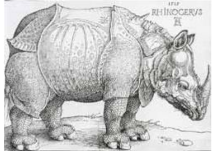


- **Q13**
- **Транспортные сети и потоки. Величина потока. Максимальный поток.**

Задача о максимальном потоке

Транспортные сети и потоки

Транспортная сеть (flow network) $G = (V, E)$ представляет собой ориентированный граф, в котором каждое ребро $(u, v) \in E$ имеет неотрицательную ***пропускную способность*** (capacity) $c(u, v) \geqslant 0$. Если $(u, v) \notin E$, предполагается, что $c(u, v) = 0$. В транспортной сети выделяются две вершины: ***источник*** (source) s и ***сток*** (sink) t. Для удобства предполагается, что каждая вершина лежит на неком пути из источника к стоку, т.е. для любой вершины $v \in V$ существует путь $s \leadsto v \leadsto t$. Таким образом, граф является связным и $|E| \geqslant |V| - 1$.

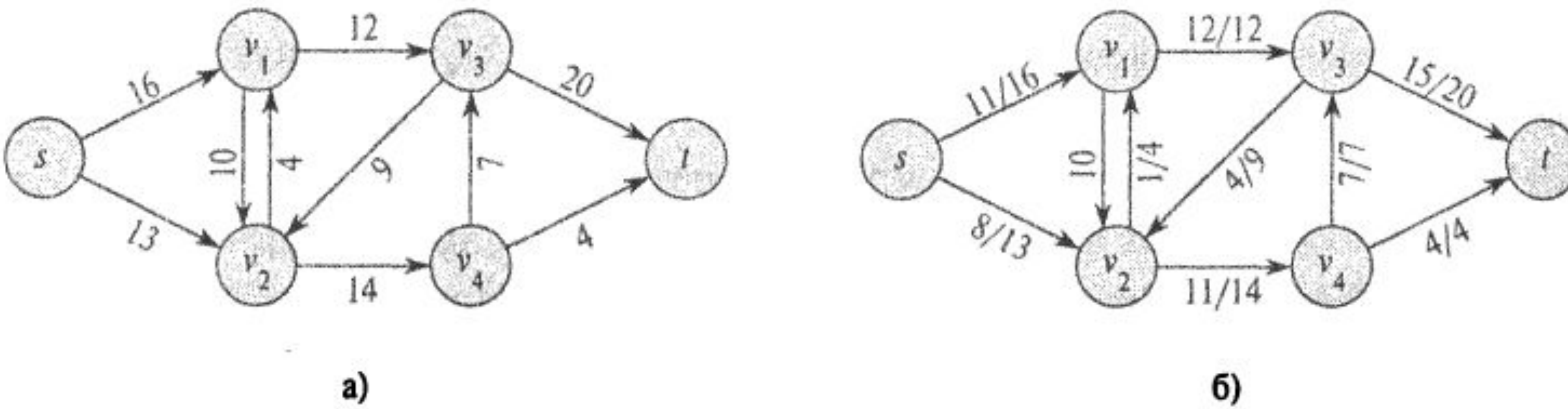


Рис. 26.1. Пример транспортной сети и ее потоки

Теперь дадим формальное определение потоков. Пусть $G = (V, E)$ – транспортная сеть с функцией пропускной способности c. Пусть s – источник, а t – сток. ***Потоком*** (flow) в G является действительная функция $f : V \times V \to \mathrm{R}$, удовлетворяющая следующим трем условиям.

Ограничение пропускной способности (capacity constraint): $f(u, v) \leqslant c(u, v)$ для всех $u, v \in V$.

Антисимметричночть (skew symmetry): $f(u, v) = -f(v, u)$ для всех $u, v \in V$.

Сохранение потока (flow conservation): для всех $u \in V - \{s, t\}$

$$\sum_{v \in V} f(u, v) = 0.$$

Количество $f(u, v)$, которое может быть положительным, нулевым или отрицательным, называется ***потоком*** (flow) из вершины u в вершину v. ***Величина*** (value) потока f определяется как

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v), \tag{26.1}$$

В ***задаче о максимальном потоке*** (maximum flow problem) дана некоторая транспортная сеть G с источником s и стоком t, и необходимо найти поток максимальной величины.

Суммарный положительный поток (total positive flow), входящий в вершину v, задается выражением

$$\sum_{\substack{u \in V \\ f(u,v)>0}} f(u,v). \qquad (26.2)$$

Суммарный положительный поток, выходящий из некоторой вершины, определяется симметрично. ***Суммарный чистый поток*** (total net flow) в некоторой вершине равен разности суммарного положительного потока, выходящего из данной вершины, и суммарного положительного потока, входящего в нее. Одна из интерпретаций свойства сохранения потока состоит в том, что для отличной от источника и стока вершины входящий в нее суммарный положительный поток должен быть равен выходящему суммарному положительному потоку. Свойство, что суммарный чистый поток в транзитной вершине должен быть равен 0, часто нестрого формулируют как “входящий поток равен выходящему потоку”.

Сети с несколькими источниками и стоками

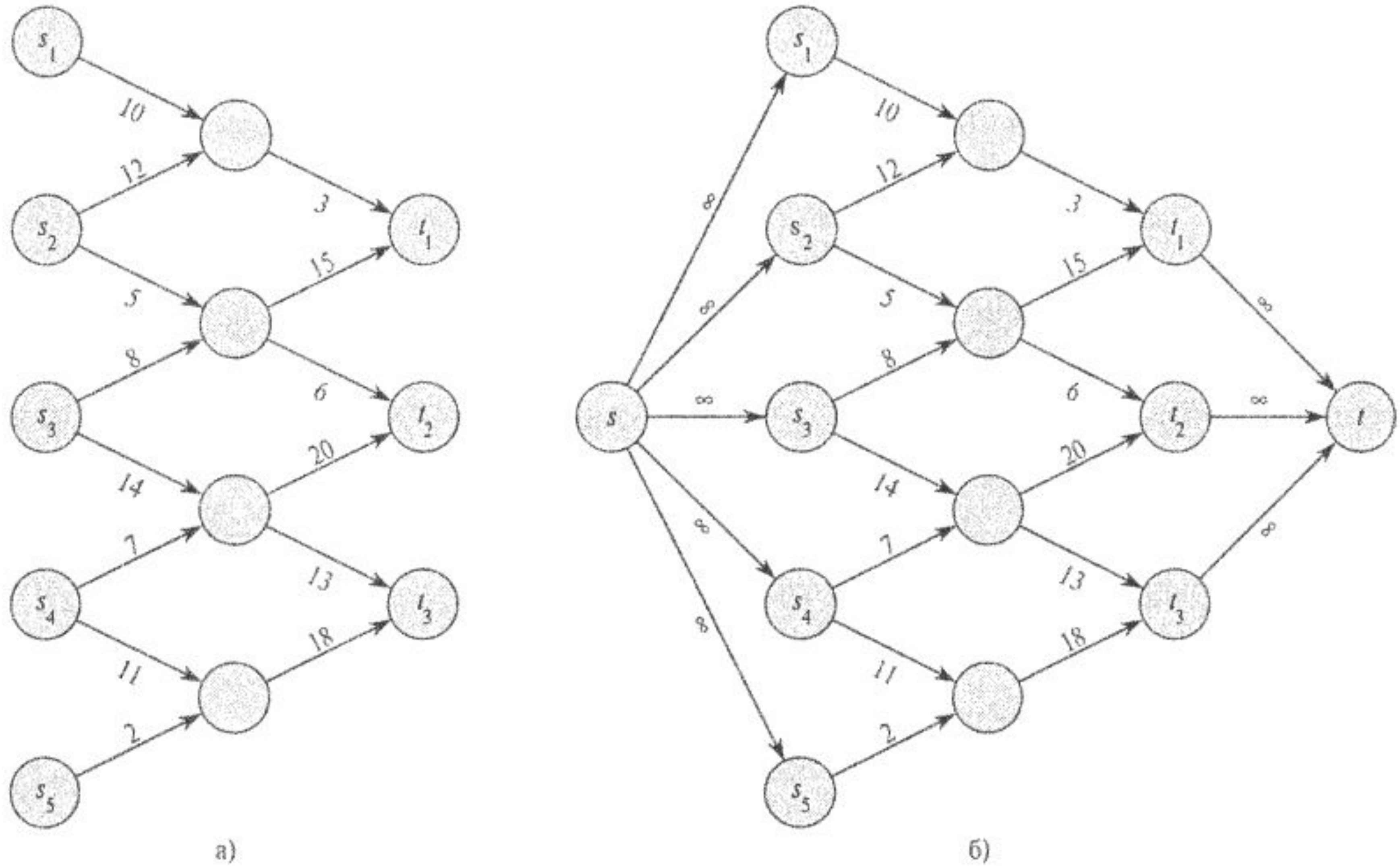


Рис. 26.2. Преобразование задачи о максимальном потоке с несколькими источниками и несколькими стоками к задаче с одним источником и одним стоком

- Q14
- Метод Форда-Фалкерсона. Остаточные сети. Увеличивающие пути. Разрезы транспортных сетей.

Метод Форда-Фалкерсона

Метод Форда-Фалкерсона базируется на трех важных концепциях, которые выходят за рамки данного метода и применяются во многих потоковых алгоритмах и задачах. Это — остаточные сети, увеличивающие пути и разрезы.

Метод Форда-Фалкерсона является итеративным. Вначале величине потока присваивается значение 0: $f(u, v) = 0$ для всех $u, v \in V$. На каждой итерации величина потока увеличивается посредством поиска “увеличивающего пути” (т.е. некого пути от источника s к стоку t, вдоль которого можно послать больший поток) и последующего увеличения потока. Этот процесс повторяется до тех пор, пока уже невозможно отыскать увеличивающий путь. В теореме о максимальном потоке и минимальном разрезе будет показано, что по завершении данного процесса получается максимальный поток.

```
FORD_FULKERSON_METHOD(G, s, t)
Задаем начальное значение потока f равным 0
while (Пока) существует увеличивающий путь p
        do увеличиваем поток f вдоль пути p
return f
```

Остаточные сети

Интуитивно понятно, что если заданы некоторая транспортная сеть и поток, то остаточная сеть — это сеть, состоящая из ребер, допускающих увеличение потока. Более строго, пусть задана транспортная сеть $G = (V, E)$ с источником s и стоком t. Пусть f — некоторый поток в G. Рассмотрим пару вершин $u, v \in$ $\in V$. Величина дополнительного потока, который мы можем направить из u в v, не превысив пропускную способность $c(u, v)$, является ***остаточной пропускной способностью*** (residual capacity) ребра (u, v), и задается формулой

$$c_f(u, v) = c(u, v) - f(u, v). \tag{26.5}$$

Для заданной транспортной сети $G = (V, E)$ и потока f, ***остаточной сетью*** (residual network) в G, порожденной потоком f, является сеть $G_f = (V, E_f)$, где

$$E_f = \{(u, v) \in V \times V : c_f(u, v) > 0\}.$$

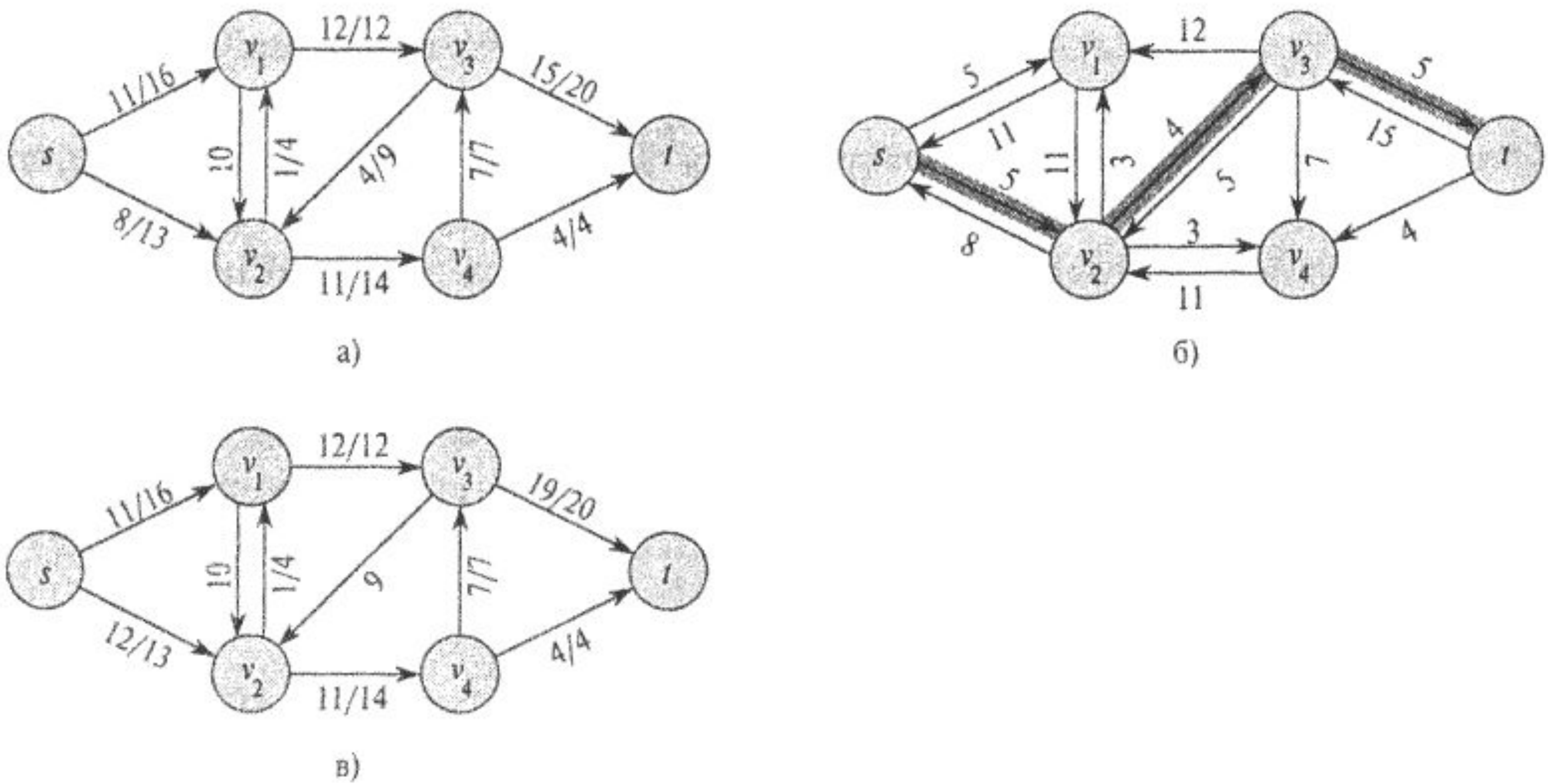


Рис. 26.3. а) Транспортная сеть G и поток f, представленные на рис. 26.1*б*. б) Остаточная сеть G_f с выделенным увеличивающим путем; его остаточная пропускная способность равна 4. в) Поток в сети G, полученный в результате увеличения потока вдоль пути p на величину его остаточной пропускной способности 4.

Лемма 26.2. Пусть $G = (V, E)$ – транспортная сеть с источником s и стоком t, а f – поток в G. Пусть G_f – остаточная сеть в G, порожденная потоком f, а f' – поток в G_f. Тогда сумма потоков $f + f'$, определяемая уравнением (26.4), является потоком в G, и величина этого потока равна $|f + f'| = |f| + |f'|$.

Увеличивающие пути

Для заданных транспортной сети $G = (V, E)$ и потока f ***увеличивающим путем*** (augmenting path) p является простой путь из s в t в остаточной сети G_f. Максимальная величина, на которую можно увеличить поток вдоль каждого ребра увеличивающего пути p, называется ***остаточной пропускной способностью*** (residual capacity) p и задается формулой

$$c_f(p) = \min\{c_f(u, v) : (u, v) \text{ принадлежит } p\}.$$

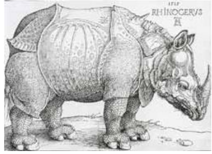
Лемма 26.3. Пусть $G = (V, E)$ — транспортная сеть, а f — некоторый поток в G, и пусть p — некоторый увеличивающий путь в G_f. Определим функцию $f_p : V \times V \to \mathbf{R}$ следующим образом:

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p) & \text{если } (u, v) \text{ принадлежит } p, \\ -c_f(p) & \text{если } (v, u) \text{ принадлежит } p, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{26.6}$$

Тогда f_p является потоком в G и его величина составляет $|f_p| = c_f(p) > 0$. ■

Вытекающее из данной леммы следствие показывает, что если добавить f_p к f, то мы получим новый поток в G, величина которого ближе к максимальной.

Следствие 26.4. Пусть $G = (V, E)$ — транспортная сеть, а f — некоторый поток в G, и пусть p — некоторый увеличивающий путь в G_f. Пусть f_p определен в соответствии с уравнением (26.6). Определим функцию $f' : V \times V \to \mathbf{R}$ как $f' = f + f_p$. Тогда f' является потоком в G и имеет величину $|f'| = |f| + |f_p| > |f|$.



Разрезы транспортных сетей

В методе Форда-Фалкерсона производится неоднократное увеличение потока вдоль увеличивающих путей до тех пор, пока не будет найден максимальный поток. В теореме о максимальном потоке и минимальном разрезе, утверждается, что поток является максимальным тогда и только тогда, когда его остаточная сеть не содержит увеличивающих путей. Однако для доказательства данной теоремы нам понадобится ввести понятие разреза транспортной сети.

Разрезом (cut) (S, T) транспортной сети $G = (V, E)$ называется разбиение множества вершин на множества S и $T = V - S$, такие что $s \in S$, а $t \in T$. (Это определение аналогично определению разреза, которое использовалось применительно к минимальным связующим деревьям , однако здесь речь идет о разрезе в ориентированном графе, а не в неориентированном, и мы требуем, чтобы $s \in S$, а $t \in T$.) Если f — поток, то ***чистый поток*** (net flow) через разрез (S, T) по определению равен $f(S, T)$. ***Пропускной способностью*** (capacity) разреза (S, T) является $c(S, T)$. ***Минимальным разрезом*** (minimum cut) сети является разрез, пропускная способность которого среди всех разрезов сети минимальна.

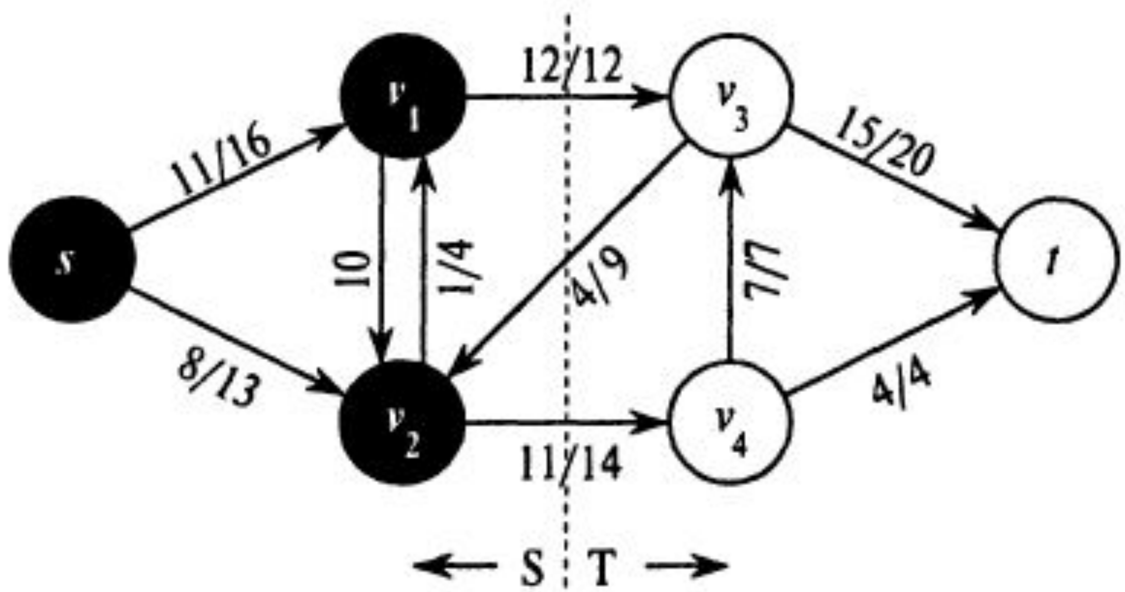


Рис. 26.4. Разрез (S, T) транспортной сети, представленной на рис. 26.1*б*, $S = \{s, v_1, v_2\}$, $T = \{v_3, v_4, t\}$. Вершины, принадлежащие S, отмечены черным цветом, а вершины T — белым

На рис. 26.4 показан разрез $(\{s, v_1, v_2\}, \{v_3, v_4, t\})$ транспортной сети, представленной на рис. 26.1*б*. Чистый поток через данный разрез равен

$$f(v_1, v_3) + f(v_2, v_3) + f(v_2, v_4) = 12 + (-4) + 11 = 19,$$

а пропускная способность этого разреза равна

$$c(v_1, v_3) + c(v_2, v_4) = 12 + 14 = 26.$$

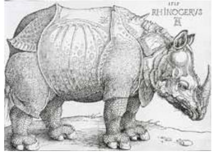
Обратите внимание, что чистый поток через разрез может включать в себя отрицательные потоки между вершинами, но пропускная способность разреза слагается исключительно из неотрицательных значений.

Следующая лемма показывает, что чистый поток через любой разрез одинаков и равен величине потока.

Лемма 26.5. Пусть f — некоторый поток в транспортной сети G с источником s и стоком t, и пусть (S, T) — разрез G. Тогда чистый поток через (S, T) равен $f(S, T) = |f|$.

Другое следствие леммы 26.5 показывает, как пропускные способности разрезов можно использовать для определения границы величины потока.

Следствие 26.6. Величина любого потока f в транспортной сети G не превышает пропускную способность произвольного разреза G.



- Q15
- Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе. Алгоритм Форда-Фалкерсона.

Теорема 26.7 (О максимальном потоке и минимальном разрезе). Если f — некоторый поток в транспортной сети $G = (V, E)$ с источником s и стоком t, то следующие утверждения эквивалентны.

1. f — максимальный поток в G.
2. Остаточная сеть G_f не содержит увеличивающих путей.
3. $|f| = c(S, T)$ для некоторого разреза (S, T) сети G.

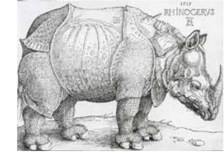
Базовый алгоритм Форда-Фалкерсона

```
FORD_FULKERSON(G, s, t)
1  for (для) каждого ребра (u, v) ∈ E[G]
2        do f[u, v] ← 0
3           f[v, u] ← 0
4  while существует путь p из s в t в остаточной сети G_f
5        do c_f(p) ← min {c_f(u, v) : (u, v) принадлежит p}
6           for (для) каждого ребра (u, v) in p
7               do f[u, v] ← f[u, v] + c_f(p)
8                  f[v, u] ← −f[u, v]
```

Приведенный псевдокод алгоритма FORD_FULKERSON является расширением приведенного ранее псевдокода FORD_FULKERSON_METHOD.

. Строки 1–3 инициализируют поток f значением 0. В цикле **while** в строках 4–8 выполняется неоднократный поиск увеличивающего пути p в G_f, и поток f вдоль пути p увеличивается на остаточную пропускную способность $c_f\,(p)$. Когда увеличивающих путей больше нет, поток f является максимальным.

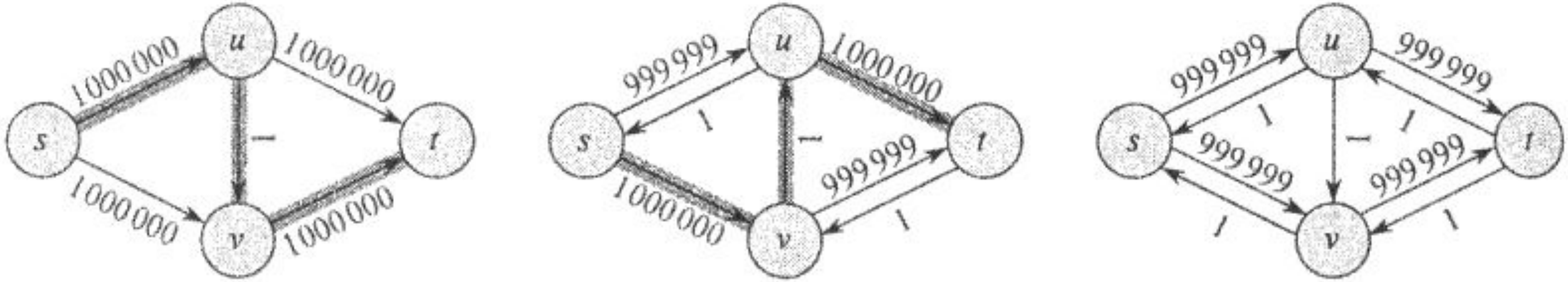
- Q16
- Алгоритм Эдмнодса-Карпа.



Анализ метода Форда-Фалкерсона

Время выполнения процедуры FORD_FULKERSON зависит от того, как именно выполняется поиск увеличивающего пути p в строке 4. При неудачном методе поиска алгоритм может даже не завершиться: величина потока будет последовательно увеличиваться, но она не обязательно сходится к максимальному значению потока[2]. Если увеличивающий путь выбирается с использованием поиска в ширину (который мы рассматривали в разделе 22.2), алгоритм выполняется за полиномиальное время. Прежде чем доказать этот результат, получим простую границу времени выполнения для случая, когда увеличивающий путь выбирается произвольным образом, а все значения пропускных способностей являются целыми числами.

На практике задача поиска максимального потока чаще всего возникает в целочисленной постановке. Если пропускные способности — рациональные числа, можно использовать соответствующее масштабирование, которое сделает их целыми. В таком предположении непосредственная реализация процедуры FORD_FULKERSON имеет время работы $O(E|f^*|)$, где f^* — максимальный поток, найденный данным алгоритмом.



а)   б)   в)

Рис. 26.6. Транспортная сеть, для которой выполнение процедуры FORD_FULKERSON может занимать время $\Theta(E\,|f^*|)$, $|f^*| = 2\,000\,000$

Алгоритм Эдмондса-Карпа

Указанный недостаток метода Форда-Фалкерсона можно преодолеть, если реализовать вычисление увеличивающего пути p в строке 4 как поиск в ширину, т.е. если в качестве увеличивающего пути выбирается *кратчайший* путь из s в t в остаточной сети, где каждое ребро имеет единичную длину (вес). Такая реализация метода Форда-Фалкерсона называется ***алгоритмом Эдмондса-Карпа*** (Edmonds-Karp algorithm). Докажем, что время выполнения алгоритма Эдмондса-Карпа составляет $O\left(V E^2\right)$.

Анализ зависит от расстояний между вершинами остаточной сети G_f. В следующей лемме длина кратчайшего пути из вершины u в v в остаточной сети G_f, где каждое ребро имеет единичную длину, обозначена как $\delta_f(u, v)$.

Лемма 26.8. Если для некоторой транспортной сети $G = (V, E)$ с источником s и стоком t выполняется алгоритм Эдмондса-Карпа, то для всех вершин $v \in$ $\in V - \{s, t\}$ длина кратчайшего пути $\delta_f(s, v)$ в остаточной сети G_f монотонно возрастает с каждым увеличением потока.

Следующая теорема устанавливает верхний предел количества итераций алгоритма Эдмондса-Карпа.

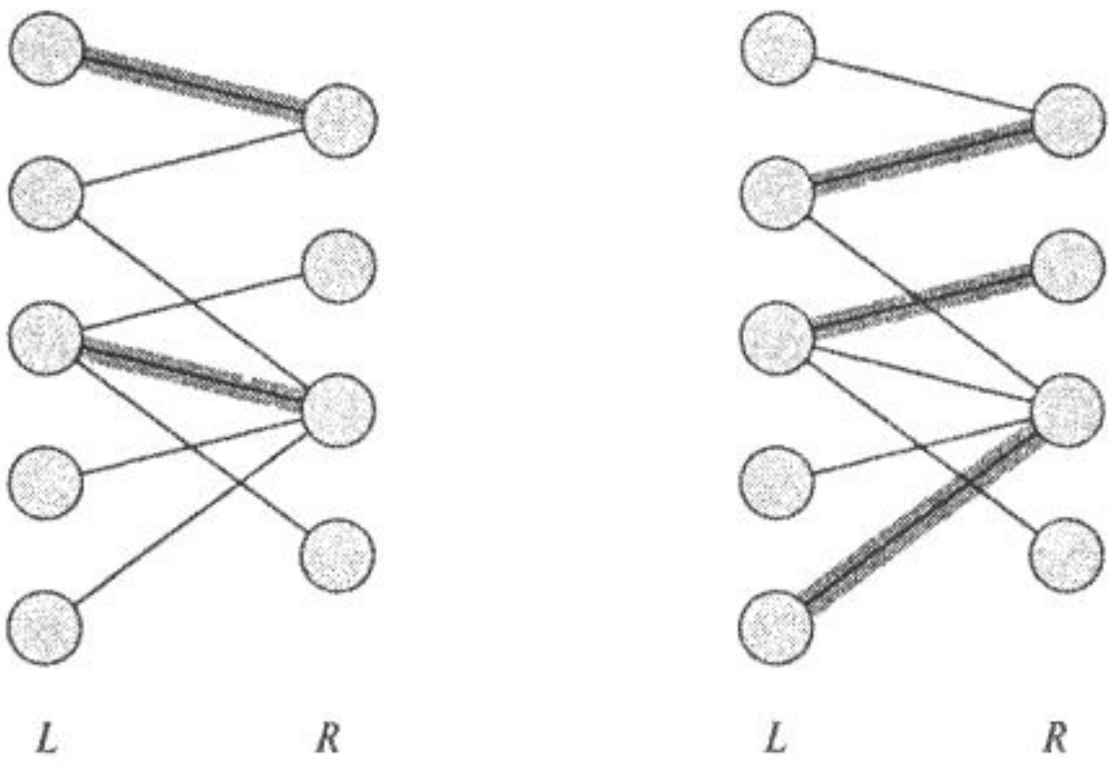
Теорема 26.9. Если для некоторой транспортной сети $G = (V, E)$ с источником s и стоком t выполняется алгоритм Эдмондса-Карпа, то общее число увеличений потока, выполняемое данным алгоритмам, составляет $O(V\,E)$.

Если увеличивающий путь находится посредством поиска в ширину, каждую итерацию процедуры FORD_FULKERSON можно выполнить за время $O(E)$, следовательно, суммарное время выполнения алгоритма Эдмондса-Карпа составляет $O\left(V\,E^2\right)$.

- Q17
- Задача о максимальном паросочетании в двудольном графе.

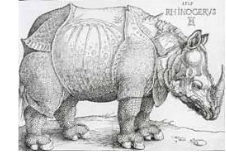
Задача поиска максимального паросочетания в двудольном графе

Пусть дан неориентированный граф $G = (V, E)$. ***Паросочетанием*** (matching) называется подмножество ребер $M \subseteq E$, такое что для всех вершин $v \in V$ в M содержится не более одного ребра, инцидентного v. Мы говорим, что вершина $v \in V$ является ***связанной*** (matched) паросочетанием M, если в M есть ребро, инцидентное v; в противном случае вершина v называется ***открытой*** (unmatched). Максимальным паросочетанием называется паросочетание максимальной мощности, т.е. такое паросочетание M, что для любого паросочетания M' $|M| \geqslant |M'|$. В данном разделе мы ограничимся рассмотрением задачи поиска максимальных паросочетаний в двудольных графах. Мы предполагаем, что множество вершин можно разбить на два подмножества $V = L \cup R$, где L и R не пересекаются, и все ребра из E проходят между L и R. Далее мы предполагаем, что каждая вершина из V имеет по крайней мере одно инцидентное ребро.



б) б)

Рис. 26.7. Двудольный граф $G = (V, E)$ с разбиением вершин $V = L \cup R$. *а*) Паросочетание с мощностью 2. *б*) Максимальное паросочетание с мощностью 3.



Поиск максимального паросочетания в двудольном графе

С помощью метода Форда-Фалкерсона можно найти максимальное паросочетание в неориентированном двудольном графе $G = (V, E)$ за время, полиномиально зависящее от $|V|$ и $|E|$. Проблема состоит в том, чтобы построить транспортную сеть, потоки в которой соответствуют паросочетаниям, как показано на рис. 26.8. Определим для заданного двудольного графа G соответствующую транспортную сеть $G' = (V', E')$ следующим образом. Возьмем в качестве источника s и стока t новые вершины, не входящие в V, и пусть $V' = V \cup \{s, t\}$. Если разбиение вершин в графе G задано как $V = L \cup R$, ориентированными ребрами G' будут ребра E, направленные из L в R, а также $|V|$ новых ребер

$$E' = \{(s, u) : u \in L\} \cup \{(u, v) : u \in L, v \in R \text{ и } (u, v) \in E\} \cup \{(v, t) : v \in R\}.$$

Чтобы завершить построение, присвоим каждому ребру E' единичную пропускную способность.

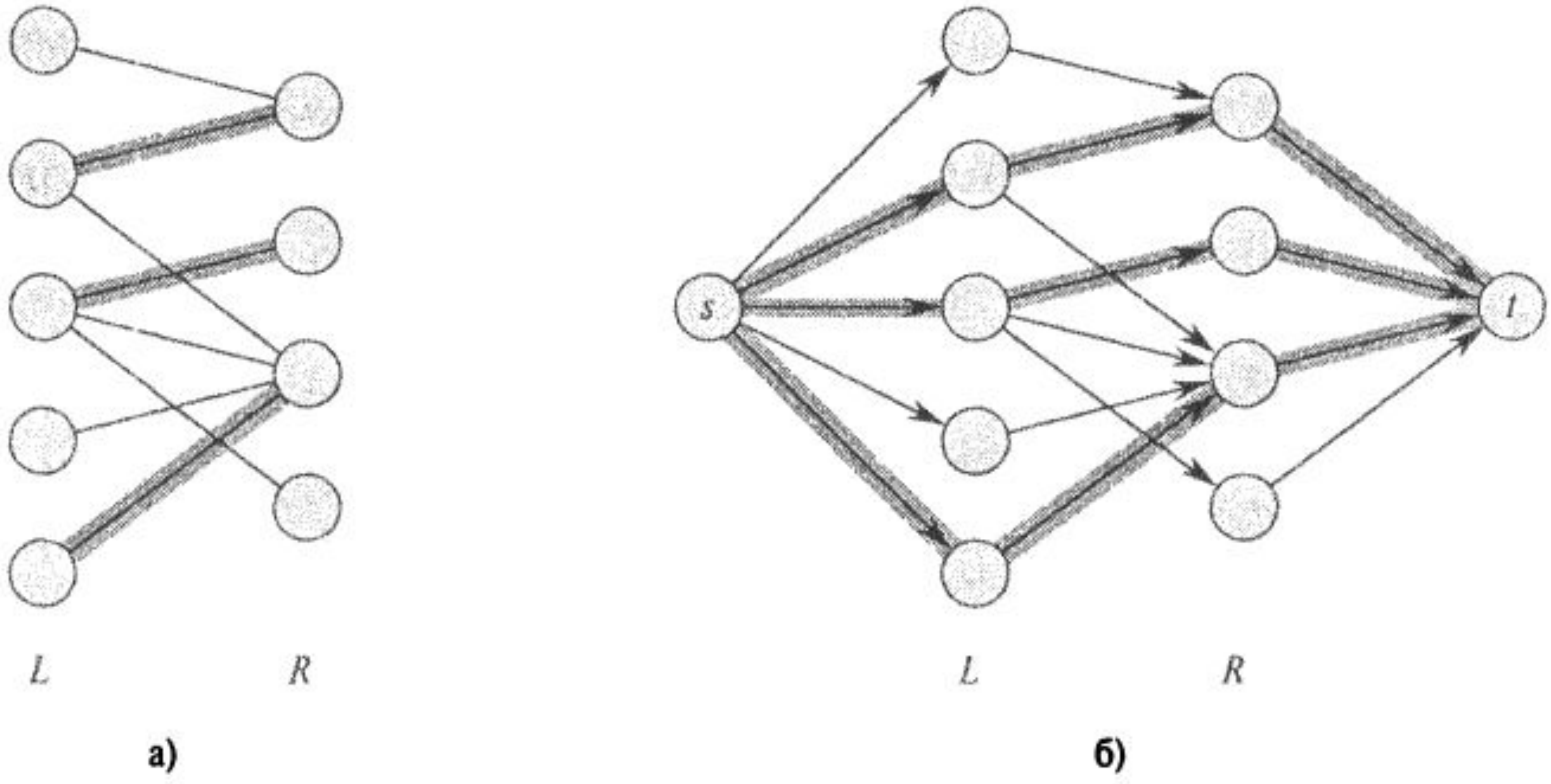


Рис. 26.8. Двудольный граф (*а*) и соответствующая ему транспортная сеть (*б*). Выделенные ребра обеспечивают максимальный поток и определяют максимальное паросочетание

Следующая лемма показывает, что паросочетание в G непосредственно соответствует некоторому потоку в соответствующей транспортной сети G'. Поток f в транспортной сети $G = (V, E)$ называется ***целочисленным*** (integer-valued), если значения $f(u, v)$ целые для всех $(u, v) \in V \times V$.

Лемма 26.10. Пусть $G = (V, E)$ — двудольный граф с разбиением вершин $V = L \cup R$, и пусть $G' = (V', E')$ — соответствующая ему транспортная сеть. Если M — паросочетание в G, то существует целочисленный поток f в G', величина которого $|f| = |M|$. Справедливо и обратное утверждение: если f — целочисленный поток в G', то в G существует паросочетание M с мощностью $|M| = |f|$.

На основании леммы 26.10 можно сделать вывод, что максимальное паросочетание в двудольном графе G соответствует максимальному потоку в соответствующей ему транспортной сети G', следовательно, можно находить максимальное паросочетание в G с помощью алгоритма поиска максимального потока в G'. Единственной проблемой в данных рассуждениях является то, что алгоритм поиска максимального потока может вернуть такой поток в G', в котором некоторое значение $f(u, v)$ оказывается нецелым, несмотря на то, что величина $|f|$ должна быть целой. Следующая теорема показывает, что такая проблема не может возникнуть при использовании метода Форда-Фалкерсона.

Теорема 26.11 (Теорема о целочисленности). Если функция пропускной способности c принимает только целые значения, то максимальный поток f, полученный с помощью метода Форда-Фалкерсона, обладает тем свойством, что значение потока $|f|$ является целочисленным. Более того, для всех вершин u и v величина $f(u, v)$ является целой.