

25.01.21.

Тема:

Вычисление производных с помощью правил дифференцирования.

Производные некоторых элементарных функций.

Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Видео для усвоения материала:

<https://youtu.be/hDLFjSp4-EY>

Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

Производные некоторых элементарных функций

Элементарными функциями называют степенную, показательную, логарифмическую и тригонометрические функции, а также их различные комбинации. При решении многих практических задач часто приходится находить производные таких функций.

Например, напряжение в цепи переменного тока выражается формулой $U(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$; для нахождения силы тока $I(t)$ нужно уметь находить производную $U'(t)$, так как $I(t) = U'(t)$.

1. Производная показательной функции.

Показательная функция $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, определена на всей числовой прямой и имеет производную в каждой её точке. Любую показательную функцию можно выразить через показательную функцию с основанием e по формуле

$$a^x = e^{x \ln a}, \quad (1)$$

так как $e^{x \ln a} = (e^{\ln a})^x = a^x$. В курсе высшей математики доказывается, что функция e^x обладает замечательным свойством: её производная также равна e^x , т. е.

$$(e^x)' = e^x. \quad (2)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(e^{kx+b})' = ke^{kx+b}. \quad (3)$$

Например, $(e^{3x+1})' = 3e^{3x+1}$, $(e^{-2x-4})' = -2e^{-2x-4}$.

Задача 1 Найти производную функции a^x , где $a > 0$, $a \neq 1$.
▶ Используя формулы (1) и (3), находим $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$. ◁
Итак,

$$(a^x)' = a^x \ln a. \quad (4)$$

Например, $(3^x)' = 3^x \ln 3$, $(0,7^x)' = 0,7^x \ln 0,7$.

2*. Производная логарифмической функции.

Логарифмическую функцию $\log_a x$ с любым основанием $a > 0$, $a \neq 1$ можно выразить через логарифмическую функцию с основанием e с помощью формулы перехода

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}. \quad (5)$$

Производная функции $\ln x$ выражается формулой

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0. \quad (6)$$

Применяя правило дифференцирования сложной функции, получаем

$$(\ln(kx + b))' = \frac{k}{kx + b}. \quad (7)$$

Например, $(\ln(4x - 3))' = \frac{4}{4x - 3}$, $(\ln(1 - 2x))' =$
 $= \frac{-2}{1 - 2x} = \frac{2}{2x - 1}$.

Задача 2 Найти производную функции $\log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$.

▶ Используя формулы (5) и (6), находим

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} (\ln x)' = \frac{1}{x \ln a}. \quad \triangleleft$$

Итак,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}. \quad (8)$$

справедливы формулы

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x. \quad (10)$$

Справедливы также формулы

$$\begin{aligned}(\sin(kx + b))' &= k \cos(kx + b), \\(\cos(kx + b))' &= -k \sin(kx + b).\end{aligned}$$

Например, $\left(\sin\left(\frac{1}{4}x - 1\right)\right)' = \frac{1}{4} \cos\left(\frac{1}{4}x - 1\right),$

$$(\cos(3 - 4x))' = -(-4) \sin(3 - 4x) = 4 \sin(3 - 4x).$$

Задача 4 Найти производную функции:

1) $f(x) = \sin(2x + 1) - 3 \cos(1 - x);$

2) $f(x) = e^{-3x} \sin(5x - 1);$ 3) $f(x) = \frac{\ln 3x}{x + 1}.$

► 1) $f'(x) = 2 \cos(2x + 1) - 3 \sin(1 - x);$

2) $f'(x) = -3e^{-3x} \sin(5x - 1) + 5e^{-3x} \cos(5x - 1);$

3) $f'(x) = \frac{\frac{3}{3x}(x+1) - 1 \cdot \ln 3x}{(x+1)^2} = \frac{x+1 - x \ln 3x}{x(x+1)^2}.$ ◀

Практическая часть.

Найти производную функции

831 1) $e^x + 1$; 2) $e^x + x^2$; 3) $e^{2x} + \frac{1}{x}$; 4) $e^{-3x} + \sqrt{x}$.

834 1) $0,5^x + e^{3x}$; 2) $3^x - e^{2x}$; 3) $e^{2-x} + \sqrt[3]{x}$; 4) $e^{3-x} + \frac{1}{x^4}$.

835 1) $2 \ln x + 3^x$; 2) $3 \ln x - 2^x$; 3) $\log_2 x + \frac{1}{2x}$;

4) $3x^{-3} - \log_3 x$; 5) $\ln(x^2 - 2x)$;

836 1) $\sin x + x^2$; 2) $\cos x - 1$; 3) $\cos x + e^x$; 4) $\sin x - 2^x$.

838 1) $\cos\left(\frac{x}{2} - 1\right) + e^{3x}$; 2) $\sin\left(\frac{x}{3} + 3\right) + 2^x$; 3) $3 \cos 4x - \frac{1}{2x}$.