$

$$= -\left(\frac{c-6}{2}\right)^2 + \frac{(c-6)^2}{2} + 7 = -\frac{(c-6)^2}{4}^{\backslash 1} + \frac{(c-6)^2}{2}^{\backslash 2} - 7$$

$$= \frac{(c-6)^2}{4} - 7$$

4) Затраты необходимо окупить не более чем за 32 месяца, значит,

$$32\cdot\left(\frac{(c-6)^2}{4}-7\right)\geq 288$$

$$\frac{(c-6)^2}{4}-7\geq 9$$

$$\frac{(c-6)^2}{4}-16\geq 0$$

$$\left(\frac{c-6}{2}-4\right)\left(\frac{c-6}{2}+4\right)\geq 0$$

$$\left(\frac{c-6-8}{2}\right)\cdot\left(\frac{c-6+8}{2}\right)\geq 0$$

$$(c-14)(c+2)\geq 0$$

$c\in(-\infty;-2)\cup[14;+\infty)$

c – положительное число.

Значит, наименьшее значение c равно 14.

Ответ: 14.

№2

Крупный бизнесмен является владельцем двух заводов, выпускающих одинаковую продукцию. На втором заводе используется более современное оборудование, позволяющее за одинаковое время с первым заводом производить больше продукции, чем на первом заводе. Известно, что если рабочие первого завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $2t$ единиц товара. А если рабочие второго завода трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за это время они производят $5t$ единиц товара. За обоих заводах за 1 час работы рабочему платят 500 рублей. Какое наибольшее число единиц продукции можно будет выпустить на обоих заводах при условии, что заработную плату на предстоящую неделю можно будет выплатить в размере 1 450 000 рублей?

Пусть суммарное рабочее время за неделю на I заводе составляет x^2, II заводе – y^2, тогда на I заводе произведут $2x$ единиц продукции, а на II заводе – $5y$ единиц продукции (товара). Всего на двух заводах произведут $K=2x+5y$ единиц товара.

По условию, за эту работу надо выплатить рабочим $(x^2+y^2)\cdot 500 = 1450000$ рублей.

Тогда

$(x^2+y^2)\cdot 500 = 1450000$

$x^2+y^2=2900$, $y^2=2900-x^2$, $y>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y=\sqrt{2900-x^2}$

С учетом, что $K=2x+5y=$

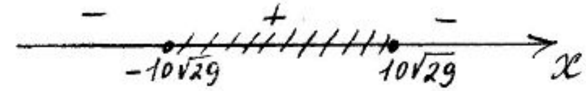
$=2x+5\sqrt{2900-x^2}$.

Найдем наибольшее значение K (число единиц продукции) с помощью производной.

$K=K(x)=2x+5\cdot\sqrt{2900-x^2}$

1) $2900-x^2\geq 0$

$(10\sqrt{29}-x)(10\sqrt{29}+x)\geq 0$



$x\in[-10\sqrt{29},\ 10\sqrt{29}]$

С учетом, что $x>0$, $x\in[0;10\sqrt{29}]$

2) $K'(x)=2+\dfrac{5\cdot(-2x)}{2\sqrt{2900-x^2}}$

$K'(x)=2-\dfrac{5x}{\sqrt{2900-x^2}}$

3) $K'(x)=0$

$2-\dfrac{5x}{\sqrt{2900-x^2}}=0$

$2\sqrt{2900-x^2}=5x \quad \uparrow^2$

$4(2900-x^2)=25x^2$

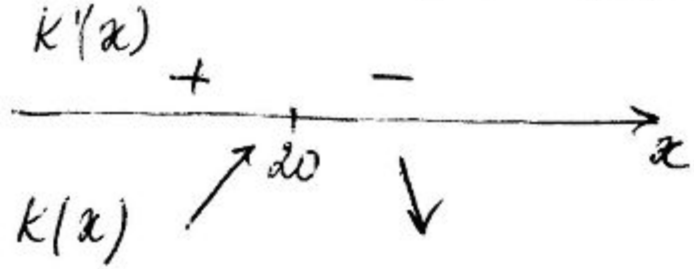
$-4x^2-25x^2=-4\cdot 2900$

$-29x^2=-4\cdot 2900 \quad |:(-29)$

$x^2=400$

$\left[\begin{array}{l} x=20 \\ x=-20 \end{array}\right.$ – не удовлетворяет условию.

4)



Значит, в т. $x = 20$ будет наибольшее значение

$$y = \sqrt{2900 - 20^2} = 50$$

$$k = 2 \cdot 20 + 5 \cdot 50 = 290$$

Значит, на двух заводах можно будет выпустить 290 единиц продукции.

Ответ: 290.

Задание для самостоятельной работы

- 1) Затраты на строительство нового аквапарка составляют 50 млн рублей. Стоимость обслуживания x тысяч посетителей за сезон равна $0,25x^2+4x+6$ млн рублей. Если за обслуживание одного посетителя за сезон брать c тысяч рублей ($c>4$), то прибыль за обслуживание x тысяч посетителей за сезон будет равна $cx-(0,25x^2+4x+6)$ млн рублей. По окончанию строительства у руководства аквапарка будет возможность организовать обслуживание такого числа посетителей, которое обеспечивает максимальную прибыль. При каком наименьшем значении c окупятся затраты на строительство аквапарка не более чем за 5 сезонов?

2) Олеся является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов суммарно трудятся t^2 часов в неделю, то за это время они производят $3t$ единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Олеся платит рабочему 400 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, - 500 рублей. Олеся готова выделить 1 800 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее число деталей можно произвести за неделю на этих двух заводах?