Оценки параметров распределения

Курс лекций «Метрология»

Математическая статистика

Задачи математической статистики:

1) определение способов сбора статистических данных,

2) разработка методов анализа статистических данных:

а) расчет оценок (оценка вероятности, оценки параметров известного распределения и др.),

б) проверка статистических гипотез.

Выборочный метод

Пусть требуется изучить совокупность однородных объектов относительно некоторого качественного или количественного признака.

1) ***Сплошное обследование всех элементов совокупности***

Может оказаться невозможным из-за большого или бесконечного объема исследуемой совокупности, физического уничтожения объектов при изучении, экономических причин.

2) ***Выборочный метод***

Изучение ограниченного числа объектов, случайно отобранных из совокупности.

Выборочный метод

Генеральная совокупность – совокупность объектов, из которой производится отбор.

Выборочная совокупность (выборка) - совокупность случайно отобранных объектов.

Объем совокупности (генеральной или выборочной) – количество объектов в этой совокупности.

Выборка должна быть ***репрезентативной*** (представительной), т. е. должна хорошо отражать пропорции генеральной совокупности.

Для этого выборка должна быть ***случайной***: все объекты генеральной совокупности должны иметь одинаковую вероятность попадания в выборку.

Оценки параметров распределения

Задача: нахождение оценок параметров распределения случайной величины на основании выборки.

Случайная величина X представляет собой генеральную совокупность бесконечного объема.

Выборка $x_1 \ldots x_n$ образована n значениями случайной величины, полученными в результате независимых наблюдений.

Распределение случайной величины X (генеральная совокупность) описывается параметром а.

Путем обработки n значений случайной величины X (выборка) можно получить ***оценку*** данного параметра.

Оценки параметров распределения

Виды оценок:

1) ***Точечная оценка*** **ã** параметра а определяется одним числом, наиболее близким к параметру а.

2) ***Интервальная оценка*** **[$\tilde{a}_1$; $\tilde{a}_2$]** параметра а определяется в виде доверительного интервала, задаваемого своими границами $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$, между которыми с заданной доверительной вероятностью p находится параметр а.

Оценки вычисляются на основании выборки $x_1 \ldots x_n$.

Точечные оценки

Точечная оценка ã параметра а представляет собой случайную величину на множестве выборок из одной и той же генеральной совокупности.

Требования к точечным оценкам:

1) ***Несмещенность.*** Несмещенная оценка - оценка ã, математическое ожидание которой равно значению оцениваемого параметра а при любом объеме выборки.

2) ***Эффективность.*** Эффективная оценка - оценка ã, которая при заданном объеме выборки имеет наименьшую возможную дисперсию.

3) ***Состоятельность.*** Состоятельная оценка - оценка ã, которая при объеме выборки $n \to \infty$ стремится по вероятности к оцениваемому параметру. Используется для выборок большого объема.

Точечная оценка математического ожидания

Точечной оценкой математического ожидания М(Х) случайной величины Х является ***выборочное среднее***:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Выборочное среднее является несмещенной, эффективной и состоятельной оценкой.

Точечная оценка дисперсии

Точечной оценкой дисперсии D(X) случайной величины X является ***выборочная дисперсия***:

$$\widetilde{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

Выборочная дисперсия является состоятельной, но смещенной оценкой.

$$M\left(\widetilde{D}\right) = \frac{n-1}{n} D(X)$$

Точечная оценка дисперсии

Точечной оценкой дисперсии D(X) случайной величины X является ***исправленная дисперсия***:

$$S_X^2 = \frac{n}{n-1}\widetilde{D}$$

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$$

Исправленная дисперсия является состоятельной и несмещенной оценкой.

Точечная оценка среднего квадратического отклонения

Точечной оценкой среднего квадратического отклонения σ(X) случайной величины X является ***исправленное среднее квадратическое отклонение***:

$$S_X = +\sqrt{S_X^2} = +\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Исправленное среднее квадратическое отклонение является состоятельной, но смещенной оценкой.

Точечная оценка среднего квадратического отклонения

Несмещенной точечной оценкой среднего квадратического отклонения σ(X) случайной величины X является ***исправленное среднее квадратическое отклонение***, умноженное на поправочный коэффициент k(n):

$$S_X = +k(n)\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}$$

Коэффициент k(n) зависит от объема выборки и изменяется: от k(n) = 1,13 при n = 3 до k(n) ≈ 1,03 при n → ∞.

Данная оценка является состоятельной и несмещенной.

Точечная оценка ско среднего арифметического

Точечная оценка среднего квадратического отклонения среднего арифметического одинаково распределенных независимых случайных величин $X_1 \ldots X_n$ связана с оценкой среднего квадратического отклонения S_X отдельной случайной величины X_i $(i = 1 \ldots n)$ соотношением:

$$S_{\bar{X}} = \frac{S_X}{\sqrt{n}}$$

Интервальные оценки

Интервальная оценка параметра а задается в виде доверительного интервала [$\tilde{a}_1$; $\tilde{a}_2$] и доверительной вероятности р:

$$P\left(\tilde{a}_1 \le a \le \tilde{a}_2\right) = p$$

Положение границ интервала $\tilde{a}_1$ и $\tilde{a}_2$ зависит от доверительной вероятности р, значение которой выбирают близким к единице: 0,95; 0,99.

q = 1 - p — уровень значимости.

Интервал для значений случайной величины

При нормальном распределении случайной величины X с математическим ожиданием M(X) и ско σ(X) с доверительной вероятностью p значение случайной величины X принадлежит интервалу:

$$X \in \left[\bar{x} - u_{\frac{1+p}{2}} \cdot S_X ; \bar{x} + u_{\frac{1+p}{2}} \cdot S_X \right]$$

$\bar{x}$ – оценка математического ожидания M(X);

S_X – оценка ско σ(X);

$u_{\frac{1+p}{2}}$ – квантиль стандартного нормального распределения порядка (1+p)/2.

$$X = \bar{x} \pm u_{\frac{1+p}{2}} \cdot S_X, \;\; p = \ldots$$

Доверительный интервал для математического ожидания

При нормальном распределении случайной величины X с математическим ожиданием M(X) и <u>неизвестным</u> ско σ(X) с доверительной вероятностью p математическое ожидание M(X) принадлежит интервалу:

$$M(X) \in \left[\bar{x} - t_{\frac{1+p}{2}}(n-1) \cdot S_{\bar{X}} ; \bar{x} + t_{\frac{1+p}{2}}(n-1) \cdot S_{\bar{X}} \right]$$

$\bar{x}$ – оценка математического ожидания M(X);

$S_{\bar{X}} = S_X / \sqrt{n}$ – оценка ско выборочного среднего;

$t_{\frac{1+p}{2}}(n-1)$ – квантиль распределения Стьюдента порядка (1+p)/2 с (n – 1) степенями свободы.

$$M(X) = \bar{x} \pm t_{\frac{1+p}{2}}(n-1) \cdot S_{\bar{X}}, \;\; p = \ldots$$

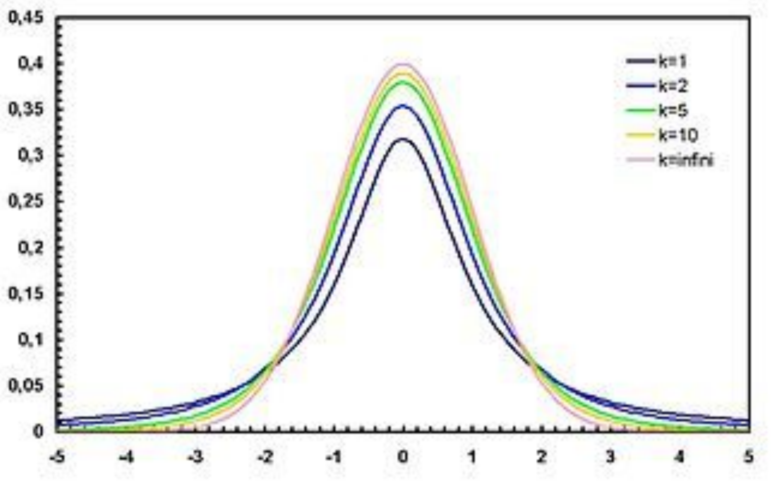
Распределение Стьюдента

Случайная величина T имеет распределение Стьюдента с k (k > 0) степенями свободы, если

$$T = \frac{Z}{\sqrt{Y/k}}$$

Z – случайная величина, имеющая стандартное нормальное распределение: M(Z) = 0, σ(Z) = 1;
Y – случайная величина, имеющая распределение χ^2 с k степенями свободы;
Z и Y – независимые случайные величины.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi \cdot k}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma(k/2)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$$



С возрастанием числа степеней свободы k распределение Стьюдента быстро приближается к нормальному распределению.

Доверительный интервал для среднего квадратического отклонения

При нормальном распределении случайной величины X с ско σ(X) с доверительной вероятностью p ско σ(X) принадлежит интервалу:

$$\sigma(X) \in \left[S_X \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{1+p}{2}}(n-1)}}; S_X \cdot \sqrt{\frac{n-1}{\chi^2_{\frac{1-p}{2}}(n-1)}} \right]$$

S_X – оценка ско σ(X);

$\chi^2_{\frac{1-p}{2}}(n-1)$, $\chi^2_{\frac{1+p}{2}}(n-1)$ – квантили распределения χ^2 порядка (1-p)/2 и (1+p)/2 с (n – 1) степенями свободы.

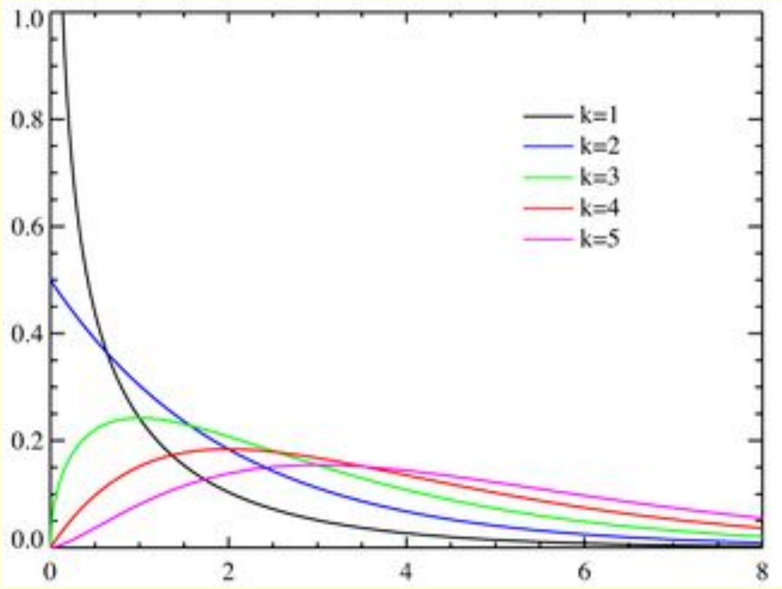
Распределение χ^2

Случайная величина Y имеет распределение χ^2 с k (k > 0) степенями свободы, если

$$Y = \sum_{i=1}^{k} X_i^2$$

$X_1 \ldots X_k$ – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение: $M(X_1) = \ldots = M(X_k) = 0$, $\sigma(X_1) = \ldots = \sigma(X_k) = 1$.

$$f(y) = \begin{cases} 0 & \text{при } y \le 0, \\ \dfrac{y^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}} \cdot \Gamma\left(\dfrac{k}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{y}{2}} & \text{при } y > 0. \end{cases}$$



С возрастанием числа степеней свободы k распределение χ^2 медленно приближается к нормальному распределению.