Математический анализ

1 семестр

Лекция 2

Лектор: Михайлов Ю. А.
Кафедра 812

1 семестр

Раздел 1. Введение в математический анализ.

Раздел 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Раздел 3. Применение производных к исследованию функций.

Раздел 4. Неопределенный интеграл.

- Функции.
- Предел функции.
- Бесконечно малые и бесконечно большие функции.

Функции

Функции представляют собой основной объект изучения в математическом анализе.

Определение. Функцией $y = f(x)$ называется правило, по которому любому значению x из некоторого множества *D* ставится в соответствие (однозначным образом) значение y из некоторого множества *E*.

- При этом *x* называется аргументом, y - значением функции. *D* называется областью определения, $f(D)$ - множеством значений функции. Используется также обозначение $f\colon D \to E$.

Как правило, функции задаются аналитически (т.е. формулой):

$f(x) = x^2$, $f(x) = \sin 3x$, $f(x) = |x - 1|$ и т.д.

- Возможны и другие способы: табличный, описательный и т.д., например, функция Дирихле

$$\delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Функция $y = f(x)$ называется взаимно-однозначной, если

1) $\forall x_1 \neq x_2 \in D \Rightarrow y_1 \neq y_2$;

2) $\forall y \in E \ \exists x \in D : \ y = f(x)$.

Для взаимно-однозначной $f : D \to E$

существует обратная функция

$f^{-1} : E \to D$, определяемая следующим

образом: $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow y = f(x)$ с областью

определения *E* и множеством значений *D*

Например, $y = x^3, x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{y},\ y \in \mathbb{R}$,

т.е. $f(x) = x^3,\ f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y}$.

- Пусть заданы функции $f : D \to E$ и $g : E \to M$,

т.е. $y = f(x), z = g(y)$. Их композицией

(сложной функцией) $h = gof = g(f)$

называется функция $h : D \to M$ по правилу

$h(x) = g(f(x))$.

Например, $h(x) = \sin^2 x = (sinx)^2$,

где $f(x) = \sin x\,, g(y) = y^2$.

- Хотя природа аргументов и значений функции может быть различной, далее нас будут интересовать, в первую очередь, числовые функции действительной переменной, т.е.

$D \subset \mathbb{R}$ и $E \subset \mathbb{R}$.

•

Предел функции

Определение (по Коши).

Число A называется пределом функции

$f(x)$ в точке a (или при $x \to a$),

обозначается $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A,$ если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta(\varepsilon) > 0 \colon \forall x \colon 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

- Определение предела удобно формулировать в терминах окрестностей. При этом надо иметь в виду, что $|a-b|$ означает расстояние между точками a и b на числовой оси.

Определение. δ - окрестностью точки $a \in \mathbb{R}$ называется множество

$\cup_{\delta}(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \delta\} = (a - \delta; a + \delta)$.

Проколотой δ - окрестностью точки a называется множество

$$\cup_{\delta}^{o}(a) = \cup_{\delta}(a) \setminus \{a\} =$$

$$= \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta).$$

Тогда

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0:$$

$$\forall x \in \cup_{\delta}^{o}(a) \Rightarrow f(x) \in \cup_{\varepsilon}(A)$$

(определение предела функции в терминах окрестностей).

В таком же стиле можно определить пределы в «бесконечно удаленных точках» $a = \infty, a = +\infty, \ a = -\infty$, если ввести их окрестности следующим образом:

$\dot{\cup}_{\delta}(+\infty) = (\delta; +\infty) = \cup^{o}_{\delta}(+\infty);$

$\cup_{\delta}(-\infty) = (-\infty; \delta) = \cup^{o}_{\delta}(-\infty);$

$\cup_{\delta}(\infty) = (-\infty; -\delta) \cup (\delta; +\infty) =$

$= \cup^{o}_{\delta}(\infty) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > \delta\}.$

В развернутом виде это будет выглядеть,

например, так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : |x| > \delta \Rightarrow$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

- Равносильным определением предела функции является следующее.

Определение (по Гейне).

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \{x_n\}\colon \lim_{n \to \infty} x_n = a$$

$$\text{и } x_n \neq a \ \forall n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Из определения предела функции по Гейне следует, что основные свойства предела последовательности переносятся и на предел функции: единственность предела, арифметические свойства, возможность внесения знака предела под знак элементарной функции и т.д.

Для предела функции справедливо также все сказанное выше о неопределенностях и их раскрытии.

•

Пример 1

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}+3x-5}{\sqrt{x-1}+\sqrt[3]{8x^3+2x}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}+3-\frac{5}{x})}{x(\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}}+\sqrt[3]{8+\frac{2}{x^2}}}=$$

$$=\frac{1+3}{\sqrt[3]{8}}=2.$$

Пример 2

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2+x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{2(x-2)(x+\frac{5}{2})}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{2x+5}=\frac{2-1}{4+5}=\frac{1}{9}.$$

Пример 3

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+8-9}{(\sqrt{x+8}+3)(x^3-1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(\sqrt{x+8}+3)(x-1)(x^2+x+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(\sqrt{x+8}+3)(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{1}{(3+3)(1+1+1)}=\frac{1}{18}.$$

•

Пример 4

$$\lim_{x \to 1} \frac{3 - \sqrt{x+8}}{\sqrt[3]{x} - 1} =$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{9 - (x+8)}{3 + \sqrt{x+8}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{x - 1} =$$

$$= -\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{x} + 1}{3 + \sqrt{x+8}} = -\frac{1+1+1}{3+3} = -\frac{1}{2}.$$

•

Пример 5

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}=[\sqrt[n]{x}=t]=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{t^n-1}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{t-1}{(t-1)(t^{n-1}+t^{n-2}+\cdots+1)}=$$

$$=\lim_{t\to 1}\frac{1}{t^{n-1}+\cdots+1}=\frac{1}{n}.$$

-

Пример 6

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-7x+4-4x^2}{\sqrt{4x^2-7x+4}+2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-7x+4}{x\left(\sqrt{4-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-7+\frac{4}{x}}{\sqrt{4-\frac{7}{x}+\frac{4}{x^2}}+2}=-\frac{7}{4}.$$

-

Пример 7

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-1}{\sqrt{x^2-1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}+\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{(x-1)(x+1)}}+\frac{1}{\sqrt{(x+1)}}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x-1}}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{(x+1)}}+\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

•
Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение. Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (в том числе для $a = \infty, a = +\infty, a = -\infty$), если

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0\,.$$

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой

при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

При этом $A = \infty$ понимается в смысле

определения предела в терминах

окрестностей: $f(x) \in \cup_{\varepsilon}(\infty) \Leftrightarrow |f(x)| > \varepsilon$.

Пример 8. Сформулировать на языке $\varepsilon - \delta$

определение предела $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0 \colon \forall x < -\delta \Rightarrow$

$|f(x)| > \varepsilon$.

Свойства б. м. и б. б.

1. Если $f(x)$ и $g(x)$ – б. м. в точке a,

то $f \pm g, cf, fg$ – также б. м.

2. Если $f(x)$ – б. м. в точке a,

а $g(x)$ – ограниченная в $\cup_{\delta}^{o}(a)$,

то fg – б. м. в точке a.

Например, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{sinx}{x} = 0$, т.к. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ – б. м.,

а $g(x) = sinx$ – ограниченная.

3. Если $f(x)$ – б. м. в точке a и $f(x) \neq 0$

в $\cup_{\delta}^{o}(a)$, то $\frac{1}{f}$ – б. б. в точке a.

4. Если $f(x)$ – б. б. в точке a, то $\frac{1}{f}$ – б. м.

в точке a.

5. Если $f(x)$ и $g(x)$ – б. б. в точке a,

то cf, fg – б. б. в точке a.

6. Если $f(x)$ и $g(x)$ – б. б. одного знака в точке a, то $f+g$ – б. б. в точке a.

Бесконечно малые играют особую роль в теории пределов. В частности, любой предел функции связан с некоторой бесконечно малой.

Теорема.

$\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A \Leftrightarrow \exists$ б. м. в точке a $\alpha(x)$:

в некоторой $\cup_{\delta}^{o}(a)$ имеет место равенство

$f(x) = A + \alpha(x)$.

- **Доказательство.**

1. Необходимость.

   Обозначим $\alpha(x) = f(x) - A$, тогда

   $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to a}(f(x) - A) = 0.$

2. Достаточность.

   Если $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – б.м.

   в точке a, то $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a}(A + \alpha(x)) = A,$

   ч. т. д.