

Математический анализ

1 семестр

Лекция 2

Лектор: Михайлов Ю. А.
Кафедра 812

1 семестр

Раздел 1. Введение в математический анализ.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Раздел 3. Применение производных к исследованию функций.

Раздел 4. Неопределенный интеграл.

- Функции.
- Предел функции.
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

• **Функции**

Функции представляют собой основной объект изучения в математическом анализе.

Определение. Функцией $y = f(x)$ называется правило, по которому любому значению x из некоторого множества D ставится в соответствие (однозначным образом) значение y из некоторого множества E .

При этом x называется аргументом,
 y - значением функции. D называется
областью определения, $f(D)$ - множеством
значений функции. Используется также
обозначение $f: D \rightarrow E$.

Как правило, функции задаются
аналитически (т.е. формулой):

$$f(x) = x^2, \quad f(x) = \sin 3x, \quad f(x) = |x - 1| \text{ и т.д.}$$

Возможны и другие способы: табличный, описательный и т.д., например, функция

Дирихле

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Функция $y = f(x)$ называется взаимно-однозначной, если

$$1) \forall x_1 \neq x_2 \in D \Rightarrow y_1 \neq y_2;$$

$$2) \forall y \in E \exists x \in D : y = f(x).$$

Для взаимно-однозначной $f : D \rightarrow E$

существует обратная функция

$f^{-1} : E \rightarrow D$, определяемая следующим

образом: $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$ с областью

определения E и множеством значений D

Например, $y = x^3, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y}, y \in \mathbb{R}$,

т.е. $f(x) = x^3, f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

Пусть заданы функции $f : D \rightarrow E$ и $g : E \rightarrow M$,

т.е. $y = f(x), z = g(y)$. Их композицией

(сложной функцией) $h = g \circ f = g(f)$

называется функция $h : D \rightarrow M$ по правилу

$$h(x) = g(f(x)).$$

Например, $h(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2$,

где $f(x) = \sin x, g(y) = y^2$.

• Хотя природа аргументов и значений функции может быть различной, далее нас будут интересовать, в первую очередь, числовые функции действительной переменной, т.е.

$$D \subset \mathbb{R} \text{ и } E \subset \mathbb{R}.$$

• Предел функции

Определение (по Коши).

Число A называется пределом функции

$f(x)$ в точке a (или при $x \rightarrow a$),

обозначается $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Определение предела удобно

формулировать в терминах окрестностей.

При этом надо иметь в виду, что $|a - b|$

означает расстояние между точками a и b

на числовой оси.

Определение. δ - окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$

называется множество

$$U_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} = (a - \delta; a + \delta).$$

Проколотой δ - окрестностью точки a называется

множество

$$U_\delta^o(a) = U_\delta(a) \setminus \{a\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta).$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0:$$
$$\forall x \in U_{\delta}^o(a) \Rightarrow f(x) \in U_{\varepsilon}(A)$$

(определение предела функции в терминах окрестностей).

В таком же стиле можно определить пределы в «бесконечно удаленных точках»

$a = \infty, a = +\infty, a = -\infty$, если ввести их

окрестности следующим образом:

$$\dot{U}_\delta(+\infty) = (\delta; +\infty) = U_\delta^0(+\infty);$$

$$U_\delta(-\infty) = (-\infty; \delta) = U_\delta^0(-\infty);$$

$$U_\delta(\infty) = (-\infty; -\delta) \cup (\delta; +\infty) = \\ = U_\delta^0(\infty) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > \delta\}.$$

В развернутом виде это будет выглядеть,

$$\text{например, так: } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x: |x| > \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Равносильным определением предела функции является следующее.

Определение (по Гейне).

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$\text{и } x_n \neq a \forall n \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

Из определения предела функции по Гейне следует, что основные свойства предела последовательности переносятся и на предел функции: единственность предела, арифметические свойства, возможность внесения знака предела под знак элементарной функции и т.д.

Для предела функции справедливо также все сказанное выше о неопределенностях и их раскрытии.

Пример 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} + 3x - 5}{\sqrt{x - 1} + \sqrt[3]{8x^3 + 2x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\sqrt{1 + \frac{2}{x^2}} + 3 - \frac{5}{x} \right)}{x \left(\sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{8 + \frac{2}{x^2}} \right)} =$$

$$= \frac{1 + 3}{\sqrt[3]{8}} = 2.$$

Пример 2

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 + x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{2(x - 2)(x + \frac{5}{2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{2x + 5} = \frac{2 - 1}{4 + 5} = \frac{1}{9}.$$

Пример 3

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x^3 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + 8 - 9}{(\sqrt{x+8} + 3)(x^3 - 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(\sqrt{x+8} + 3)(x - 1)(x^2 + x + 1)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(\sqrt{x+8} + 3)(x^2 + x + 1)} =$$

$$= \frac{1}{(3 + 3)(1 + 1 + 1)} = \frac{1}{18}.$$

Пример 4

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 - \sqrt{x + 8}}{\sqrt[3]{x} - 1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9 - (x + 8)}{3 + \sqrt{x + 8}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x - 1} =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{3 + \sqrt{x + 8}} = - \frac{1 + 1 + 1}{3 + 3} = - \frac{1}{2}.$$

Пример 5

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{x - 1} &= [\sqrt[n]{x} = t] = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{t^n - 1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - 1}{(t - 1)(t^{n-1} + t^{n-2} + \dots + 1)} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 1} \frac{1}{t^{n-1} + \dots + 1} = \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Пример 6

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{4x^2 - 7x + 4} - 2x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 7x + 4 - 4x^2}{\sqrt{4x^2 - 7x + 4} + 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7x + 4}{x \left(\sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2}} + 2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-7 + \frac{4}{x}}{\sqrt{4 - \frac{7}{x} + \frac{4}{x^2}} + 2} = -\frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Пример 7

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{(x-1)(x+1)}} + \frac{1}{\sqrt{(x+1)}} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{(x+1)}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

• Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение. Функция $f(x)$ называется
бесконечно малой при $x \rightarrow a$
(в том числе для $a = \infty, a = +\infty, a = -\infty$),
если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой

при $x \rightarrow a$, если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

При этом $A = \infty$ понимается в смысле

определения предела в терминах

окрестностей: $f(x) \in U_\varepsilon(\infty) \Leftrightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

Пример 8. Сформулировать на языке $\varepsilon - \delta$

определение предела $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall x < -\delta \Rightarrow$

$|f(x)| > \varepsilon$.

• Свойства б. м. и б. б.

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ – б. м. в точке a ,

то $f \pm g, cf, fg$ – также б. м.

2. Если $f(x)$ – б. м. в точке a ,

а $g(x)$ – ограниченная в $U_\delta^o(a)$,

то fg – б. м. в точке a .

Например, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$, т.к. $f(x) = \frac{1}{x}$ – б. м.,

а $g(x) = \sin x$ – ограниченная.

3. Если $f(x)$ — б. м. в точке a и $f(x) \neq 0$

в $U_\delta^o(a)$, то $\frac{1}{f}$ — б. б. в точке a .

4. Если $f(x)$ — б. б. в точке a , то $\frac{1}{f}$ — б. м.

в точке a .

5. Если $f(x)$ и $g(x)$ — б. б. в точке a ,

то cf, fg — б. б. в точке a .

6. Если $f(x)$ и $g(x)$ – б. б. одного знака в точке a , то $f + g$ – б. б. в точке a .

Бесконечно малые играют особую роль в теории пределов. В частности, любой предел функции связан с некоторой бесконечно малой.

Теорема.

$\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \Leftrightarrow \exists$ б. м. в точке a $\alpha(x)$:

в некоторой $U_{\delta}^0(a)$ имеет место равенство

$$f(x) = A + \alpha(x).$$

• Доказательство.

1. Необходимость.

Обозначим $\alpha(x) = f(x) - A$, тогда

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - A) = 0.$$

2. Достаточность.

Если $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.

в точке a , то $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} (A + \alpha(x)) = A$,

ч. т. д.