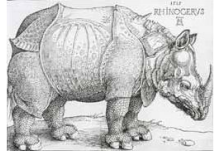


- Q13
- **Транспортные сети и потоки. Величина потока. Максимальный поток.**

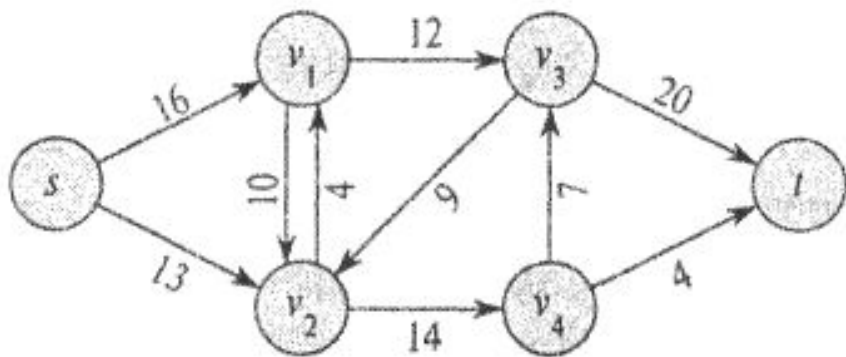


Задача о максимальном потоке

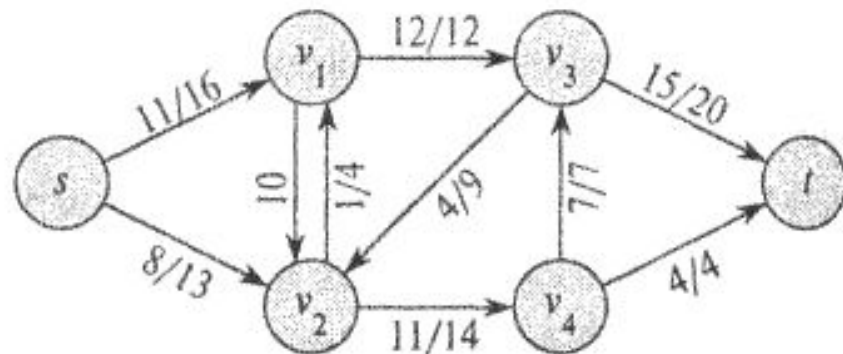


Транспортные сети и потоки

Транспортная сеть (flow network) $G = (V, E)$ представляет собой ориентированный граф, в котором каждое ребро $(u, v) \in E$ имеет неотрицательную **пропускную способность** (capacity) $c(u, v) > 0$. Если $(u, v) \notin E$, предполагается, что $c(u, v) = 0$. В транспортной сети выделяются две вершины: **источник** (source) s и **сток** (sink) t . Для удобства предполагается, что каждая вершина лежит на некоем пути из источника к стоку, т.е. для любой вершины $v \in V$ существует путь $s \rightsquigarrow v \rightsquigarrow t$. Таким образом, граф является связным и $|E| > |V| - 1$.

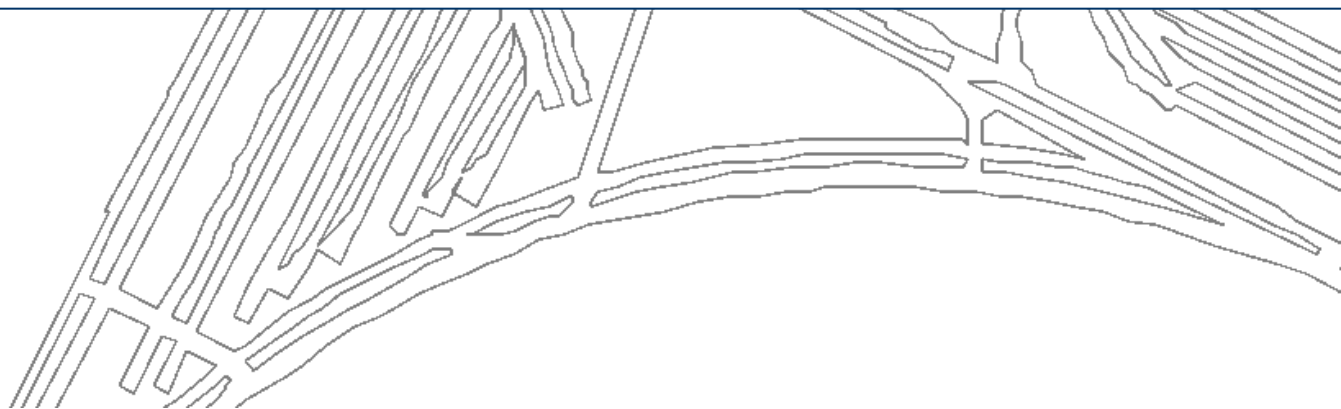


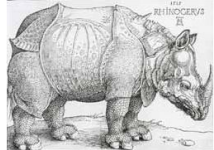
a)



б)

Рис. 26.1. Пример транспортной сети и ее потоки





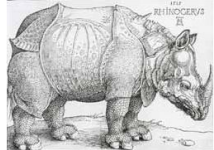
Теперь дадим формальное определение потоков. Пусть $G = (V, E)$ — транспортная сеть с функцией пропускной способности c . Пусть s — источник, а t — сток. **Потоком** (flow) в G является действительная функция $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим трем условиям.

Ограничение пропускной способности (capacity constraint): $f(u, v) \leq c(u, v)$ для всех $u, v \in V$.

Антисимметричность (skew symmetry): $f(u, v) = -f(v, u)$ для всех $u, v \in V$.

Сохранение потока (flow conservation): для всех $u \in V - \{s, t\}$

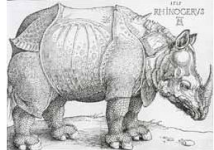
$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0.$$



Количество $f(u, v)$, которое может быть положительным, нулевым или отрицательным, называется **потоком** (flow) из вершины u в вершину v . **Величина** (value) потока f определяется как

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v), \quad (26.1)$$

В задаче о максимальном потоке (maximum flow problem) дана некоторая транспортная сеть G с источником s и стоком t , и необходимо найти поток максимальной величины.



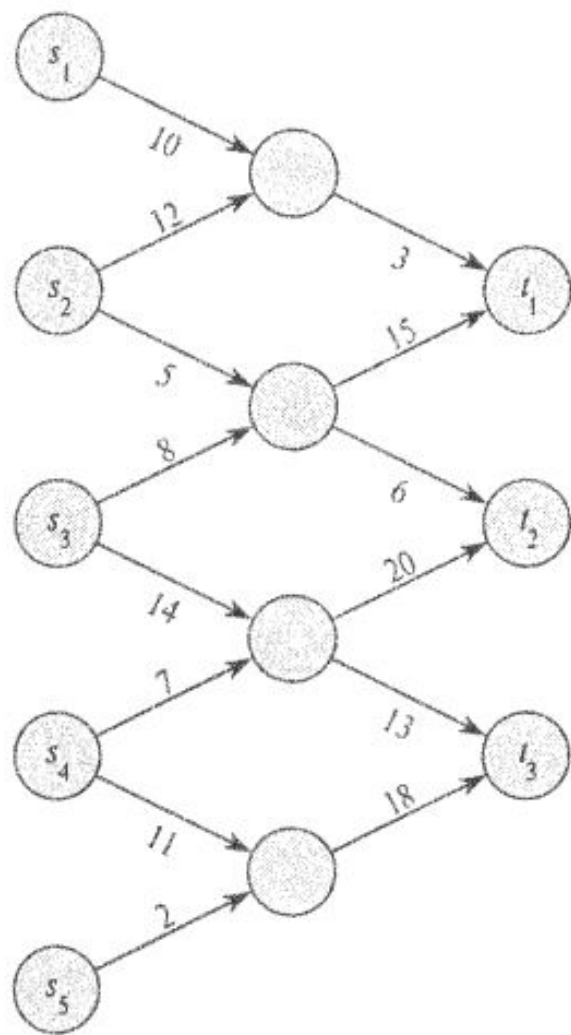
Суммарный положительный поток (total positive flow), входящий в вершину v , задается выражением

$$\sum_{\substack{u \in V \\ f(u,v) > 0}} f(u,v). \quad (26.2)$$

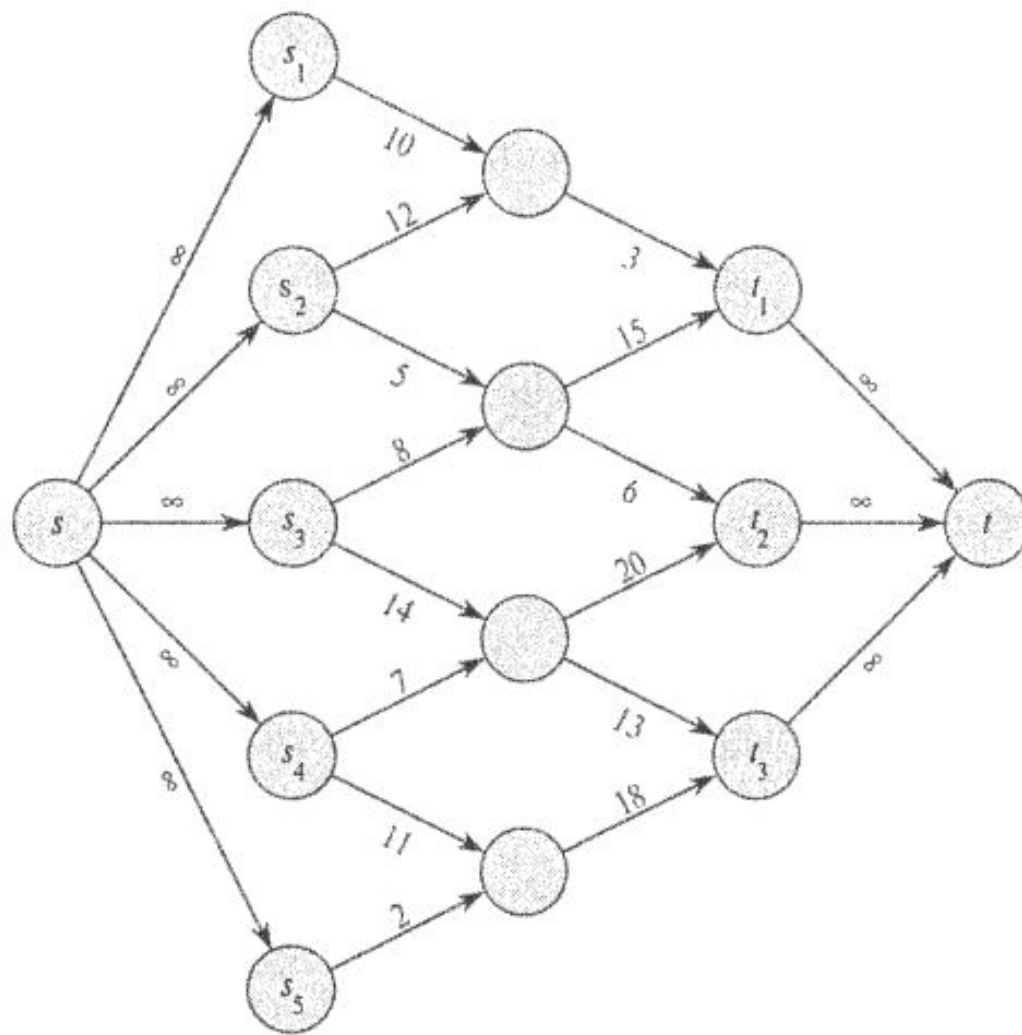
Суммарный положительный поток, выходящий из некоторой вершины, определяется симметрично. **Суммарный чистый поток** (total net flow) в некоторой вершине равен разности суммарного положительного потока, выходящего из данной вершины, и суммарного положительного потока, входящего в нее. Одна из интерпретаций свойства сохранения потока состоит в том, что для отличной от источника и стока вершины входящий в нее суммарный положительный поток должен быть равен выходящему суммарному положительному потоку. Свойство, что суммарный чистый поток в транзитной вершине должен быть равен 0, часто нестрого формулируют как “входящий поток равен выходящему потоку”.



Сети с несколькими источниками и стоками

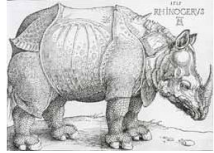


а)

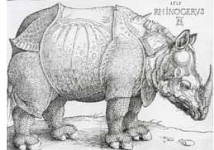


б)

Рис. 26.2. Преобразование задачи о максимальном потоке с несколькими источниками и несколькими стоками к задаче с одним источником и одним стоком



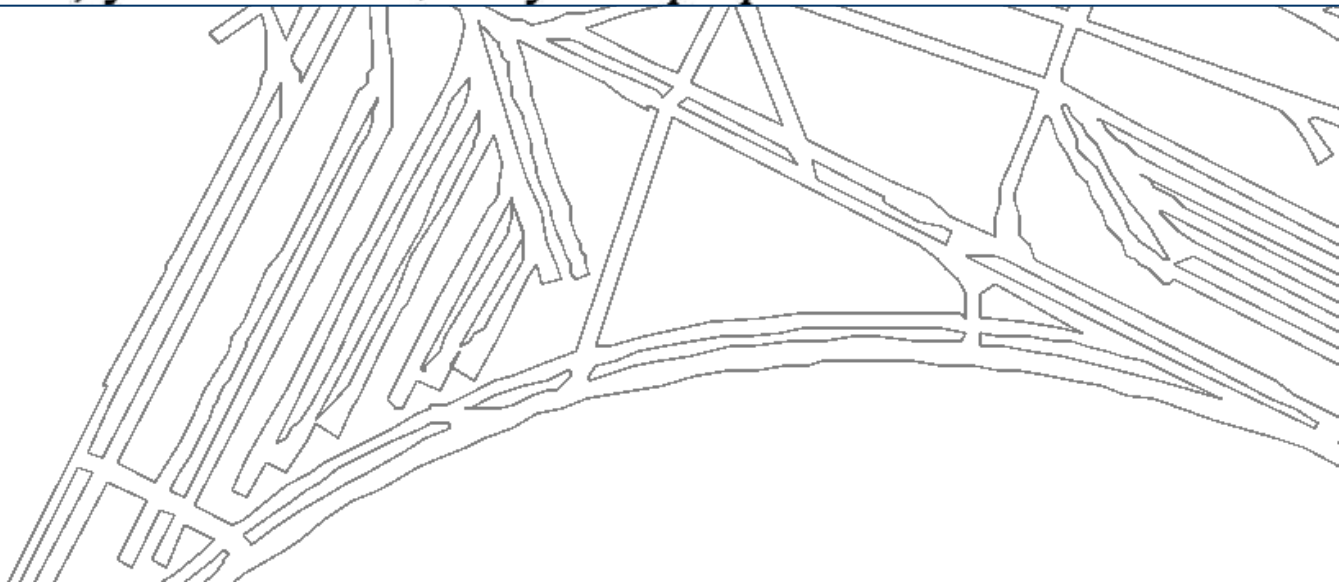
- **Q14**
- **Метод Форда-Фалкерсона. Остаточные сети. Увеличивающие пути. Разрезы транспортных сетей.**



Метод Форда-Фалкерсона

Метод

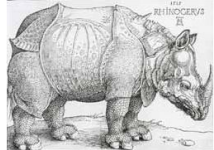
Форда-Фалкерсона базируется на трех важных концепциях, которые выходят за рамки данного метода и применяются во многих потоковых алгоритмах и задачах. Это — остаточные сети, увеличивающие пути и разрезы.





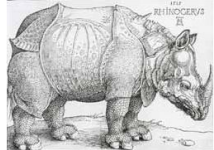
Метод Форда-Фалкерсона является итеративным. Вначале величине потока присваивается значение 0: $f(u, v) = 0$ для всех $u, v \in V$. На каждой итерации величина потока увеличивается посредством поиска “увеличивающего пути” (т.е. некого пути от источника s к стоку t , вдоль которого можно послать больший поток) и последующего увеличения потока. Этот процесс повторяется до тех пор, пока уже невозможно отыскать увеличивающий путь. В теореме о максимальном потоке и минимальном разрезе будет показано, что по завершении данного процесса получается максимальный поток.





FORD_FULKERSON_METHOD(G, s, t)

- 1 Задаем начальное значение потока f равным 0
- 2 **while** (Пока) существует увеличивающий путь p
- 3 **do** увеличиваем поток f вдоль пути p
- 4 **return** f



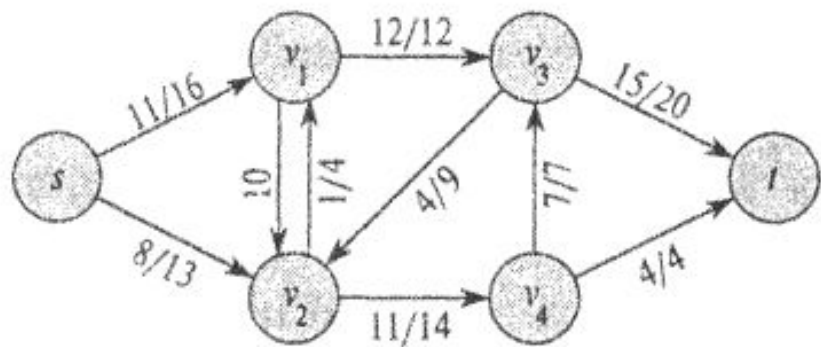
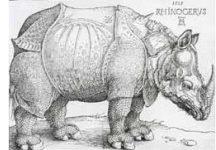
Остаточные сети

Интуитивно понятно, что если заданы некоторая транспортная сеть и поток, то остаточная сеть — это сеть, состоящая из ребер, допускающих увеличение потока. Более строго, пусть задана транспортная сеть $G = (V, E)$ с источником s и стоком t . Пусть f — некоторый поток в G . Рассмотрим пару вершин $u, v \in V$. Величина дополнительного потока, который мы можем направить из u в v , не превысив пропускную способность $c(u, v)$, является **остаточной пропускной способностью** (residual capacity) ребра (u, v) , и задается формулой

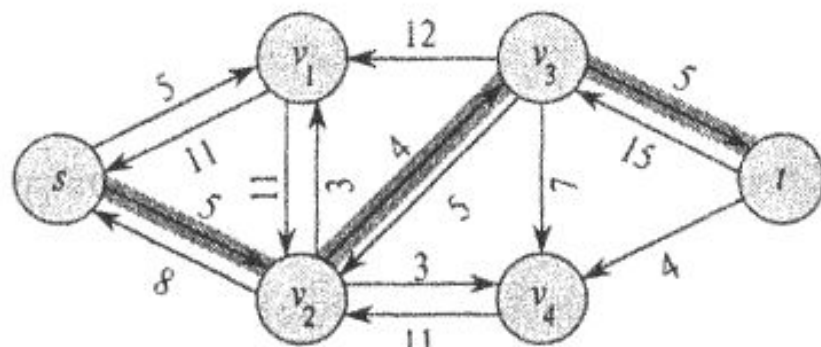
$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v). \quad (26.5)$$

Для заданной транспортной сети $G = (V, E)$ и потока f , **остаточной сетью** (residual network) в G , порожденной потоком f , является сеть $G_f = (V, E_f)$, где

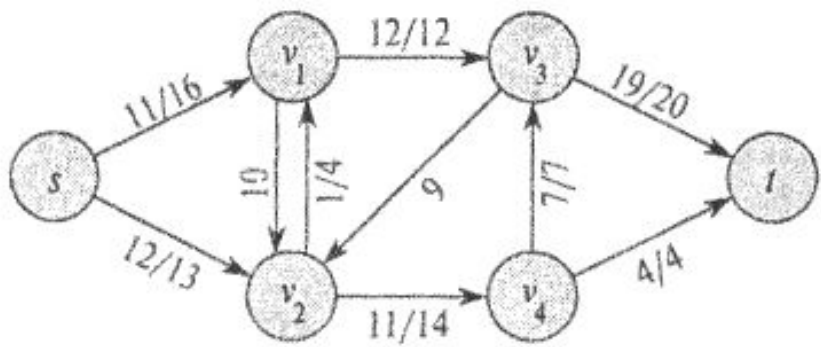
$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\}.$$



a)

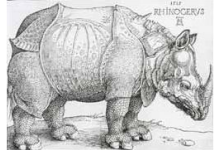


б)

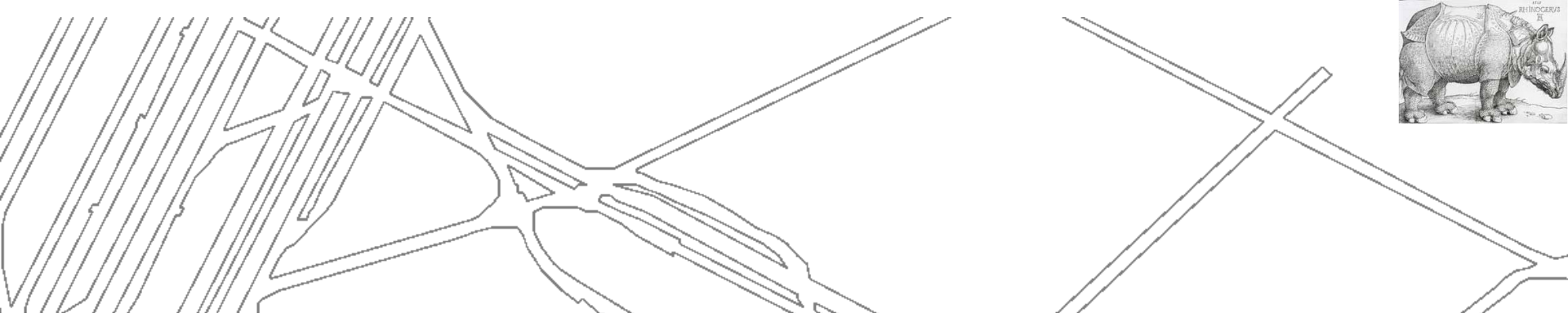
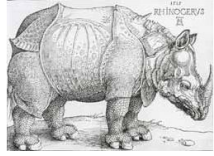


в)

Рис. 26.3. а) Транспортная сеть G и поток f , представленные на рис. 26.1б. б) Остаточная сеть G_f с выделенным увеличивающим путем; его остаточная пропускная способность равна 4. в) Поток в сети G , полученный в результате увеличения потока вдоль пути p на величину его остаточной пропускной способности 4.



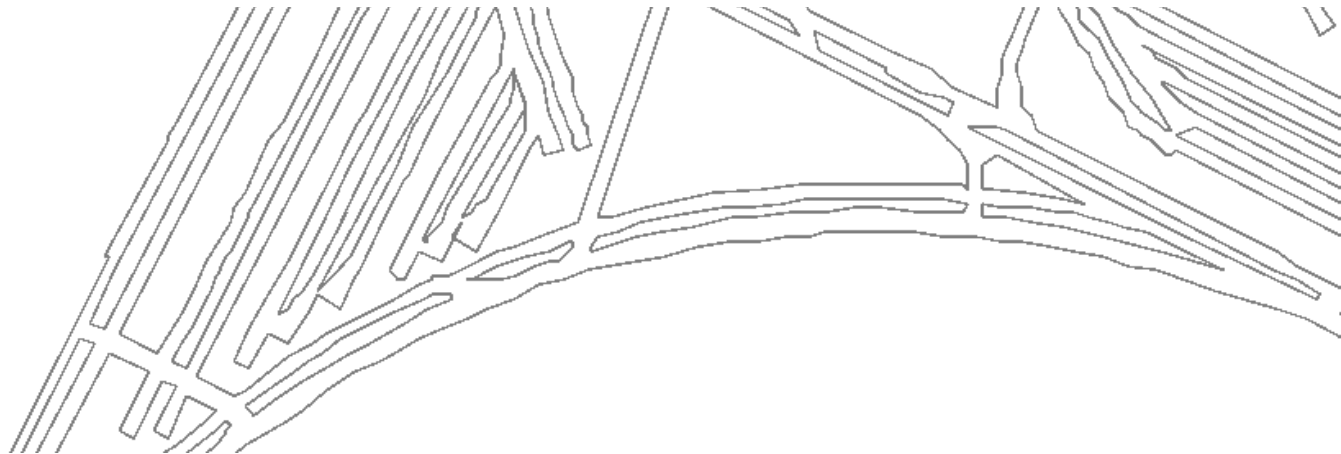
Лемма 26.2. Пусть $G = (V, E)$ — транспортная сеть с источником s и стоком t , а f — поток в G . Пусть G_f — остаточная сеть в G , порожденная потоком f , а f' — поток в G_f . Тогда сумма потоков $f + f'$, определяемая уравнением (26.4), является потоком в G , и величина этого потока равна $|f + f'| = |f| + |f'|$.

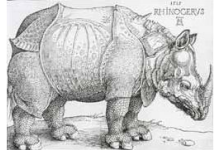


Увеличивающие пути

Для заданных транспортной сети $G = (V, E)$ и потока f *увеличивающим путем* (augmenting path) p является простой путь из s в t в остаточной сети G_f . Максимальная величина, на которую можно увеличить поток вдоль каждого ребра увеличивающего пути p , называется *остаточной пропускной способностью* (residual capacity) p и задается формулой

$$c_f(p) = \min \{c_f(u, v) : (u, v) \text{ принадлежит } p\} .$$





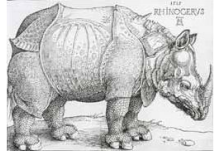
Лемма 26.3. Пусть $G = (V, E)$ — транспортная сеть, а f — некоторый поток в G , и пусть p — некоторый увеличивающий путь в G_f . Определим функцию $f_p : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ следующим образом:

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{если } (u, v) \text{ принадлежит } p, \\ -c_f(p) & \text{если } (v, u) \text{ принадлежит } p, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (26.6)$$

Тогда f_p является потоком в G и его величина составляет $|f_p| = c_f(p) > 0$. ■

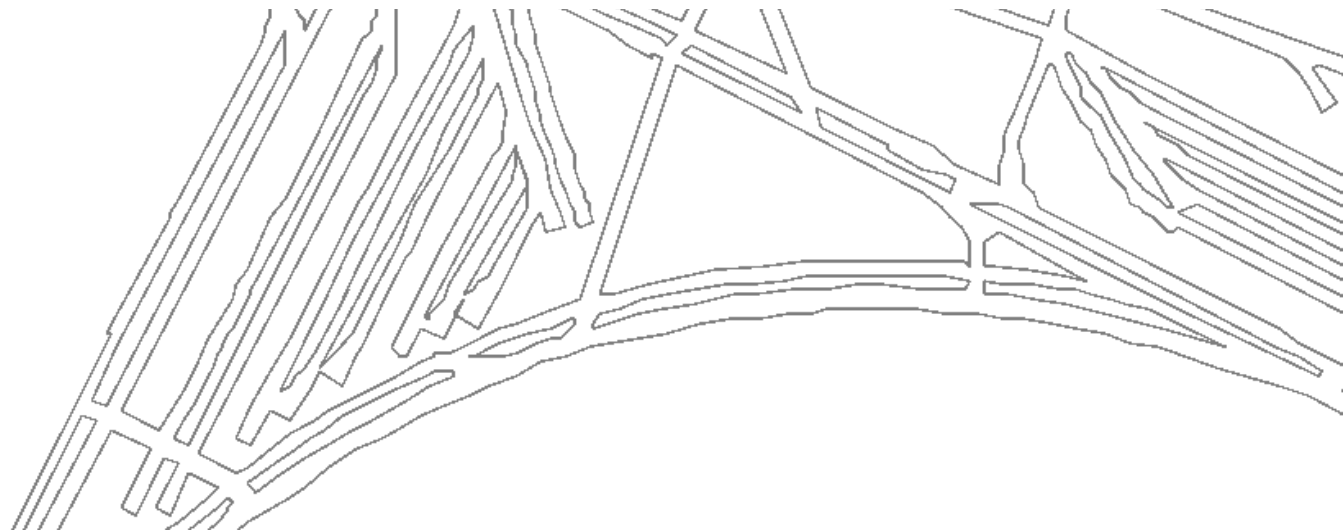
Вытекающее из данной леммы следствие показывает, что если добавить f_p к f , то мы получим новый поток в G , величина которого ближе к максимальной.

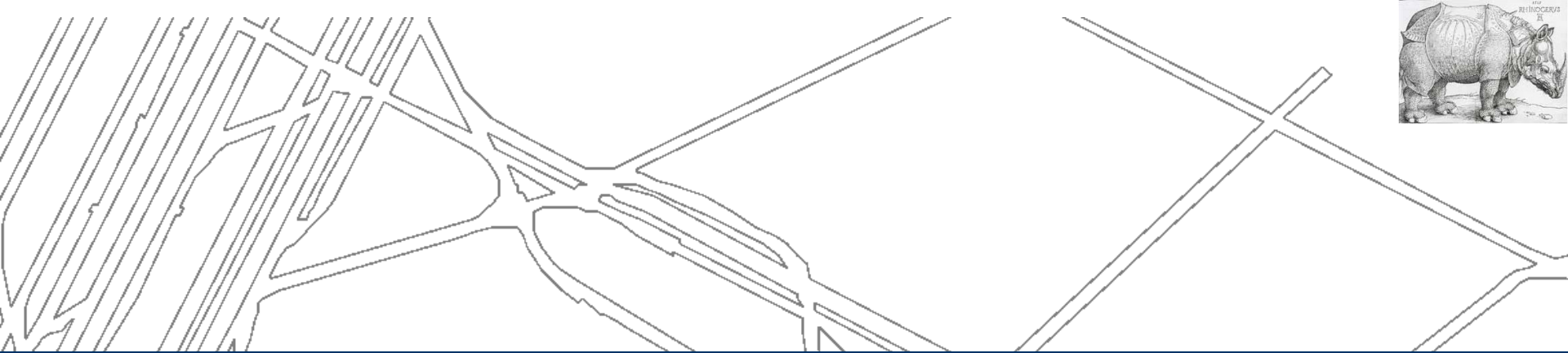
Следствие 26.4. Пусть $G = (V, E)$ — транспортная сеть, а f — некоторый поток в G , и пусть p — некоторый увеличивающий путь в G_f . Пусть f_p определен в соответствии с уравнением (26.6). Определим функцию $f' : V \times V \rightarrow \mathbf{R}$ как $f' = f + f_p$. Тогда f' является потоком в G и имеет величину $|f'| = |f| + |f_p| > |f|$.



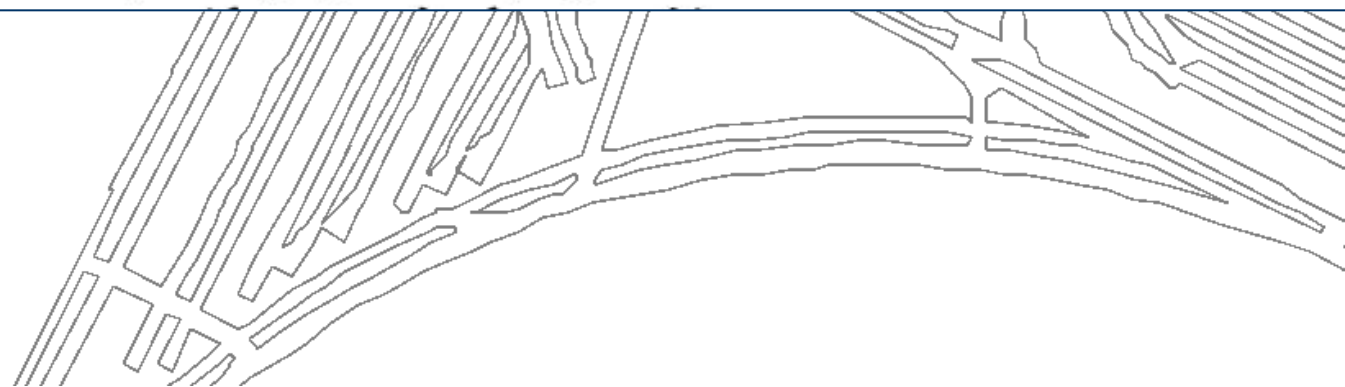
Разрезы транспортных сетей

В методе Форда-Фалкерсона производится неоднократное увеличение потока вдоль увеличивающих путей до тех пор, пока не будет найден максимальный поток. В теореме о максимальном потоке и минимальном разрезе, утверждается, что поток является максимальным тогда и только тогда, когда его остаточная сеть не содержит увеличивающих путей. Однако для доказательства данной теоремы нам понадобится ввести понятие разреза транспортной сети.





Разрезом (cut) (S, T) транспортной сети $G = (V, E)$ называется разбиение множества вершин на множества S и $T = V - S$, такие что $s \in S$, а $t \in T$. (Это определение аналогично определению разреза, которое использовалось применительно к минимальным связующим деревьям, однако здесь речь идет о разрезе в ориентированном графе, а не в неориентированном, и мы требуем, чтобы $s \in S$, а $t \in T$.) Если f — поток, то **чистый поток** (net flow) через разрез (S, T) по определению равен $f(S, T)$. **Пропускной способностью** (capacity) разреза (S, T) является $c(S, T)$. **Минимальным разрезом** (minimum cut) сети является разрез, пропускная способность которого среди всех разрезов сети минимальна.



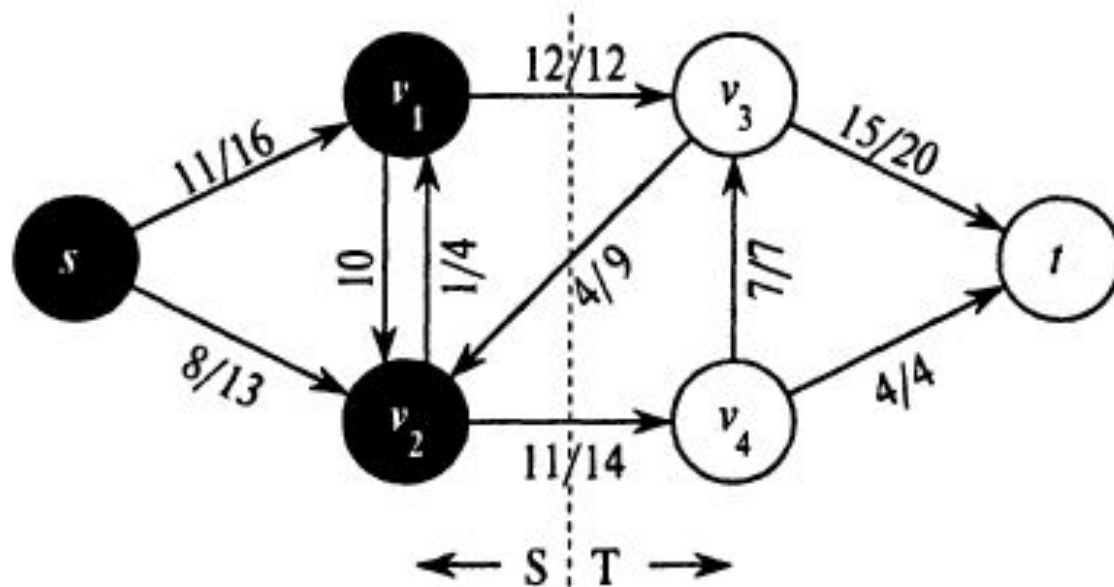
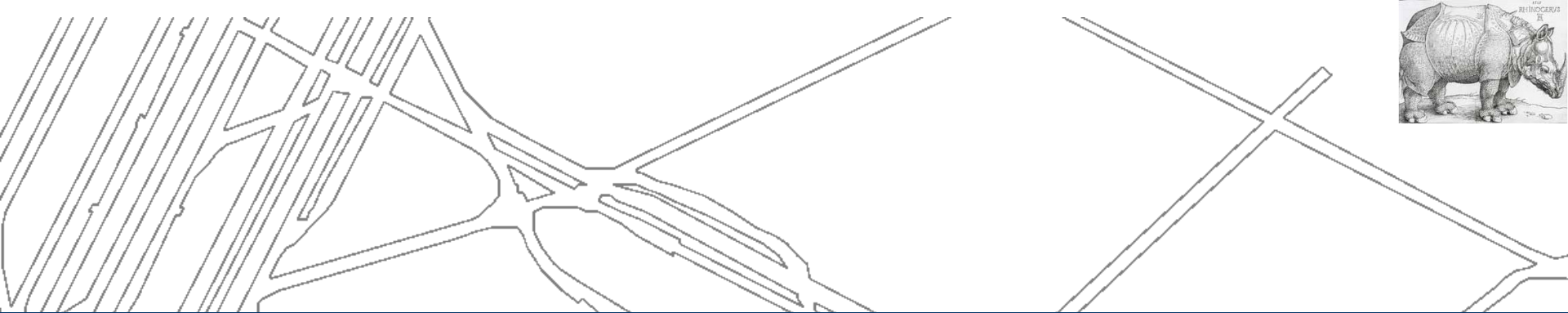
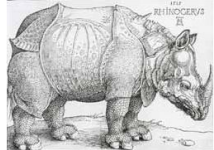


Рис. 26.4. Разрез (S, T) транспортной сети, представленной на рис. 26.16, $S = \{s, v_1, v_2\}$, $T = \{v_3, v_4, t\}$. Вершины, принадлежащие S , отмечены черным цветом, а вершины T — белым



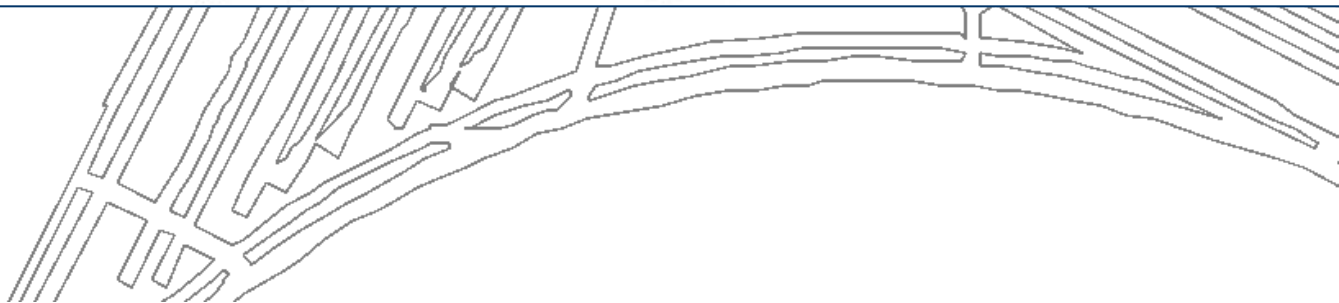
На рис. 26.4 показан разрез $(\{s, v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, t\})$ транспортной сети, представленной на рис. 26.1б. Чистый поток через данный разрез равен

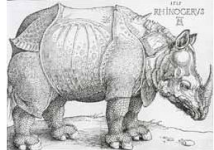
$$f(v_1, v_3) + f(v_2, v_3) + f(v_2, v_4) = 12 + (-4) + 11 = 19,$$

а пропускная способность этого разреза равна

$$c(v_1, v_3) + c(v_2, v_4) = 12 + 14 = 26.$$

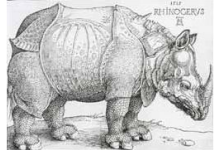
Обратите внимание, что чистый поток через разрез может включать в себя отрицательные потоки между вершинами, но пропускная способность разреза складывается исключительно из неотрицательных значений.





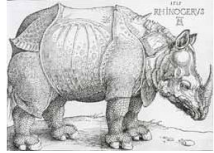
Следующая лемма показывает, что чистый поток через любой разрез одинаков и равен величине потока.

Лемма 26.5. Пусть f — некоторый поток в транспортной сети G с источником s и стоком t , и пусть (S, T) — разрез G . Тогда чистый поток через (S, T) равен $f(S, T) = |f|$.

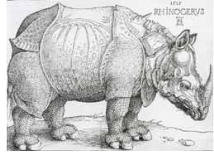


Другое следствие леммы 26.5 показывает, как пропускные способности разрывов можно использовать для определения границы величины потока.

Следствие 26.6. Величина любого потока f в транспортной сети G не превышает пропускную способность произвольного разрыва G .



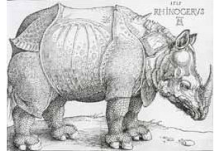
- Q15
- Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе.
Алгоритм Форда-Фалкерсона.



Теорема 26.7 (О максимальном потоке и минимальном разрезе). Если f — некоторый поток в транспортной сети $G = (V, E)$ с источником s и стоком t , то следующие утверждения эквивалентны.

1. f — максимальный поток в G .
2. Остаточная сеть G_f не содержит увеличивающих путей.
3. $|f| = c(S, T)$ для некоторого разреза (S, T) сети G .

Базовый алгоритм Форда-Фалкерсона



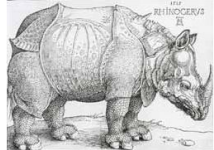
```
FORD_FULKERSON( $G, s, t$ )
1  for (для) каждого ребра  $(u, v) \in E[G]$ 
2      do  $f[u, v] \leftarrow 0$ 
3       $f[v, u] \leftarrow 0$ 
4  while существует путь  $p$  из  $s$  в  $t$  в остаточной сети  $G_f$ 
5      do  $c_f(p) \leftarrow \min \{c_f(u, v) : (u, v) \text{ принадлежит } p\}$ 
6      for (для) каждого ребра  $(u, v)$  in  $p$ 
7          do  $f[u, v] \leftarrow f[u, v] + c_f(p)$ 
8           $f[v, u] \leftarrow -f[u, v]$ 
```

Приведенный псевдокод алгоритма FORD_FULKERSON является расширением приведенного ранее псевдокода FORD_FULKERSON_METHOD.

Строки 1–3 инициализируют поток f значением 0. В цикле **while** в строках 4–8 выполняется неоднократный поиск увеличивающего пути p в G_f , и поток f вдоль пути p увеличивается на остаточную пропускную способность $c_f(p)$. Когда увеличивающих путей больше нет, поток f является максимальным.



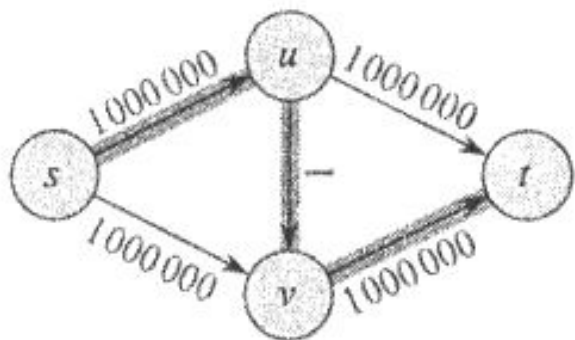
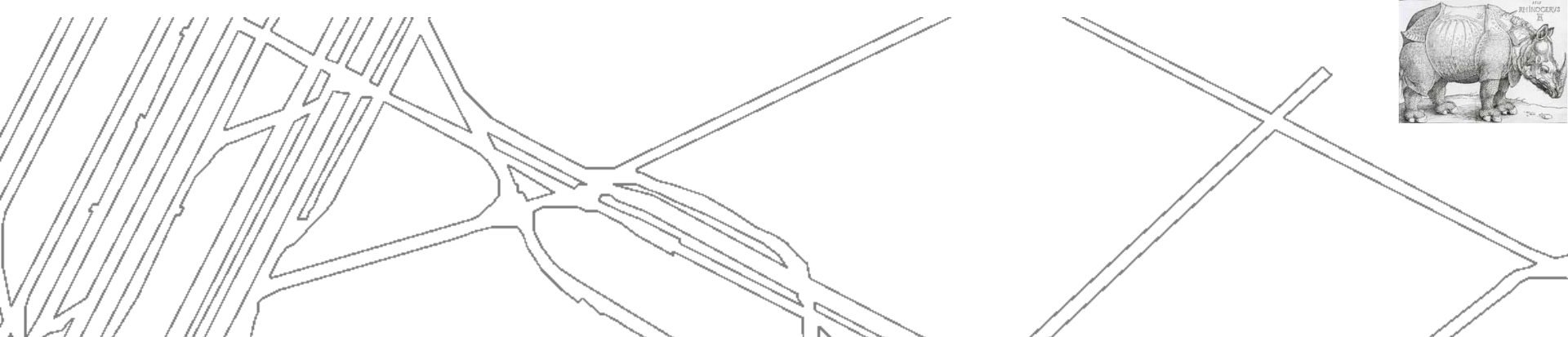
- Q16
- Алгоритм Эдмундса-Карпа.



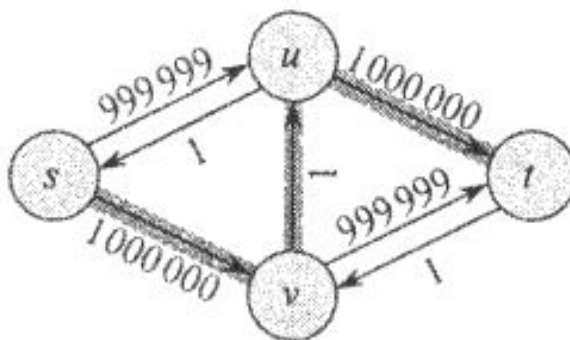
Анализ метода Форда-Фалкерсона

Время выполнения процедуры FORD_FULKERSON зависит от того, как именно выполняется поиск увеличивающего пути p в строке 4. При неудачном методе поиска алгоритм может даже не завершиться: величина потока будет последовательно увеличиваться, но она не обязательно сходится к максимальному значению потока². Если увеличивающий путь выбирается с использованием поиска в ширину (который мы рассматривали в разделе 22.2), алгоритм выполняется за полиномиальное время. Прежде чем доказать этот результат, получим простую границу времени выполнения для случая, когда увеличивающий путь выбирается произвольным образом, а все значения пропускных способностей являются целыми числами.

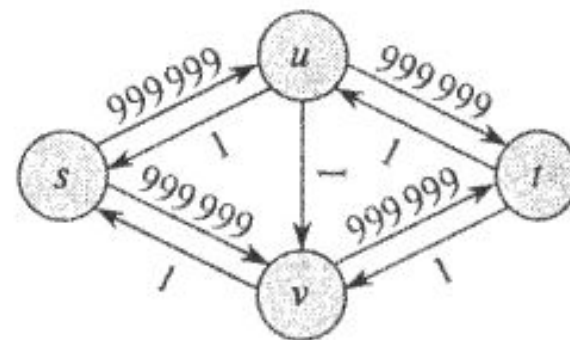
На практике задача поиска максимального потока чаще всего возникает в целочисленной постановке. Если пропускные способности — рациональные числа, можно использовать соответствующее масштабирование, которое сделает их целыми. В таком предположении непосредственная реализация процедуры FORD_FULKERSON имеет время работы $O(E |f^*|)$, где f^* — максимальный поток, найденный данным алгоритмом.



а)

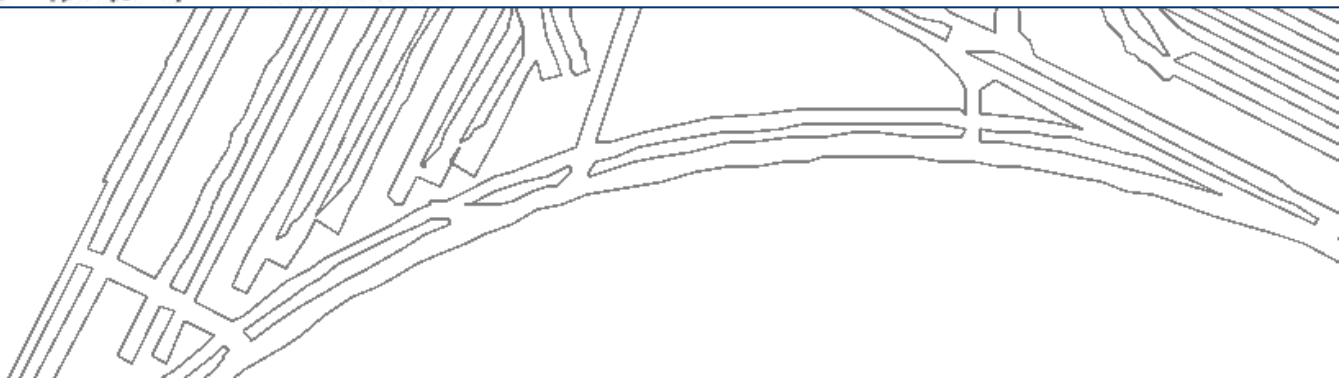


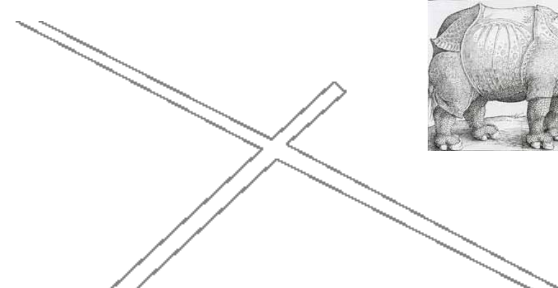
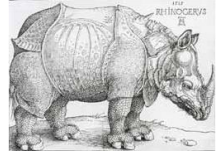
б)



в)

Рис. 26.6. Транспортная сеть, для которой выполнение процедуры FORD_FULKERSON может занимать время $\Theta(E |f^*|)$, $|f^*| = 2\,000\,000$





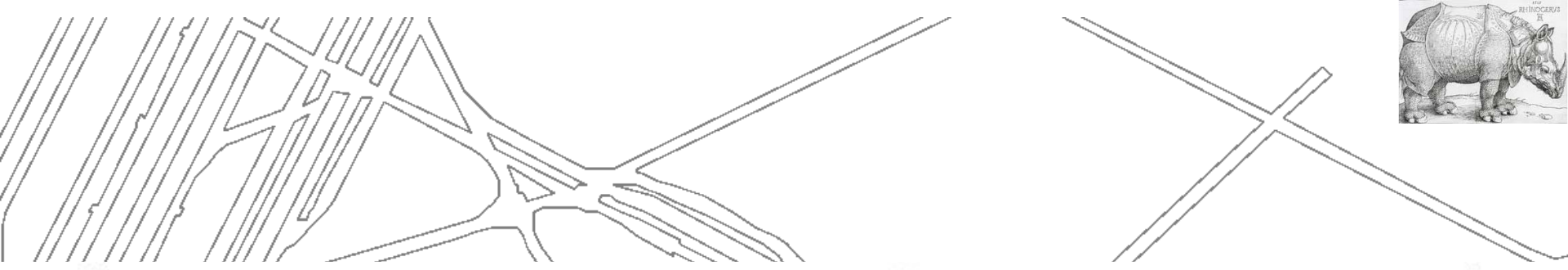
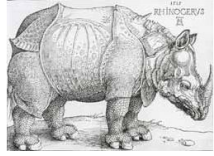
Алгоритм Эдмондса-Карпа

Указанный недостаток метода Форда-Фалкерсона можно преодолеть, если реализовать вычисление увеличивающего пути p в строке 4 как поиск в ширину, т.е. если в качестве увеличивающего пути выбирается *кратчайший* путь из s в t в остаточной сети, где каждое ребро имеет единичную длину (вес). Такая реализация метода Форда-Фалкерсона называется *алгоритмом Эдмондса-Карпа* (Edmonds-Karp algorithm). Докажем, что время выполнения алгоритма Эдмондса-Карпа составляет $O(V E^2)$.

Анализ зависит от расстояний между вершинами остаточной сети G_f . В следующей лемме длина кратчайшего пути из вершины u в v в остаточной сети G_f , где каждое ребро имеет единичную длину, обозначена как $\delta_f(u, v)$.

Лемма 26.8. Если для некоторой транспортной сети $G = (V, E)$ с источником s и стоком t выполняется алгоритм Эдмондса-Карпа, то для всех вершин $v \in V - \{s, t\}$ длина кратчайшего пути $\delta_f(s, v)$ в остаточной сети G_f монотонно возрастает с каждым увеличением потока.

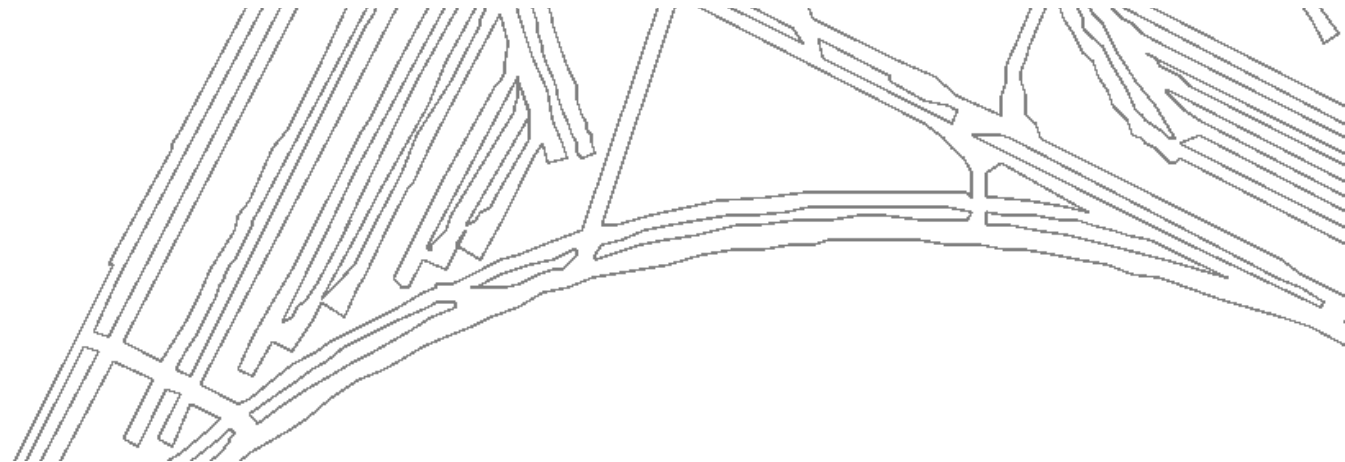
//// // // //

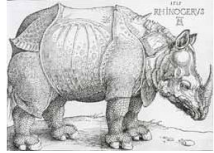


Следующая теорема устанавливает верхний предел количества итераций алгоритма Эдмондса-Карпа.

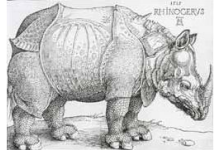
Теорема 26.9. Если для некоторой транспортной сети $G = (V, E)$ с источником s и стоком t выполняется алгоритм Эдмондса-Карпа, то общее число увеличений потока, выполняемое данным алгоритмом, составляет $O(V E)$.

Если увеличивающий путь находится посредством поиска в ширину, каждую итерацию процедуры FORD_FULKERSON можно выполнить за время $O(E)$, следовательно, суммарное время выполнения алгоритма Эдмондса-Карпа составляет $O(V E^2)$.





- Q17
- **Задача о максимальном паросочетании в двудольном графе.**



Задача поиска максимального паросочетания в двудольном графе

Пусть дан неориентированный граф $G = (V, E)$. *Паросочетанием* (matching) называется подмножество ребер $M \subseteq E$, такое что для всех вершин $v \in V$ в M содержится не более одного ребра, инцидентного v . Мы говорим, что вершина $v \in V$ является *связанной* (matched) паросочетанием M , если в M есть ребро, инцидентное v ; в противном случае вершина v называется *открытой* (unmatched). Максимальным паросочетанием называется паросочетание максимальной мощности, т.е. такое паросочетание M , что для любого паросочетания M' $|M| \geq |M'|$. В данном разделе мы ограничимся рассмотрением задачи поиска максимальных паросочетаний в двудольных графах. Мы предполагаем, что множество вершин можно разбить на два подмножества $V = L \cup R$, где L и R не пересекаются, и все ребра из E проходят между L и R . Далее мы предполагаем, что каждая вершина из V имеет по крайней мере одно инцидентное ребро.

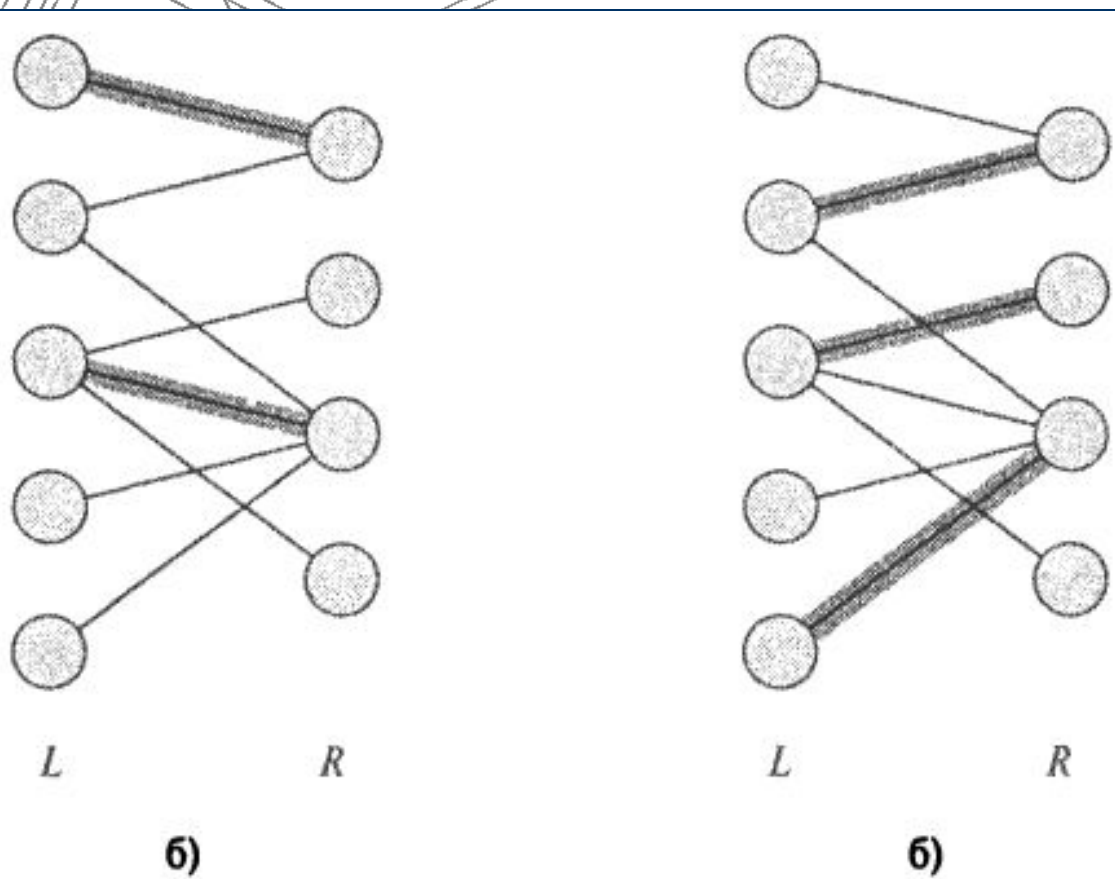
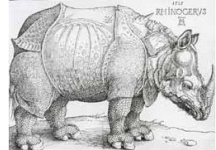


Рис. 26.7. Двудольный граф $G = (V, E)$ с разбиением вершин $V = L \cup R$. а) Паросочетание с мощностью 2. б) Максимальное паросочетание с мощностью 3.

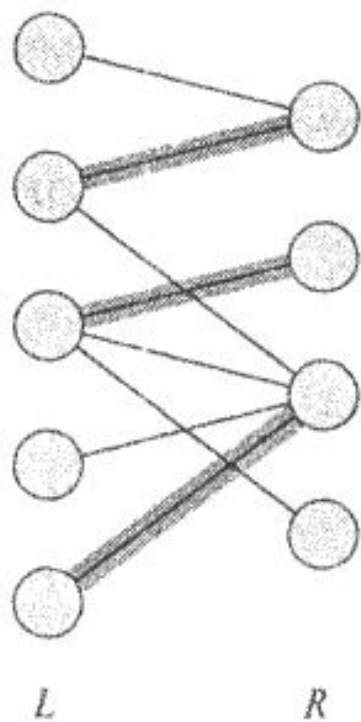


Поиск максимального паросочетания в двудольном графе

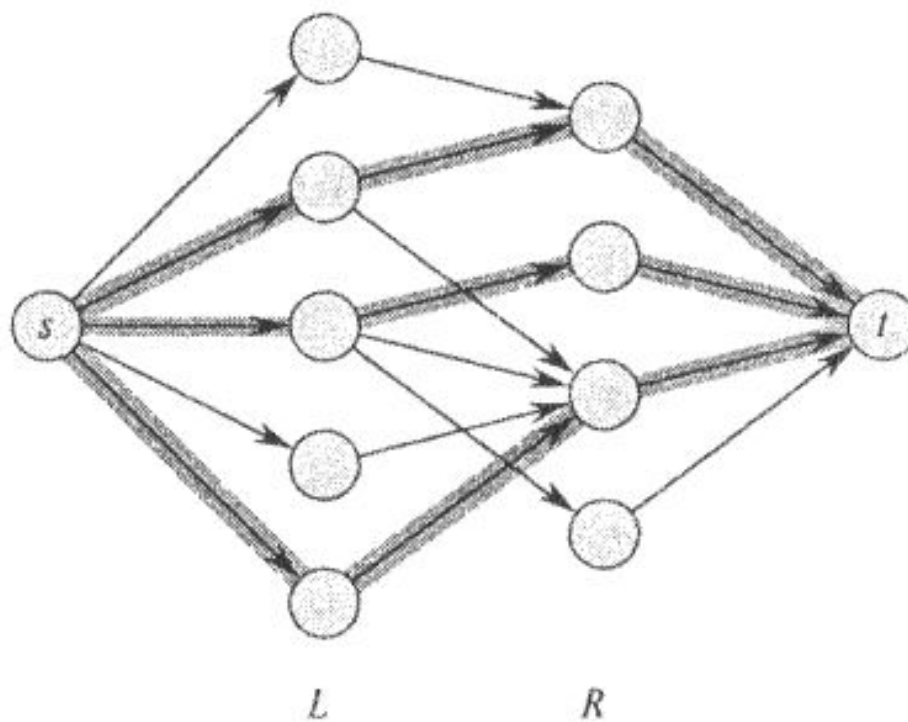
С помощью метода Форда-Фалкерсона можно найти максимальное паросочетание в неориентированном двудольном графе $G = (V, E)$ за время, полиномиально зависящее от $|V|$ и $|E|$. Проблема состоит в том, чтобы построить транспортную сеть, потоки в которой соответствуют паросочетаниям, как показано на рис. 26.8. Определим для заданного двудольного графа G соответствующую транспортную сеть $G' = (V', E')$ следующим образом. Возьмем в качестве источника s и стока t новые вершины, не входящие в V , и пусть $V' = V \cup \{s, t\}$. Если разбиение вершин в графе G задано как $V = L \cup R$, ориентированными ребрами G' будут ребра E , направленные из L в R , а также $|V|$ новых ребер

$$E' = \{(s, u) : u \in L\} \cup \{(u, v) : u \in L, v \in R \text{ и } (u, v) \in E\} \cup \{(v, t) : v \in R\}.$$

Чтобы завершить построение, присвоим каждому ребру E' единичную пропускную способность.

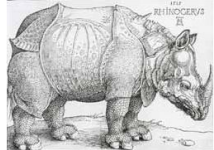


a)



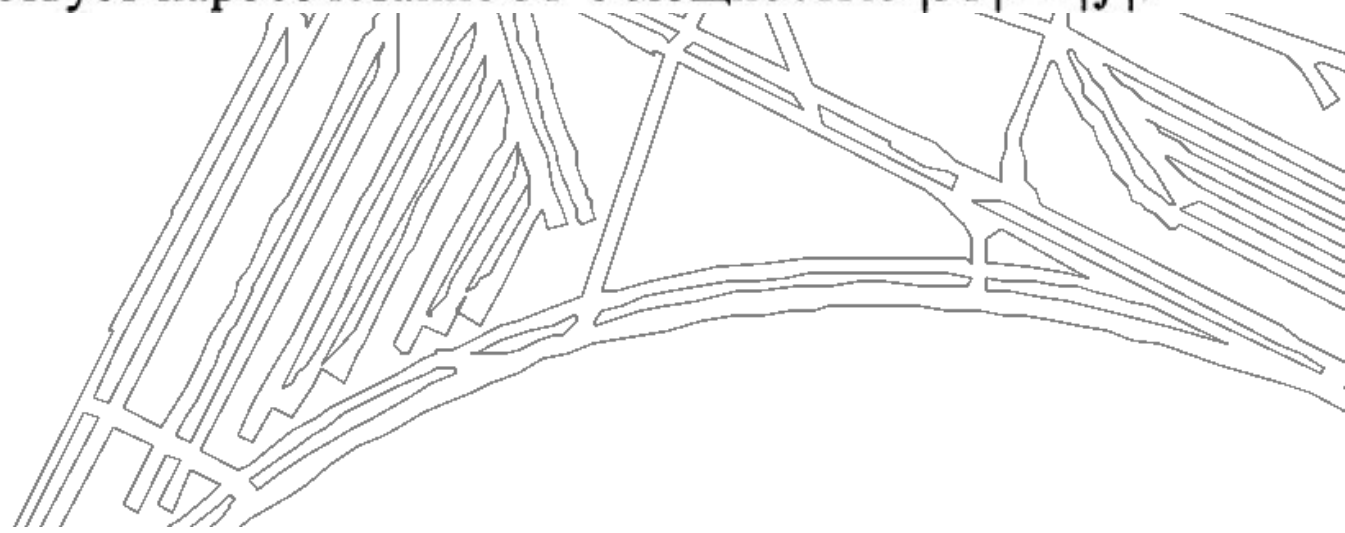
б)

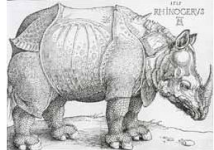
Рис. 26.8. Двудольный граф (а) и соответствующая ему транспортная сеть (б). Выделенные ребра обеспечивают максимальный поток и определяют максимальное паросочетание



Следующая лемма показывает, что паросочетание в G непосредственно соответствует некоторому потоку в соответствующей транспортной сети G' . Поток f в транспортной сети $G = (V, E)$ называется **целочисленным** (integer-valued), если значения $f(u, v)$ целые для всех $(u, v) \in V \times V$.

Лемма 26.10. Пусть $G = (V, E)$ — двудольный граф с разбиением вершин $V = L \cup R$, и пусть $G' = (V', E')$ — соответствующая ему транспортная сеть. Если M — паросочетание в G , то существует целочисленный поток f в G' , величина которого $|f| = |M|$. Справедливо и обратное утверждение: если f — целочисленный поток в G' , то в G существует паросочетание M с мощностью $|M| = |f|$.





На основании леммы 26.10 можно сделать вывод, что максимальное паросочетание в двудольном графе G соответствует максимальному потоку в соответствующей ему транспортной сети G' , следовательно, можно находить максимальное паросочетание в G с помощью алгоритма поиска максимального потока в G' . Единственной проблемой в данных рассуждениях является то, что алгоритм поиска максимального потока может вернуть такой поток в G' , в котором некоторое значение $f(u, v)$ оказывается нецелым, несмотря на то, что величина $|f|$ должна быть целой. Следующая теорема показывает, что такая проблема не может возникнуть при использовании метода Форда-Фалкерсона.

Теорема 26.11 (Теорема о целочисленности). Если функция пропускной способности c принимает только целые значения, то максимальный поток f , полученный с помощью метода Форда-Фалкерсона, обладает тем свойством, что значение потока $|f|$ является целочисленным. Более того, для всех вершин u и v величина $f(u, v)$ является целой.