Лекция 1

1. Начальные сведения о задачах оптимизации

В настоящее время для решения оптимальных задач применяют в основном следующие методы:

методы исследования функций классического анализа;

методы, основанные на использовании неопределенных множителей Лагранжа;

вариационное исчисление;

динамическое программирование;

принцип максимума;

линейное программирование;

нелинейное программирование.

В последнее время разработан и успешно применяется для решения определенного класса задач метод геометрического программирования.

Постановка задачи оптимизации предполагает существование конкурирующих свойств процесса, например:

количество продукции - расход сырья

количество продукции - качество продукции

выбор компромиссного варианта для указанных свойств и представляет собой процедуру решения оптимизационной задачи.

При постановке задачи оптимизации необходимо:

1. Наличие объекта оптимизации и цели оптимизации. при этом формулировка каждой задачи оптимизации должна требовать экстремального значения лишь одной величины, т.е. одновременно системе не должно приписываться два и более критериев оптимизации, т.к. практически всегда экстремум одного критерия не соответствует экстремуму другого. приведем примеры.

2. Наличие ресурсов оптимизации, под которыми понимают возможность выбора значений некоторых параметров оптимизируемого объекта.

3. Возможность количественной оценки оптимизируемой величины, поскольку только в этом случае можно сравнивать эффекты от выбора тех или иных управляющих воздействий.

4. Учет ограничений.

Обычно оптимизируемая величина связана с экономичностью работы рассматриваемого объекта (аппарат, цех, завод). Оптимизируемый вариант работы объекта должен оцениваться какой-то количественной мерой - критерием оптимальности.

Критерием оптимальности называется количественная оценка оптимизируемого качества объекта.

На основании выбранного критерия оптимальности составляется целевая функция, представляющая собой зависимость критерия оптимальности от параметров, влияющих на ее значение. Вид критерия оптимальности или целевой функции определяется конкретной задачей оптимизации.

Оптимальная (или оптимизационная) модель [optimization model] – *экономико-математическая модель*, которая охватывает некоторое число вариантов (*технологических способов*) производства, распределения или *потребления* и предназначена для *выбора* таких значений *переменных*, характеризующих эти варианты, чтобы был найден лучший из них.

В отличие от *дескриптивной* (описательной, балансовой) модели о. м. содержит наряду с *уравнениями*, описывающими взаимосвязи между переменными, также критерий для выбора – *функционал* (или, что то же, *целевую функцию*).

Для того чтобы использовать результаты и вычислительные процедуры теории оптимизации на практике, необходимо прежде всего построить математическую модель объекта оптимизации. Под математической моделью любой реальной системы принято понимать совокупность соотношений, определяющих характеристики состояний системы в зависимости от начальных условий и времени

В практике исследования объектов модели могут применяться для самых разных целей, что вызывает использование моделей различных классов. Построение одной модели для сложной системы практически не представляется возможным без разработки вспомогательных моделей. поэтому при создании конечной математической модели исследуемого объекта строят частные вспомогательные модели, отражающие ту или иную информацию об объекте, имеющуюся у разработчика на данном этапе построения модели. для построения модели необходима система правил (принципов), позволяющих корректно осуществлять процесс построения. Критерий оптимальности определяет смысловое содержание целевой функции. Целевая функция математически связывает между собой факторы модели, и ее значение определяется значениями этих величин. Содержательный смысл целевой функции придает только критерий оптимальности. при наличии нескольких критериев оптимальности каждый из них будет описываться своей частной целевой функцией. система ограничений определяет пределы, сужающие область осуществимых или допустимых решений и фиксирующие основные внешние и внутренние свойства объекта. ограничения определяют область протекания процесса, пределы изменения параметров и характеристик объекта.

Уравнения связи являются математической формализацией системы ограничений. Различные по смыслу ограничения могут описываться одинаковыми уравнениями связи, а одно и то же ограничение в разных моделях может описываться разными уравнениями связи. Решением математической модели называется такой набор (совокупность) значений переменных, который удовлетворяет ее уравнениям связи. Общих способов построения математических моделей не существует, но можно условно разбить процесс на следующие основные этапы:

1. определение границ объекта оптимизации;
2. выбор управляемых переменных;
3. определение ограничений на управляемые переменные;

5. формулировка математической задачи

Оптимальная (или оптимизационная) задача [optimization problem] - *экономико-математическая задача*, цель которой состоит в нахождении наилучшего (с точки зрения какого-то *критерия*) распределения наличных *ресурсов*, иногда то же, экстремальная задача решается с помощью *оптимальной модели* методами *математического программирования*, т. е. путем поиска максимума или минимума некоторых *функций* или *функционалов* при заданных *ограничениях* (условная оптимизация) и без ограничений (безусловная оптимизация).

Решение о. з. называется *оптимальным решением*, *оптимальным планом*, *оптимальной точкой.*

Один из способов классификации методов оптимизации состоит в отнесении их оптимизационным задачам, для решения которых они предназначены.

Методы однокритериальной оптимизации направлены на поиск оптимума единственной целевой функции. Методы многокритериальной оптимизации обеспечивают процедуры принятия решения при многих критериях, в частности сводят векторную задачу к последовательности скалярных задач.

Методы локальной оптимизации обеспечивают отыскание одного локального минимума, а методы глобальной оптимизации направлены на установление всех локальных минимумов или наилучшего из них.

Различают также методы непрерывной и дискретной (в том числе комбинаторной) оптимизации, методы линейного и нелинейного программирования, методы условной и безусловной оптимизации, методы одномерной оптимизации и методы оптимизации функций многих переменных, и т.д., и т.п.

По типу информации о производных, требуемой для организации процесса оптимизации, методы подразделяются на методы:

- нулевого порядка (прямые), требующие только вычисления значений функции в точках пространства оптимизации и не требующие аналитического вида производных,

- первого порядка (градиентные), требующие кроме значений функции в точке еще и аналитического вида производных первого порядка для вычисления градиента,

- второго порядка (ньютоновские), для работы, которых требуются еще и производные второго порядка.

известны также несколько алгоритмов третьего порядка, но они не применяются при практической оптимизации.

различают также методы прямого поиска, методы линейной и квадратичной аппроксимации целевой функции (называемые также методами спуска). Принято считать эту классификацию эквивалентной предыдущей, но имеются и отличия.

По степени математической обоснованности методы делят на: эвристические и рациональные. Последние ориентированы на некоторую математическую модель оптимизируемой функции (например, предполагают ее непрерывно дифференцируемой) и обычно обладают строгими доказательствами сходимости к стационарной точке (критериями останова таких методов обычно является выполнение необходимых условий существования экстремума в данной точке) и оценками скорости сходимости. Вопрос о том, насколько реальная задача соответствует используемой алгоритмом модели, остается на совести человека, использующего данный метод. Эвристические алгоритмы обычно не используют никакой модели целевой функции, а основывают процесс оптимизации на формализованной человеческой интуиции и других нестрогих, но разумных предположениях. Строгие доказательства сходимости и теоретические оценки скорости сходимости обычно отсутствуют. критериями останова являются обычно такие условия как малое приращение аргумента или значения функции на нескольких последовательных шагах, что характерно для точки минимума, но не только для нее. применение этих методов обосновывается только тем, что их многократное использование в прошлом обычно приводило к успеху. зато такие алгоритмы можно применять к любой функция (хотя и с разной степенью успеха), не заботясь о доказательстве соответствия этой функции некоторой теоретической модели. большинство алгоритмов сочетают в той или иной степени оба эти подхода.

Методы оптимизации подразделяют также на детерминированные и стохастические. Стохастические алгоритмы используют элемент случайности при выборе направления или длины шага в процессе оптимизации. Отметим, что стохастические методы оптимизации применяются к детерминированным задачам, т.е. случайность намеренно вводится в алгоритм для того, чтобы обеспечить достижение цели.

Лекция 2

МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Пусть решается задача определения условного экстремума функции $z = f(x)$ при ограничениях $\varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad m < n.$

Составим функцию

$$L(X) = f(X) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i(X) \ , \qquad (1)$$

которая называется функцией Лагранжа. λ_i - постоянные множители (множители Лагранжа). Отметим, что множителям Лагранжа можно придать экономический смысл. Если $f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ - доход, соответствующий плану $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, а функция $\varphi_i(x_1,\ x_2, x_n)$ - издержки i-го ресурса, соответствующие этому плану, то λ_i - цена (оценка) i-го ресурса, характеризующая изменение экстремального значения целевой функции в зависимости от изменения размера i-го ресурса (маргинальная оценка). $l(x)$ - функция $n+m$ переменных $(x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n,\ \lambda_1,\ \lambda_2, \ldots,\ \lambda_m)$. Определение стационарных точек этой функции приводит к решению системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(X)}{\partial x_j} = 0, j = 1, 2, \ldots, n, \\ \dfrac{\partial L(X)}{\partial \lambda_i} = 0, i = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \qquad (2)$$

Легко заметить, что $l'_{\lambda i}(x) = \varphi_i(x)$, т.е. в (2) входят уравнения связи. Таким образом, задача нахождения условного экстремума функции $z = f(x)$ сводится к нахождению локального экстремума функции $l(x)$. Если стационарная точка найдена, то вопрос о существовании экстремума в простейших случаях решается на основании достаточных условий экстремума - исследования знака второго дифференциала $d^2 l(x)$ в стационарной точке при условии, что переменные приращения δx_j, связаны соотношениями

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial x_i} \Delta x_j = 0, i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (3)$$

полученными путем дифференцирования уравнений связи.

Пример решения задачи

Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = 9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - (3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)$$

при условии, что x_1, x_2, x_3 удовлетворяют уравнению $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1/$

Решение. Уравнение связи определяет в пространстве сферу единичного радиуса с центром в начале координат рис. 1.

Так как сфера - замкнутое ограниченное множество, то согласно теореме Вейерштрасса функция достигает на ней своего наибольшего и наименьшего значений.

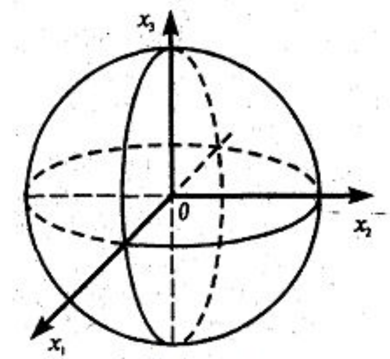


Рис. 1.

Необходимо найти условный глобальный экстремум. запишем уравнение связи в виде: $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$.

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, x_3) = 9x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - (3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)^2 +$$

$$+\lambda(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1)$$

Найдем частные производные этой функции по x_1, x_2, x_3, .

$$L'_{x1} = 18x_1 - 2(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)6x_1 + 2\lambda x_1,$$

$$L'_{x2} = 8x_2 - 2(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)4x_2 + 2\lambda x_2,$$

$$L_{x3} = 2x_3 - 2(3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2)2x_3 + 2\lambda x_3,$$

$$L'_{\lambda} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1.$$

Приравняв частные производные нулю, получим систему:

$$\begin{cases} x_1((9+\lambda)-6(3x_1^2+2x_2^2+x_3^2))=0\,, \\ x_2((4+\lambda)-4(3x_1^2+2x_2^2+x_3^2))=0\,, \\ x_3((1+\lambda)-2(3x_1^2+2x_2^2+x_3^2))=0\,, \\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1\,. \end{cases}$$

Решая систему, получим стационарные точки, в которых найдем значения функции z:

1. $x_1 = x_2 = 0; x_3 = \pm 1 \Rightarrow z = 0$,
2. $x_1 = 0; x_2 = \pm 1; x_3 = 0 \Rightarrow z = 0$,
3. $x_1 = \pm 1; x_2 = x_3 = 0 \Rightarrow z = 0$,
4. $x_1 = 0; x_2 = x_3 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow z = \dfrac{1}{4}$,
5. $x_1 = x_2 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} x_3 = 0 \Rightarrow z = 1$,
6. $x_1 = x_2 = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} x_3 = 0 \Rightarrow z = \dfrac{1}{4}$.

Выберем из всех значений наибольшее и наименьшее: $z_{наиб} = 1$, а $z_{наим} = 0$. Легко видеть, в каких точках сферы достигаются эти значения.

Лекция 3

ОБЩАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Дана система m линейных уравнений и неравенств с n переменными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

где $a_{ij} \in R \quad (i = 1,2,\ldots,k; k \le m; j = 1,2,\ldots,l; l \le n)$.

и линейная функция

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n, \qquad (2)$$

где $c_j \in R \quad (j = 1,2,\ldots,l; l \le n)$.

необходимо найти такое решение системы $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, где

$$x_j \ge 0 (j = 1,2,\ldots,l; l \le n) \qquad (3)$$

при котором линейная функция f (1) принимает оптимальное значение.

Система (1) называется системой ограничений, а функция f – линейной функцией.

Оптимальным решением задачи линейного программирования называется решение $x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, системы ограничений (1), удовлетворяющее условию (3), при котором линейная функция (2) принимает оптимальное значение.

Основные определения

Любые m переменных системы m линейных уравнений с n переменными $(m < n)$ называются *основными или базисными*, если определитель матрицы коэффициентов при них отличен от нуля. Тогда остальные $n - m$ переменных называются неосновными.

Теорема 1. если для системы m линейных уравнений с n переменными $(m < n)$ ранг матрицы коэффициентов при переменных равен m, т.е. существует хотя бы одна группа основных переменных, то эта система является неопределенной, причем каждому произвольному набору значений неосновных переменных соответствует одно решение системы

Базисным решением системы m линейных уравнений с n переменными называется решение, в котором все $n-m$ неосновных переменных равны нулю.

Угловая точка – точка множества, которая не является внутренней ни для какого отрезка, целиком принадлежащего данному множеству.

Теорема 2. если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то линейная функция принимает максимальное значение в одной из угловых точек многогранника решений. Если линейная функция принимает максимальное значение более, чем в одной угловой точке, то она принимает его в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией этих точек.

Оптимум линейной функции задачи линейного программирования следует искать среди конечного числа ее допустимых базисных решений.

Пример решения задачи линейного программирования

Задача 1. (об использовании ресурсов).

Для изготовления двух видов продукции p_1 и p_2 используют четыре вида ресурсов s_1, s_2, s_3, s_4. запасы ресурсов, затрачиваемых на производство единицы продукции, приведены в таблице 1.

Таблица 1

Вид ресурса	№запас ресурса	Число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции	
		p_1	p_2
s_1	18	1	3
s_2	16	2	1
s_3	5	-	1
s_4	21	3	-

Прибыль, получаемая от единицы продукции p_1 и p_2 – соответственно 2 и 3 руб. Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

*Геометрический метод решения***.** Составим экономико-математическую модель задачи. Обозначим x_1, x_2 - число единиц продукции соответственно p_1 и p_2, запланированных к производству.

Для их изготовления потребуется $(1x_1 + 3x_2)$ единиц ресурса s_1, $(2x_1 + 1x_2)$ единиц ресурса s_2, $(1x_2)$ единиц ресурса s_3 и $3x_1$ единиц ресурса s_4. Так как потребление ресурсов s_1, s_2, s_3, s_4 не должно превышать их запасов, соответственно 18, 16, 5 и 21 единицы, то связь между потреблением ресурсов и их запасами выразится системой неравенств:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18, \\ 2x_1 + x_2 \le 16, \\ x_2 \le 5, \\ 3x_1 \le 21. \end{cases} \qquad (4)$$

по смыслу задачи переменные

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \qquad (5)$$

суммарная прибыль f составит $2x_1$ руб. от реализации продукции p_1 и $3x_2$ руб. - от реализации продукции p_2, т.е.

$$F = 2x_1 + 3x_2 \qquad (6)$$

итак, экономико-математическая модель задачи: найти такой план выпуска продукции $x = (x_1,\ x_2)$, удовлетворяющий системе (4) и условию (5), при котором функция (6) принимает максимальное значение:

$$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 18 \,(\text{i}) \\ 2x_1 + x_2 \le 16 \,(\text{ii}) \\ x_2 \le 5 \qquad (\text{iii}) \\ 3x_1 \le 21 \quad (\text{iv}) \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \quad (\text{v,vi}) \end{cases}$$

Изобразим многоугольник решений на рис. 1

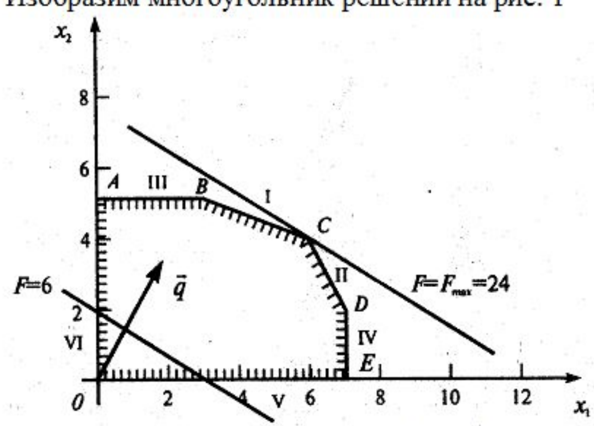


Рис. 1.

Очевидно, что при $f=0$ линия уровня $2x_1+3x_2=0$ проходит через начало координат (строить ее не обязательно). Зададим, например, $f=6$ и построим линию уровня $2x_1+3x_2=6$. Ее расположение указывает на направление возрастания линейной функции (вектор $\dot{q}$). Так как рассматриваемая задача - на отыскание максимума, то оптимальное решение - в угловой точке с, находящейся на пересечении прямых i и ii, т.е. координаты точки с определяются решением системы уравнений

$$\begin{cases} x_1+3x_2=18 \\ 2x_1+x_2=16 \end{cases}$$

откуда $x_1=6,\ x_2=4$, т.е. С (6;4).

Максимум (максимальное значение) линейной функции равен $f_{\max}=2\times6+3\times4=24$.

Итак, $f_{max}=24$ при оптимальном решении $x_1=6,\ x_2=4$, т.е. максимальная прибыль в 24 руб. может быть достигнута при производстве 6 единиц продукции p_1 и 4 единиц продукции p_2.

Лекция 4
ВЗАИМНО ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим формально две задачи i и ii линейного программирования, представленные в табл. 2, абстрагируясь от содержательной интерпретации параметров, входящих в их экономико-математические модели.

Таблица 2

задача i (исходная)	задача ii (двойственная)
$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \to \max$ (10)	$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \to \min$ (13)
при ограничениях	при ограничениях
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$ (11)	$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_1 \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_2 \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n. \end{cases}$ (14)
и условии неотрицательности $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0$ (12)	и условии неотрицательности $y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_n \ge 0$ (15)
составить такой план выпуска продукции $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при котором прибыль от реализации продукции будет максимальной при условии, что потребление ресурсов по каждому виду продукции не превзойдет имеющихся запасов.	составить такой набор цен ресурсов $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, при котором общие затраты на ресурсы будут минимальными при условии, что затраты на ресурсы при производстве каждого вида продукции будет не менее прибыли от реализации этой продукции.

Обе задачи обладают следующими свойствами:

1. В одной задаче ищут максимум линейной функции, в другой — минимум.

2. Коэффициенты при переменных в линейной функции одной задачи являются свободными членами системы ограничений в другой.

3. Каждая из задач задана в стандартной форме, причем в задаче максимизации все неравенства вида «?» а в задаче минимизации — все неравенства вида «?».

4. Матрицы коэффициентов при переменных в системах ограничений обеих задач являются транспонированными друг к другу:

для задачи i а $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$

для задачи ii a′ $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

5. Число неравенств в системе ограничений одной задачи совпадает с числом переменных в другой задаче.

6. Условия неотрицательности переменных имеются в обеих задачах.

Две задачи i и ii линейного программирования, обладающие указанными свойствами, называются *симметричными* взаимно двойственными задачами. В дальнейшем для простоты будем называть их просто *двойственными задачами.*

Исходя из определения, можно предложить следующий алгоритм составления двойственной задачи.

1. Привести все неравенства системы ограничений исходной задачи к одному смыслу: если в исходной задаче ищут максимум линейной функции, то все неравенства системы ограничений привести к виду «?», а если минимум - к виду «?». для этого неравенства, в которых данное требование не выполняется, умножить на (-1).

2. Составить расширенную матрицу системы a_1, в которую включить матрицу коэффициентов при переменных a, столбец свободных членов системы ограничений и строку коэффициентов при переменных в линейной функции.

3. Найти матрицу a_1?, транспонированную к матрице a_1.

4. Сформулировать двойственную задачу на основании полученной матрицы a_1?и условия неотрицательности переменных.

Пример двойственной задачи

Составить задачу, двойственную следующей задаче:

$F = -x_1 + 2x_2 \to \max$

при ограничениях:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 1 \\ -x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le -1 \\ -x_1 + 4x_2 \le 24 \\ x_1 - x_2 \le 3 \\ -x_1 - x_2 \le -5 \end{cases}$$

2. Составим расширенную матрицу системы:

$$a_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 24 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & Z \end{pmatrix}$$

3. Найдем матрицу a' транспонированную к a_1:

$$a' = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 24 & 3 & -5 & Z \end{pmatrix}$$

4. Сформулируем двойственную задачу:

$Z = -y_1 + 24y_2 + 3y_3 - 5y_4 \to \min$

при ограничениях

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \ge -1 \\ y_1 + 4y_2 - y_3 - y_4 \ge 2 \\ y_1 \ge 0, y_2 \ge 0, \ldots, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

Лекция 5
ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Особенности экономико-математической модели транспортной задачи:

• система ограничений есть система уравнений (т.е. транспортная задача задана в канонической форме);

• коэффициенты при переменных системы ограничений равны единице или нулю;

• каждая переменная входит в систему ограничений два раза.

Для математической формулировки транспортной задачи в общей постановке обозначим через c_{ij} коэффициенты затрат, через M_i - мощности поставщиков, через n_j - мощности потребителей, где $i = 1,\ 2,\ ...,m;\quad j = 1,\ 2,\ ...,n;$ m - число поставщиков, n - число потребителей. Тогда система ограничений примет вид:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = M_i,\quad i = 1,2,...,m, \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = N_j,\ j = 1,2,...,n, \tag{2}$$

Система (1) включает в себя уравнение баланса по строкам, а система (2) - по столбцам таблицы поставок. Линейная функция в данном случае

$$F = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij}\,. \tag{3}$$

Математическая формулировка транспортной задачи в общей постановке будет следующей: на множестве неотрицательных (допустимых) решений системы ограничений (1), (2) найти такое решение $x = (x_{11},\ x_{12},\ ..,\ x_{ij},\ \ldots, x_{mn})$, при котором значение линейной функции (3) минимально.

Произвольное допустимое решение $x = (x_{11},\ x_{12},\ ..,\ x_{ij},\ \ldots, x_{mn})$ системы ограничений (1), (2) назовем распределением поставок. Такое решение задает заполнение таблицы поставок, поэтому в дальнейшем значение произвольной переменной x_{ij} и содержимое соответствующей клетки таблицы поставок будут отождествляться.

Транспортная задача, приведенная в примере, обладает важной особенностью: суммарная мощность поставщиков равна суммарной мощности потребителей, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} N_i = \sum_{i=1}^{m} M_j$$

Такие транспортные задачи называются закрытыми (говорят также, что транспортная задача в этом случае имеет закрытую модель). В противном случае транспортная задача называется открытой (открытая модель транспортной задачи).

Рассмотрим закрытую транспортную задачу, являясь задачей линейного программирования, транспортная задача может быть решена симплексным методом. Однако, специфичная форма системы ограничений данной задачи позволяет существенно упростить обычный симплексный метод. Модификация симплексного метода применительно к транспортной задаче называется распределительным методом. По аналогии с общим случаем решение в нем осуществляется по шагам, и каждому шагу соответствует разбиение переменных на основные (базисные) и неосновные (свободные).

Число r основных переменных транспортной задачи равно рангу системы линейных уравнений (максимальному числу линейно независимых уравнений в системе ограничений).

Пример транспортной задачи

Построить экономико-математическую модель следующей задачи. имеются три поставщика и четыре потребителя. мощность поставщиков и спросы потребителей, а также затраты на перевозку единицы груза для каждой пары "поставщик - потребитель" сведены в таблицу поставок.

Таблица 3

поставщики	мощность поставщиков	потребители и их спрос			
		1	2	3	4
		20	110	40	110
1	60	1	2	5	3
		x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}
2	120	1	6	5	2
		x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}
3	106	6	3	7	4
		x_{31}	x_{32}	x_{33}	x_{34}

В левом верхнем углу произвольной (ij-клетки (i - номер строки, j - номер столбца) стоит так называемый коэффициент затрат - затраты на перевозку единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю, например, в левом верхнем углу клетки (1, 4) стоит число 3, следовательно, перевозка единицы груза от 1-го поставщика к 4-му потребителю обойдется в 3 условных денежных единицы и т. д.

Задача ставится следующим образом: найти объемы перевозок для каждой пары «поставщик — потребитель» так, чтобы:

1) мощности всех поставщиков были реализованы;

2) спросы всех потребителей были удовлетворены;

3) суммарные затраты на перевозку были бы минимальны.

Решение. Построим экономико-математическую модель данной задачи, искомый объем перевозки от i-го поставщика к j-му потребителю обозначим черёз x_{ij} и назовём поставкой клетки (i,j). Например, x_{12} - искомый объем перевозки от 1- го поставщика ко 2-му потребителю или поставка клетки (1,2) и т. д. заданные мощности поставщиков и спросы потребителей накладывают ограничения на значения неизвестных x. так, например, объем груза, забираемого от 1 -го поставщика, должен быть равен мощности этого поставщика - 60 единицам, т.е. $x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=60$ (уравнение баланса по первой строке). Таким образом, чтобы мощность каждого из поставщиков была реализована, необходимо составить уравнения баланса для каждой строки таблицы поставок, т. е.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=60, \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=120, \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=100. \end{cases} \tag{4}$$

Аналогично, чтобы спрос каждого из потребителей был удовлетворен, подобные уравнения баланса составляем для каждого столбика таблицы поставок:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{34}=20, \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=110, \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=40, \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=110. \end{cases} \tag{5}$$

Очевидно, что объем перевозимого груза не может быть отрицательным, поэтому следует дополнительно предположить, что

$x_{ij}\geq 0$ ($i=$ 1, 2, 3; $j=$ 1, 2, 3, 4).

Суммарные затраты р на перевозку выражаются через коэффициенты затрат и поставки следующим образом;

$$F = 1x_{11} + 2x_{12} + 5x_{13} + 3x_{14} + 1x_{21} + 6x_{22} + 5x_{23} + 2x_{24} + \\ +6x_{31} + 3x_{32} + 7x_{33} + 4x_{34} \qquad (6)$$

Найдем первоначальное базисное распределение поставок для транспортной задачи методом «северо-западного угла».

Решение. дадим переменной x_{11} максимально возможное значение или, иными словами, максимально возможную поставку в клетку (1,1) - "северо-западный" угол таблицы поставок: x_{11}= min {60, 20) = 20. После этого спрос 1-го потребителя будет полностью удовлетворен, в результате чего первый столбец таблицы поставок выпадет из последующего рассмотрения (заполненные клетки будем перечеркивать сплошной линией (табл. 4) клетки, выпавшие из последующего рассмотрения, перечеркнуты пунктирной линией. в таблице поставок найдем новый "северо-западный" угол - клетку (1,2) и дадим в нее максимально возможное значение. Учитывая, что 1-й поставщик уже отдал 20 единиц груза и у него осталось только 40 = 60 - 20 единиц груза, получаем, что $x_{12} = min\{40,\ 110\} = 40$. После этого мощность 1-го поставщика полностью реализована и из рассмотрения выпадет первая строка таблицы поставок (перечеркиваем сплошной линией клетку (1,2) и пунктирной линией оставшиеся свободные клетки первой строки). в оставшейся таблице снова находим "северо-западный угол" и т. д. в результате получаем следующее исходное распределение поставок (табл.4).

Таблица 4.

	20	110	40	110
60	1 20	2 40	5	5
120	1	6 70	5 40	2 10
100	6	3	7	4 100

Решение методом наименьших затрат.

Решение. Находим в таблице поставок (табл.4) клетки с наименьшим коэффициентом затрат. Таких клеток две – (1,1) и (2,1) с коэффициентами затрат, равными 1. сравним максимально возможные поставки для этих клеток: для клетки (1,1) $x_{11} = min\{60,\ 20\} = 20$, для клетки (2,1) $x_{21} = min\{120,\ 20\} = 20$.

Так как они совпадают, то максимально возможную поставку даем в любую из них. Например, даем поставку, равную 20 единицам, в клетку (2,1). в результате спрос первого потребителя удовлетворен и первый столбец таблицы поставок выпадает из последующего рассмотрения (табл. 5.).

Таблица 5

	20	110	40	110
60	1	2	5	3
120	1 20	6	5	2
100	6	3	7	7

В оставшейся таблице наименьшим коэффициентом затрат обладают две клетки: $c_{12} = c_{24} = 2$. Сравним максимально возможные поставки для этих клеток: для клетки (1,2) $x_{12} = min\{60,\ 110\} = 60$; для клетки (2,4) $x_{24} = min\{120 - 20,\ 110\} = 100$. Даем поставку в клетку (2,4), для которой максимально возможная поставка оказалась больше: $x_{24} = 100$. При этом из рассмотрения выпадает вторая строка таблицы поставок (табл. 6).

Таблица 6

	20	110	40	110
60	1	2	5	3
120	1 20	6	5	2 100
100	6	3	7	4

Аналогично, продолжая заполнение таблицы поставок шаг за шагом, получаем $x_{12} = min\{60,\ 110\} = 60$, $x_{32} = min\{100,\ 110 - 60\} = 50$, $x_{34} = min\{100 - 50,\ 110 - 100\} = 10$, $x_{33} = min\{100 - 60,\ 40\} = 40$, табл. 7.

Таблица 7

	20	110	40	110
60	1	2 60	5	3
120	1 20	6	5	2 100
100	6	3 50	7 40	4 10

Лекция 6

ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Динамическое программирование – метод оптимизации, приспособленный к операциям, в которых процесс принятия решений может быть разбит на этапы.

Приведем общую постановку задачи ДП. Рассматривается управляемый процесс, например, экономический процесс распределения средств между предприятиями, использования ресурсов в течение ряда лет, замены оборудования, пополнения запасов и т. п. В результате управления система (объект управления) s переводится из начального состояния s_0 в состояние $\hat{s}$. предположим, что управление можно разбить на n шагов, т.е. решение принимается последовательно на каждом шаге, а управление, переводящее систему s из начального состояния в конечное, представляет собой совокупность n пошаговых управлений. Обозначим через x_k, управление на k-м шаге $(k=1,\ 2,\ ...,n)$. Переменные x_k, удовлетворяют некоторым ограничениям и в этом смысле называются допустимыми.

Пусть $x(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n,)$ - управление, переводящее систему s из состояния s_0 в состояние s. Обозначим через s_k состояние системы после k-го шага управления. Получаем последовательность состояний $s_0, s_1,\ ..., s_{k-1}, \ldots, s_n = s$, которую изобразим кружками (рис. 1).

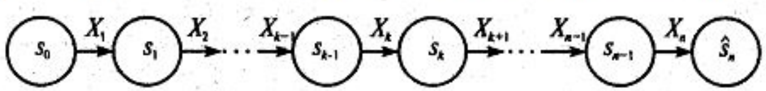


Рис. 1

Показатель эффективности рассматриваемой управляемой операции - целевая функция - зависит от начального состояния и управления:

$$z = f(s_0, x) \tag{1}$$

Сделаем несколько предположений.

1. Состояние s_k системы в конце k-го шага зависит только от предшествующего состояния s_{k-1} и управления на k-м шаге x_k. Это требование называется "отсутствием последействия". Сформулированное положение записывается в виде уравнений

$$s_k = \varphi_k(s_{k-1}, Xk),\ k = 1,2,...,\ n,$$

которые называются уравнениями состояний.

2. Целевая функция (2) является аддитивной от показателя

тивности каждого шага. Обозначим показатель эффективности k-го шага через $Z_k = f_k(s_{k-1}, Xk), k = 1,2,...,n,$ тогда

$$Z_k = \sum_{k=1}^{n} f_k(s_{k-1}, Xk) \qquad (2)$$

Задача пошаговой оптимизации формулируется так: определить такое допустимое управление x, переводящее систему s из состояния в s_0 в состояние s, при котором целевая функция (2) принимает наибольшее (наименьшее) значение. Выделим особенности модели ДП:

1. Задача оптимизации интерпретируется как n-шаговый процесс управления.

2. Целевая функция равна сумме целевых функций каждого шага.

3. Выбор управления на k-м шаге зависит только от состояния системы к этому шагу, не влияет на предшествующие шаги (нет обратной связи).

4. Состояние s_k после k-го шага управления зависит только от предшествующего состояния s_{k-1} и управления x_k (отсутствие последействия).

5. На каждом шаге управление x_k, зависит от конечного числа управляющих переменных, а состояние s_k - от конечного числа параметров.

Пример решения задачи

Планируется деятельность четырех промышленных предприятий (системы) на очередной год. Начальные средства: s_0 = 5 усл. ед. размеры вложения в каждое предприятие кратны 1 усл. ед. средства x, выделенные k-му предприятию (k=1, 2, 3, 4), приносят в конце года прибыль $f_k(x)$. Функции $f_k(x)$ заданы таблично (табл. 8). Принято считать, что:

а) прибыль $f_k(x)$ не зависит от вложения средств в другие предприятия;

б) прибыль от каждого предприятия выражается в одних условных единицах;

в) суммарная прибыль равна сумме прибылей, полученных от каждого предприятия.

Определить, какое количество средств нужно выделить каждому предприятию, чтобы суммарная прибыль была наибольшей.

Таблица 8

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	8	6	3	4
2	10	9	4	6
3	11	11	7	8
4	12	13	11	13
5	18	15	18	16

Решение. Обозначим через x_k количество средств, выделенных k-му предприятию. Суммарная прибыль равна $Z=\sum_{k=1}^{4} f_k x_k, \quad x_k \ge 0, \quad k=1,2,3,4.$

Переменные x удовлетворяют ограничениям: $\sum_{k=1}^{4} x_k = 5, \quad x_k \ge 0, k=1,2,3,4.$

Требуется найти переменные x_1, x_2, x_3, x_4, удовлетворяющие системе ограничений и обращающие в максимум функцию.

Особенности модели. Ограничения линейные, но переменные целочисленные, а функции $f_k(x_k)$ заданы таблично, поэтому нельзя применить методы целочисленного линейного программирования.

Схема решения задачи методом ДП имеет следующий вид: процесс решения распределения средств s_0=5 можно рассматривать как 4-шаговый, номер шага совпадет с номером предприятия; выбор переменных x_1, x_2, x_3, x_4 - управление соответственно на i, ii, iii, iv шагах. s - конечное состояние процесса распределения - равно нулю, так как все средства должны быть вложены в производство, s=0. схема распределения показана на рис. 6. Уравнения состояний в данной задаче имеют вид:

$$s_k = s_{k-1} - x_k, \quad k=1,2,3,4,$$

где s_k - параметр состояния - количество средств, оставшихся после k-го шага, т.е. средства, которые остается распределить между оставшимися 4 - k предприятиями.

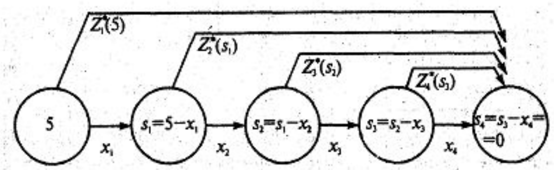


Рис. 6

Введем в рассмотрение функцию $Z_k^{\bullet}(s_{k-1})$ - условную оптимальную прибыль, полученную от k-го,..., 4-го предприятий, если между ними распределялись оптимальным образом средства $s_{k-1} (0 \le s_{k-1} \le 5)$. Допустимые управления на k-м шаге удовлетворяют условию: $0 \le x_k \le s_{k-1}$ (либо k-му предприятию ничего не выделяем, x_k=0, либо не больше того, что имеем к k-му шагу, x_k? s_{k-1} .Уравнения имеют вид:

$$k=4, \quad s_4 = 0 \Rightarrow Z_4^{\bullet}(s_3) = \max_{0 \le x_4 \le s_3} f_4(x_4) \tag{a}$$

$$Z_3^{\bullet}(s_2) = \max_{0 \le x_3 \le s_2} \{ f_3(x_3) + Z_4^{\bullet}(s_3) \} \qquad (б)$$

$$Z_2^{\bullet}(s_1) = \max_{0 \le x_2 \le s_1} \{ f_2(x_2) + Z_3^{\bullet}(s_2) \} \qquad (в)$$

$$Z_1^{\bullet}(5) = \max_{0 \le x_1 \le 5} \{ f_1(x_1) + Z_2^{\bullet}(s_1) \} \qquad (г)$$

Последовательно решаем записанные уравнения, проводя условную оптимизацию каждого шага.

iv шаг. В таблице 8 $f_4(x)$ прибыли монотонно возрастают, поэтому все средства, оставшиеся к iv шагу, следует вложить в 4-е предприятие. При этом для возможных значений s_3=0, 1, ..., 5 получим:

$$Z_4^{\bullet}(s_3) = f_4(x_3) \text{ и } x_4^{\bullet}(s_3) = s_3$$

iii шаг. Делаем все предположения относительно остатка средств s_2 к iii шагу (т.е. после выбора x_1 и x_2). s_2 может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5. В зависимости от этого выбираем $0 \le x_3 \le s_2$, находим $s_3 = s_2 - x_3$ и сравниваем для разных x_3 при фиксированном s_2 значения суммы $f_3(x_3) + Z_4^{\bullet}(s_3)$. Для каждого s_2 наибольшее из этих значений есть $Z_3^{\bullet}(s_2)$ - условная оптимальная прибыль, полученная при оптимальном распределении средств s_2 между 3-м и 4-м предприятиями.

ii шаг. Условная оптимизация, согласно уравнению (в), проведена в таблице 9 при k=2.

i шаг. Условная оптимизация (уравнение (г) проведена в табл. 9 при k=1 для s_0=5. поясним решение подробно: если x=0, то s_1=5, прибыль, полученная от четырех предприятий при условии, что s_1=5 ед. средств между оставшимися тремя предприятиями будут распределены оптимально, равна $f_1(0) + Z_2^{\bullet}(5) = 0 + 19$. Если x_1=1, то s_2=4. Суммарная прибыль при условии, что s_2=4 ед. средств между оставшимися тремя предприятиями будут распределены оптимально, равна $f_1(1) + Z_2^{\bullet}(4) = 8 + 16 = 24$. Аналогично при $x_1 = 2, s_2 = 3$ и $f_1(2) + Z_2^{\bullet}(3) = 10 + 13 = 23$;

при x_1=3, s_2= 2 и $f_1(3) + Z_2^{\bullet}(3) = 11 + 10 = 21$;

при x_1=4, s_2= 1 и $f_1(4) + Z_2^{\bullet}(1) = 12 + 16 = 28$;

при x_1=5, s_2= 0 и $f_1(5) + Z_2^{\bullet}(0) = 18 + 0 = 18$.

сравнивая числа, получим $Z_1^{\bullet}(5) = 24$ усл. ед. $= z_{\max}$ при $x_1^{\bullet} = x_2^{*}(5) = 1$.

Максимум суммарной прибыли равен 24 усл. ед. средств при условии, что 1-му предприятию выделено 1 усл. ед.; 2-му предприятию - 2 усл. ед.; 3-му предприятию - 1 усл. ед.; 4-му предприятию - 1 усл.ед.

Таблица 9

s_{k-1}	x_k	s_k	k=3			k=2			k=1		
			$f_3(x_3)+$ $+Z_4^\bullet(s_3)$	$Z_3^\bullet$ (s_2)	$x_3^\bullet$ (s_2)	$f_2(x2)+$ $+Z_3^\bullet(s_2)$	$Z_2^\bullet$ (s_1)	$x_2^\bullet$ (s_1)	$f_1(x_1)+$ $+Z_2^\bullet(s_1)$	$Z_1^\bullet$ (s_0)	$x_1^\bullet$ (s_0)
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0+1=1			0+4=4			0+6=6	8	1
	1	0	3+1=3	4	0	6+0=6	6	1	8+0=8		
2	0	2	0+6=6			0+7=7			0+10=10		
	1	1	3+4=4	7	1	6+4=10	10	1	8+6=14	14	1
	2	0	4+0=4			9+0=9			10+0=10		
	0	3	0+8=8			0+9=9			0+13=13		
3	1	2	3+6=9	9	1	6+7=13	13	1	8+10=18	18	1
	2	1	4+4=8			9+4=13		2	10+6=16		

Лекция 7

МНОГОМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Причины появления многомерности

Как отмечалось выше, всякая модель операции должна иметь единственный критерий. к сожалению, выбор такого критерия часто представляет значительную трудность. поэтому приходится работать с не до конца формализованными моделями, в которых фигурируют несколько показателей, уменьшение или увеличение которых желательно для оперирующей стороны. в таких случаях говорят об исследовании многокритериальных задач.

Определение**.** Многокритериальной задачей называется набор $\langle U, g^1,\ldots,g^m \rangle$, где u – множество, а $g^i : U \to \mathbb{R}$ $(i=1,\ldots,m)$ – функции.

Множество u интерпретируется как множество стратегий оперирующей стороны, а функции g^i – как ее критерии.

Пример такого рода дает известный лозунг советских времен: «получить максимум продукции при минимуме затрат». Если подходить к этой ситуации формально, легко придти к бессмысленности: свести затраты к нулю нетрудно, но при этом и выпуск продукции будет нулевым, тем не менее, оба показателя, и выпуск продукции, и размер затрат верно отражают стремления оперирующей стороны.

При формализации многокритериальных задач в теории исследования операций выделены некоторые часто использующиеся приемы. О них и поговорим, подчеркнем, что выбор такого приема каждый раз должен определяться из содержательного анализа моделируемой операции, тем более, что приведенные ниже примеры далеко не исчерпывают всех возможностей.

Причины появления многокритериальности могут быть различными, например, оперирующая сторона может представлять собой группу лиц, каждое из которых имеет, вообще говоря, свои цели.

Часто многокритериальность появляется при рассмотрении динамических процессов. Например, если коммерческая фирма стремится к увеличению прибыли, и ее функционирование рассматривается на достаточно длинном временном интервале, то возникает целый ряд показателей, характеризующих прибыль в каждый из моментов времени.

Иногда удобно чисто формально рассматривать как многокритериальную задачу обычную модель операции, в которой имеется неопределенный фактор, рассматривая в качестве частных критериев значения общего критерия операции при конкретных значениях неопределенных факторов.

В ряде случаев задачу с неопределенными факторами преобразуют в двухкритериальную модель, формулируя задачу минимум и задачу максимум.

Очень часто приходится сталкиваться с ситуацией, когда оперирующая сторона просто не может сформулировать свои предпочтения на вербальном уровне, как в приведенном выше примере.

Иногда происходит путаница, и в качестве критерия задаются ограничения, которые должны соблюдаться в данной задаче. Так, например, формулируя задачу на создание межпланетного космического корабля, С.П. Королев писал, что марс должен быть достигнут а) за минимальное время и б) с минимальной затратой средств. Понятно, что если речь идет о пилотируемом полете, то его длительность должна быть не слишком большой (ограничение!). Но вряд ли кто-то станет стремиться к сокращению этого времени на несколько минут, или даже часов, за счет ухудшения других характеристик полета.

Отметим, что критерий в любой модели операции должен выражаться через управления оперирующей стороны и, быть может неопределенные факторы. Например, стремление выйти замуж за миллионера может быть лишь благим пожеланием, а не целью, если у оперирующей стороны нет реальных возможностей встретить хотя бы одного миллионера. Точно так же лозунг «наша цель – коммунизм» нельзя рассматривать как формулировку цели операции, поскольку совершенно не ясно, например, ведет ли к достижению этой цели выращивание кукурузы в приполярных районах, или нет.

Эти соображения приводят к следующим определениям.

Определение. Многокритериальной задачей называется набор $\left\langle U, g^1, g^2, \ldots, g^m \right\rangle$, где u – множество, а g^i – функции, отображающие u во множество действительных чисел $\mathbb{R}$.

Нашей целью будет рассмотрение способов построения на основе многокритериальной задачи $\left\langle U, g^1, g^2, \ldots, g^m \right\rangle$ модели операции вида $\left\langle U, g \right\rangle$.

Часто такую операцию строят, задавая функцию $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, и полагая, что $g(u) = F\left(g^1(u), g^2(u), \ldots, g^m(u)\right)$. функцию f в таком случае называют функцией свертки (или просто сверткой) критериев.

Примеры сверток

По техническим причинам удобно разделить цели операций на два класса: количественные и качественные. К первым относятся те, которые могут быть либо достигнуты, либо нет. Ко вторым – те, степень достижения которых может быть выражена числом.

Разумеется, качественная цель может быть описана количественным критерием, который, например, принимает значение 1, если цель достигнута, и значение 0 в противном случае.

Экономический способ свертки. свертка частных критериев $g^1,\dots,g^m$ представляет собой взвешенную сумму $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g^i$.

В экономических моделях данный способ свертки часто используется при агрегировании абсолютно взаимозаменяемых продуктов.

Пример. Предприятие выпускает m видов продукции. критерии $g^1,\dots,g^m$ выражают количества продукции каждого из видов, выпущенных предприятием. доходы предприятия от реализации продукции выражаются сверткой $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g^i$. коэффициенты свертки в этом случае имеют смысл цен.

Пример. Рассмотрим деятельность фирмы за m лет. критерии $g^1,\dots,g^m$ выражают прибыль фирмы в соответствующие годы. свертка $\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g^i$ оценивает суммарную прибыль за весь период. числа $\lambda_1,\dots\lambda_m$ в этом случае имеют смысл коэффициентов дисконтирования.

Пример. В классической биатлонной гонке имеется два критерия: количество промахов g^1 и время прохождения дистанции g^2. Результат спортсмена оценивается по линейной свертке $60\frac{\text{секунд}}{\text{промах}}g^1+1\cdot g^2$ (если время измерять в секундах).

Разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные. пусть имеется количественный критерий g и число γ. свертка задает качественный критерий $h=\begin{cases}1, \text{ если } g\ge\gamma,\\ 0 \text{ в противном случае.}\end{cases}$

Пример. Знания студента на экзамене оценивается количественным критерием g, принимающим значения от двух до пяти. Качественная цель сдать экзамен описывается критерием $h = \begin{cases} 1, \text{если } g \geq 3, \\ 0 \text{ в противном случае.} \end{cases}$

Пример. При выборе работы люди часто ориентируются на два критерия: размер заработной платы и удовлетворение от работы. Во многих случаях нет стремления к максимизации заработной платы, гораздо важнее, чтобы она обеспечивала некоторый приемлемый уровень жизни. например, не секрет, что в предперестроечные годы уровень реальных доходов работников торговли заметно превышал аналогичный показатель у врачей, учителей и инженеров, однако, заметного перетока кадров в торговлю не наблюдалось. когда в годы реформ уровень жизни бюджетников заметно упал, многие из них занялись розничной торговлей, чтобы обеспечить себе тот самый приемлемый уровень жизни.

Пример. В одной из телевизионных программ 28.11.19 был сформулирован следующий тезис: «женщина должна стремиться к тому, чтобы объем талии не превышал объема бедер». Здесь налицо замена двух количественных критериев (объем талии и объем бедер) одним качественным.

Лексикографическая свертка. Пусть даны критерии $g^1,\ldots,g^m$, ранжированные в порядке возрастания номеров. Сначала находятся все точки максимума критерия g^1, из них выбираются те, которые доставляют максимум критерию g^2 и так далее. Наконец, из уже отобранных, выбираются те, которые доставляют максимум критерию g^m. Выбранные на последнем этапе стратегии называются точками лексикографического максимума.

Пример. При формировании структуры государственных расходов самыми важными являются расходы на государственных служащих, затем идут затраты на оборону, на содержание силовых структур, и так далее. В конце списка обычно оказываются сельское хозяйство и культура. Примерно так на практике формируется расходная часть государственного бюджета.

Дизъюнкция. Пусть есть m качественных критериев $g^1,\ldots,g^m$. цель, состоящая в достижении, по крайней мере, одной из частных целей описывается критерием $g = 1 - \prod_{i=1}^{m}(1 - g^i)$.

Конъюнкция. Пусть есть m качественных критериев $g^1,\ldots,g^m$. Цель, состоящая в достижении, сразу всех частных целей описывается критерием $g = \prod_{i=1}^{m} g^i$.

Пример. Если за сессию студенту предстоит сдать m экзаменов и каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$ описывает сдачу одного из них, то цель, состоящая в успешной сдаче сессии, описывается критерием $g=\prod_{i=1}^{m} g^i$.

Отрицание. Пусть имеется качественный критерий g. критерий $1-g$ описывает цель, состоящую в не достижении исходной.

Пример. Если исходная цель g состоит в том, чтобы избежать скандала, то цель, состоящая в попадании в скандальную хронику, описывается критерием $1-g$.

Обобщенная дизъюнкция. Часто используется следующий способ свертки. Пусть есть m количественных критериев $g^1,\ldots,g^m$. результирующий критерий образуется по правилу $g(u)=\max\limits_{1\le i\le m} \lambda_i g^i(u)$.

Пример. Пусть в шоссейной велогонке принимают участие m спортсменов из одной команды и критерии $g^1,\ldots,g^m$ задают места, занятые ее членами. Очень часто все члены команды работают на одного лидера, то есть критерий команды есть $g(u)=\max\limits_{1\le i\le m} g^i(u)$.

Обобщенная конъюнкция. Это свертка, при которой количественные критерии $g^1,\ldots,g^m$ заменяются общим критерием $g(u)=\min\limits_{1\le i\le m} \lambda_i g^i(u)$.

В экономических моделях такой способ свертки применяется при агрегировании абсолютно не взаимозаменяемых продуктов.

Пример. Пусть для производства изделия требуются комплектующие m видов и количества произведенных деталей описываются числами $g^1,\ldots,g^m$. критерий $g(u)=\min\limits_{1\le i\le m} \lambda_i g^i(u)$ описывает количество готовых изделий, которое из них можно собрать. Числа $\dfrac{1}{\lambda_i}$ имеют при этом смысл количества деталей i-го вида, необходимых для сборки одного готового изделия.

Пример. По понятным физическим причинам, скорость каравана судов определяется скоростью самого тихоходного судна. Это обстоятельство нашло свое отражение даже в морском уставе.

Случайная свертка. В литературе встречается и такой способ свертки критериев. на множестве критериев задается вероятностная мера, и критерий операции выбирается случайным образом в соответствии с этой мерой. понятно, что если при этом оперирующая сторона ориентируется на математическое ожидание, то получается способ свертки, формально совпадающий с экономическим.

Приведенные выше примеры являются наиболее простыми, и потому наиболее часто встречающимися. Но, разумеется, бывают и более экзотические способы.

Принцип наименьшего сожаления. Это свертка, при которой количественные критерии $g^1,\ldots,g^m$ заменяются общим критерием $g(u)=\max\limits_{1\le i\le m}\left[\max\limits_{v\in U} g^i(v)-g^i(u)\right]$, который нужно минимизировать.

Принцип принятия решений в ЕЭС. По новым законам решение принимается по правилу двойного большинства: решение считается принятым, если за него проголосовало 55% стран население которых составляет 65%. в этом случае можно считать, что имеется столько качественных критериев, сколько стран принимает участие в голосовании. Из них делается два количественных критерия, которые в свою очередь сворачиваются в один качественный.

Старый способ судейства в фигурном катании. Каждый из девяти судей выставлял две оценки от 0 до 6.0 (с шагом 0.1). Затем все участники ранжировались в соответствии с суммой этих оценок (в случае равенства сумм выше ставился участник, у которого выше оценка за артистизм). затем вычислялась сумма мест за выполнение данной программы (короткой или произвольной). Потом участники ранжировались в соответствии с взвешенной суммой показателей за короткую и произвольную программу, что и давало результирующее место участника.

Способ судейства в прыжках в длину. Сравнение результатов двух участников производится по самому дальнему прыжку каждого из них. Если эти прыжки одинаковы, то во внимание принимается следующий по дальности и так далее.

Лексимин. Во многих социальных моделях и в теоретической математике полезен следующий способ свертки. При сравнении двух решений многокритериальной задачи прежде всего сравниваются самые маленькие значения критериев (возможно, свои у каждого варианта). Если они одинаковы, то во внимание принимаются следующие по величине и так далее.

Разумеется, не существует и не может существовать идеального способа свертки, пригодного на все случаи жизни. Если уж правилами предусмотрен такой способ подведения итогов, как в предыдущем примере, то в соответствующей модели надо пользоваться именно им. но совсем глупо было бы использовать его в задаче о караване судов.

Лекция 8

Теорема о свертке

Теорема. Пусть каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$ принимает лишь два значения 0 и 1, а $f:\{0,1\}^m\to\{0,1\}$ – произвольная функция. тогда критерий g, определенный условием $g(u)=f(g^1(u),\ldots,g^m(u))$, может быть выражен через следующие элементарные операции:

1. конъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to \prod_{i=1}^{m} g^i$;
2. дизъюнкция: $g^1,\ldots,g^m \to 1-\prod_{i=1}^{m}(1-g^i)$;
3. отрицание: $g^i \to 1-g^i$.

Доказательство. Пусть $y=(y_1,\ldots,y_m)$ – произвольный булев вектор размерности m (здесь y_i равны 0 или 1 при любом $i=1,\ldots,m$). рассмотрим функцию f_y $:\{0,1\}^m\to\{0,1\}$, определенную условием $F_y(x)=\prod_{i=1}^{m} z_i$, где $z_i=x_i$, если $y_i=1$, и $z_i=1-x_i$, если $y_i=0$. непосредственно проверяется, что $f_y(y)=1$, и $f_y(x)=0$ для любого $x\neq y$.

Пример. На референдуме о сохранении союза советских социалистических республик гражданам предлагалось ответить на четыре вопроса. Власти предлагали своим сторонникам ответить «да, да, нет, да». таким образом, есть, четыре вспомогательных качественных критерия g^i (ответ на i-ый вопрос). Если общая цель g состоит в лояльности власти, то она выражается через частные с помощью свертки $g=g^1g^2(1-g^3)g^4$.

Для заданной нам функции f, обозначим $y=\{y\colon f(y)=1\}$. Покажем, что интересующий нас критерий g представляется в виде

$$g(u)=1-\prod_{y\in Y}\left(1-F_y(g^1(u),\ldots,g^m(u))\right). \tag{1}$$

В самом деле, если $g(u)=1$, то по определению вектор $t=(g^1(u),\ldots,g^m(u))$ принадлежит множеству y. значит, произведение в формуле (28) содержит множитель $(1-f_y(g^1(u),\ldots,g^m(u)))$, равный нулю. Следовательно, и все произведение равно нулю, а вся правая часть формулы (1) равна 1.

Если же $g(u)=0$, то вектор $t=(g^1(u),\ldots,g^m(u))$ не принадлежит множеству y, и для всех $y\in y$ имеем $f_y(g^1(u),\ldots,g^m(u))=0$. значит, для этого u все сомножители в формуле (28) равны 1, а тогда и произведение в правой части равенства (28) равно 1, а сама правая часть равна нулю.

Для завершения доказательства остается заметить, что при построении функций f_y мы пользовались лишь операциями отрицания и конъюнкции, а в формуле (1) использовалась еще и дизъюнкция.

Замечание. Легко видеть, что сама операция дизъюнкции может быть выражена через конъюнкцию и отрицание, то есть список «элементарных» операций может быть сокращен.

Теорема. Пусть каждый из критериев $g^1,\ldots,g^m$ принимает лишь конечное число значений, а $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ – произвольная функция. Тогда критерий g, определенный условием $g(u)=f(g^1(u),\ldots,g^m(u))$, может быть выражен через следующие элементарные операции:

1. экономическая свертка: $g^1,\ldots,g^m\to\sum_{i=1}^{m}\lambda_i g^i$;

2. разбиение на удовлетворительные и неудовлетворительные: $g^i\to$
$$\begin{cases}1, \text{ если } g^i\ge\gamma^i,\\ 0 \text{ в противном случае;}\end{cases}$$

3. конъюнкция: $g^1,\ldots,g^m\to\prod_{i=1}^{m}g^i$;

4. дизъюнкция: $g^1,\ldots,g^m\to 1-\prod_{i=1}^{m}(1-g^i)$;

5. отрицание: $g^i\to 1-g^i$.

Доказательство. Значения, которые может принимать критерий g^i, обозначим в порядке возрастания символами $\gamma_1^i,\gamma_2^i,\ldots,\gamma_{k_i}^i$. при сформулированных условиях критерий g может тоже принимать лишь конечное число значений. Обозначим их в порядке возрастания символами $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_k$. дальнейшие рассуждения разобьем на шесть шагов.

1. для каждого i=1,…,m и каждого $\gamma\in\{\gamma_1^i,\gamma_2^i,\ldots,\gamma_{k_i}^i\}$ с помощью элементарной операции второго типа образуем вспомогательный критерий $g_\gamma^i(u)=\begin{cases}1, \text{ если } g^i(u)\ge\gamma,\\ 0, \text{ в противном случае.}\end{cases}$. разумеется, критерий g_γ^i может быть выражен как функция критерия g^i.

2. верно и обратное: критерий g^i может быть представлен как функция критериев g_γ^i. чтобы убедиться в этом, заметим, что

$$g^i(u)=\sum_{j=1}^{k_i}\left(\gamma_j^i-\gamma_{j-1}^i\right)g_{\gamma_j}^i(u), \qquad (2)$$

где положено γ_0^i=0.

В самом деле, если $g^i(u)=\gamma_l^i$, то для всех $j>l$ справедливо равенство $g^i_{\gamma_j}(u)=0$, а для всех $j?l$ будем иметь $g^i_{\gamma_j}(u)=1$. поэтому для такого u правая часть равенства (2) может быть переписана в виде $\sum_{j=1}^{l}\left(\gamma_j^i-\gamma_{j-1}^i\right)$. эта сумма, очевидно, равна $\gamma_l^i-\gamma_l^0=\gamma_l^i$, то есть равенство (2) справедливо.

1. рассмотрим вспомогательные критерии $g_\gamma(u)$, определенные условиями

$$g_\gamma(u)=\begin{cases}1, \text{если } g(u)\geq\gamma,\\ 0, \text{в противном случае.}\end{cases}$$

(здесь $\gamma\in\{\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_k\}$). Каждый из этих критериев является функцией критерия g.

2. тогда по условию теоремы, тогда критерий g^i_γ может быть представлен, как функция критериев $g^1,\ldots,g^m$. значит, он может быть представлен и как функция вспомогательных критериев g^i_γ.

3. но каждый из критериев g_γ и g^i_γ принимает лишь значения 0 и 1, поэтому в силу предыдущей теоремы, каждый из критериев g_γ может быть выражен через критерии g^i_γ с использованием лишь элементарных операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

4. аналогично формуле (2) доказывается равенство

$$g(u)=\sum_{j=1}^{k}\left(\gamma_j-\gamma_{j-1}\right)g_{\gamma_j}(u), \text{ где } \gamma_0=0.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что критерии g^i_γ мы получили, пользуясь только сверткой типа 2, на шаге 4 для получения критериев g_γ использовались свертки типов 3,4,5, и, наконец, на шаге 6 использовалась свертка типа 1. теорема доказана.

Лекция 9
МЕТОДЫ СКОЛЬЗЯЩЕГО СРЕДНЕГО И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО СГЛАЖИВАНИЯ

Методы скользящего среднего и экспоненциального сглаживания используются для прогнозирования временных рядов. Формально временной ряд – это множество пар данных (X,Y), в которых X – это моменты или периоды времени (независимая переменная), а Y – параметр (зависимая переменная), характеризующий величину исследуемого явления. Цель исследования временных рядов состоит в выявлении тенденции изменения фактических значений параметра Y во времени и прогнозировании будущих значений Y. Модель, построенную по ретроспективным данным можно использовать при наличии устоявшейся тенденции в динамике значений прогнозируемого параметра. К возможным ситуациям нарушения такой тенденции относятся: коренное изменение плана деятельности фирмы, которая стала терпеть убытки; резкое изменение параметров внутренней или внешней ситуации (цен на сырье; уровня инфляции); стихийные бедствия, военные действия, общественные беспорядки.

Суть методов скользящего среднего и экспоненциального сглаживания состоит в том, фактические уровни исследуемого временного ряда заменяются их средними значениями, погашающими случайные колебания. Это позволяет более четко выделить основную тенденцию изменения исследуемого параметра. Эти относительно простые методы прогнозирования временных рядов, основанные на представлении прогноза y^*_{t+1} в виде суммы m предыдущих наблюдаемых значений y_{t-i} $(i=\overline{1, m-1})$, причем каждое из них учитывается с определенным весовым коэффициентом β_t

$$y^*_{t+1} = \beta_t y_t + \beta_{t-1} y_{t-1} + \dots \beta_{t-m+1} y_{t-m+1}.$$

Использование методов скользящего среднего и экспоненциального сглаживания основано на следующих допущениях:

- временной ряд является ***устойчивым*** в том смысле, что его элементы являются реализациями следующего случайного процесса:

$$y_t = b + \varepsilon_t,$$

где b – неизвестный постоянный параметр, ε_t – случайная ошибка.

- случайная ошибка ε_t имеет нулевое математическое ожидание и постоянную дисперсию;
- данные для различных периодов времени не коррелированны.

Метод скользящего среднего

Расчет прогноза и сглаживание временного ряда методом скользящего среднего производится по формуле

$$y^*_{t+1} = \frac{y_t + y_{t-1} + \ldots + y_{t-m+1}}{m}. \qquad (1)$$

При этом предполагается, что все m значений y_{t-i} за m моментов времени вносят равный вклад в прогнозируемое значение y^*_{t+1} и учитываются с одинаковым весовым коэффициентом $\frac{1}{m}$.

Метод экспоненциального сглаживания

В методе экспоненциального сглаживания весовые коэффициенты предыдущих наблюдаемых значений увеличиваются по мере приближения к последним (по времени) данным. Кроме того, в формировании прогнозируемого значения участвуют все n известных значений y_{t-i} $(i = \overline{1, n-1})$ временного ряда

$$y^*_{t+1} = \alpha\, y_t + \alpha(1-\alpha)\, y_{t-1} + \alpha(1-\alpha)^2\, y_{t-1} + \ldots \qquad (2)$$

Для расчета прогноза и для сглаживания временного ряда методом экспоненциального сглаживания используют формулу (2) в виде

$$y^*_{t+1} = \alpha y_t + (1-\alpha)\, y^*_t, \qquad (3)$$

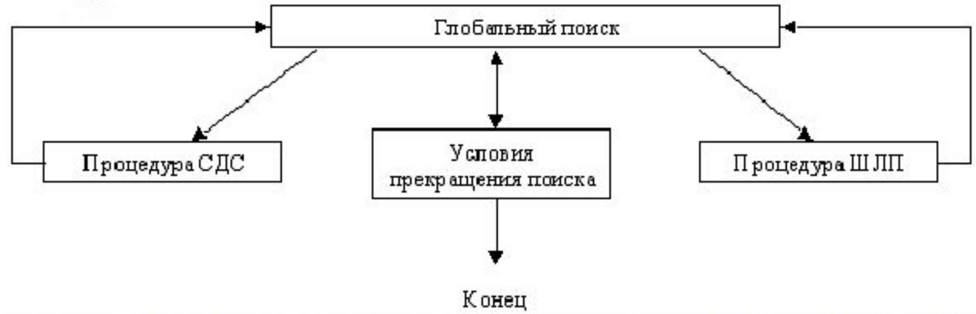
где $\alpha \in (0, 1)$ – константа сглаживания. Таким образом, значение y^*_{t+1} можно вычислить рекуррентно на основании значения y^*_t.

Алгоритм поиска глобального экстремума

Алгоритм поиска глобально-оптимального решения можно использовать для решения задач как параметрической, так и структурной оптимизации. Укрупненная блок-схема алгоритма включает четыре процедуры:

1. синтез допустимой структуры (СДС), обеспечивающий выбор допустимого решения из любой подобласти всей области поиска;
2. шаг локального поиска (ШЛП), обеспечивающий переход от одного решения к другому допустимому решению, как правило, той же структуры, но с улучшенным значением критерия; под шагом локального поиска можно понимать некоторый условный шаг по какому-либо алгоритму поиска локального *экстремума* (например, одна итерация по *методу наискорейшего спуска*);

1. глобальный поиск, управляющий работой процедур СДС и ШЛП;
2. проверка условий прекращения поиска, определяющая конец решения задачи.



Приведем основные рекомендации построения процедур СДС и ШЛП.

В некоторых случаях построение процедуры СДС можно свести к предварительному составлению набора допустимых структур, из которого выбирают структуры при каждом обращении к процедуре СДС. Если суть этой процедуры состоит в выборе по возможности допустимого набора переменных структурной оптимизации, то представляется полезным включать в нее правила выбора переменных, основанные на эвристических соображениях, аналитических и экспериментальных исследованиях, изучении опыта проектирования и эксплуатации аналогичных ТО. Для некоторых сложных или малоизученных задач проектирования трудно построить процедуру СДС, обеспечивающую получение допустимых структур. В этом случае в процедуру целесообразно включать операции преобразования недопустимых структур в допустимые. Набор таких операций можно составить из подходящих эвристических приемов (для задач, связанных с техническими объектами, сборники таких приемов можно найти в соответствующей литературе, в которой решение изобретательских задач рассматривается более подробно). Преобразование недопустимых структур в допустимые можно также решать как задачу оптимизации. В диалоговом режиме работы санкцию процедуры СДС может взять на себя проектировщик.

В целом по процедуре СДС можно дать следующие рекомендации, направленные на повышение вероятности выбора допустимых структур и снижение объема вычислений по оценке недопустимых:

- способы выбора значений переменных должны содержать правила, отсекающие заведомо нерациональные и недопустимые значения переменных и их комбинации;

- ограничения следует проверять не после построения структуры в целом, а по возможности в процессе построения, что позволяет сократить лишнюю работу по ненужным построениям и в ряде случаев сразу внести поправки по устранению дефектов структуры;
- проверяемые ограничения должны быть упорядочены по снижению вероятности их нарушения; такое упорядочение иногда можно проводить автоматически в процессе решения задачи.

Процедуры ШЛП включают обычно способы изменения переменных, ориентированные на решение задач как структурной, так и параметрической оптимизации. Приведенные рекомендации по построению процедур СДС можно использовать и при построении способов локального изменения дискретных переменных. Для изменения непрерывных переменных, как правило, применяют различные алгоритмы локального поиска.

В качестве процедуры глобального поиска применяется алгоритм конкурирующих точек. В основе этого алгоритма лежит принцип эволюции популяции живых организмов, находящихся в ограниченном пространстве, например, на острове. В такой популяции резко обостряется конкуренция между отдельными особями. В связи с этим в основу алгоритма конкурирующих точек положены следующие положения:

- поиск глобального *экстремума* осуществляется несколькими конкурирующими решениями (точками);
- условия конкуренции одинаковых для всех решений;
- в определенные моменты некоторые "худшие" решения бракуются (уничтожаются);
- последовательный локальный спуск каждого решения (вначале грубый, затем более точный) происходит независимо от спуска других решений.

Конкуренция позволяет за счет отсева решений, спускающихся в локальные *экстремумы*, достаточно быстро находить глобальный *экстремум* в задачах, для которых значение функционала, осредненное по области притяжения глобального *экстремума*, меньше значения функционала, осредненного по всей области поиска, а область притяжения глобального *экстремума* не слишком мала.

Алгоритм конкурирующих точек — один из наиболее простых и эффективных по сравнению с другими распространенными алгоритмами поиска глобального *экстремума*. Так, например, трудоемкость поиска по этому алгоритму на порядок меньше по сравнению с алгоритмом случайного перебора локальных экстремумов и на два порядка меньше по сравнению с *методом Монте-Карло*.

Рекомендуемая литература

1. Дискретная оптимизация. Модели, методы, алгоритмы решения прикладных задач [Электронный ресурс]: учебное пособие / Струченков В.И. - М.:СОЛОН-Пр., 2016. - 192 с. - ЭБС "Знаниум". - http://znanium.com/bookread2.php?book=904998

2. Бабенышев С. В. Методы оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие / С. В. Бабенышев. - Железногорск: ФГБОУ ВО СПСА ГПС МЧС России, 2017. - 122 с. - ЭБС "Знаниум". - http://znanium.com/bookread2.php?book=912642

3. Сдвижков О. А. Практикум по методам оптимизации [Электронный ресурс]: учебное пособие / О. А. Сдвижков. - М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 200 с. - ЭБС "Знаниум". - http://znanium.com/bookread2.php?book=520828

4. Сербулов Ю. С. Методы решения задач оптимизации. Основные методы теории оптимизации [Текст] : лаб. практикум / Ю. С. Сербулов; ВГЛТУ. - Воронеж, 2016. - 96 с. - Электронная версия в ЭБС ВГЛТУ.