Теория вероятностей
Лекция 1: Основные понятия теории вероятностей. Комбинаторика

- Множества и операции с ними
- Случайные события
- Классическое определение вероятности, свойства
- Формулы комбинаторики
- Статистическая вероятностная схема
- Геометрическая вероятностная схема

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика, – М: Высшая школа, 2001, -408с.

2. Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. – М: Высшая школа, 2001, -400с.

3. Письменный Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике. – М: Айрис Пресс, 2004, -252с.

4. Кремер Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика. – М: ЮНИТИ, 2004, -573с.

5. Виленкин Н.Я. Популярная комбинаторика. –М: Наука, 1975, -208с.

6. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В. Введение в теорию вероятностей. –М: Наука, 1982, -161с.

7. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. – М: Наука, 1975, -451с.

8. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. – М: Наука, 1988, -368с.

9. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. М: Наука, 1969, -512с.

$N \backslash n$	10^2	10^4	10^6
1	41	4985	499558
2	48	5004	499952
3	44	5085	500114
4	52	4946	500064
5	58	4978	500183
6	52	4985	499533
7	45	5012	500065
8	50	4931	500317
9	52	5016	500449
10	45	4973	500704
Er	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}

1 Множества

Языком теории вероятностей служат множества.

Определение 1. *Множество - это совокупность объектов, объединенных по определенному признаку.*

Обозначают множества заглавными латинскими буквами. Объекты, из которых состоит множество, обозначаются строчными латинскими буквами и называются его элементами (иногда точками). Принадлежность объекта x множеству A обозначаются в виде: $x \in A$.

Способы задания множеств:

1. перечислением всех элементов в фигурных скобках: $C = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \}$ - множество цифр.

2. указанием в фигурных скобках свойств элементов, составляющих данное множество: $B = \{x | x^3 - 3x^2 - 7x - 6 = 0\}$ - множество решений кубического уравнения.

Определение 2. *Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом* $\varnothing$.

Определение 3. *Два множества A и B равны, если они состоят из одних и тех же элементов, при этом пишут: $A = B$.*

Пусть множество A содержит какие-либо элементы, а множество B тоже содержит все эти элементы и еще некоторые другие, не содержащиеся в A. Тогда множество A называется подмножеством множества B. Этот факт записывают в виде: $A \subset B$. Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.

Определение 4. *Множество Ω, относительно которого проводятся рассуждения, называется универсальным.*

Например, для множеств $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ и $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ универсальным может быть множество всех цифр C.

Из уже имеющихся множеств при помощи операции объединения $\cup$, пересечения $\cap$, разности и дополнения можно образовывать новые множества.

Например, если даны множества A и B, то

- $A \cup B$ - множество, состоящее из элементов входящих или в множество A, или в множество B, или в оба из них (В теории вероятностей $A + B$).
- $A \cap B$ - множество, состоящее из элементов входящих и в множество A, и в множество B (В теории вероятностей AB).
- $A - B$ - множество, которое получается из множества A удалением элементов, одновременно принадлежащих множеству B.
- $\overline{A} = \Omega - A$ - дополнение к множеству A относительно универсального множества Ω.

Определение 5. *Множества, состоящие из конечного числа элементов, называются конечными.*

Определение 6. *Множества, состоящие из бесконечного числа элементов, называются бесконечными. Если элементы бесконечного множества можно перенумеровать, то множество называется счетным, в противном случае - несчетным.*

Примерами счетных множеств являются числовые множества N, Z, Q. Множество R несчетно.

2 События

Теория вероятностей имеет дело со случайными событиями (опытами, наблюдениями), которые подчиняются следующим условиям:

1. повторяемость (в принципе)

   - появления бракованных изделий на автоматическом станке - повторяющееся случайное событие.
   - рождение великого поэта - не повторяющееся случайное событие

2. статистическая устойчивость

   - число выпадений орлов при многократном подбрасывании правильной монеты имеет примерно одинаковый процент в различных сериях испытаний.
   - число аномально жарких дней в году не обладает статистической устойчивостью.

Определение 7. *Испытание (опыт, наблюдение) - это совокупность условий, при которых наблюдается явление со случайным исходом.*

Результатом испытания является событие, с каждым из которых можно связать определенное множество. Поэтому с событиями выполняют те же действия, что и со множествами.

Пример 1.

1. Опыт: наблюдение за числом звонков в минуту, поступившем на телефонную станцию. Событие A: за минуту поступило не более 20 звонков.

2. Опыт: подбрасывание монеты. Событие B: выпадение герба.

3. Опыт: выстрел по мишени. Событие C: попадание в мишень.

Определение 8. *Множество Ω всех возможных исходов данного испытания называется пространством элементарных событий. Элементы этого множества $\omega \in \Omega$, которые не могут быть составлены из других элементов, называются элементарными событиями (исходами), т. е. ω - это один из возможных исходов испытания.*

Определение 9. *Событием называется любое подмножество A множества Ω, т. е. $A \subseteq \Omega$.*

Из определения следует, что ω, Ω и $\varnothing$ тоже события.

Пример 2. Испытание состоит в подбрасывании игрального кубика. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ - пространство элементарных событий, $\omega_1 = 1, \omega_2 = 2, \omega_3 = 3, \omega_4 = 4, \omega_5 = 5, \omega_6 = 6$, - элементарные события, событие $A = \{2, 4, 6, 8\}$ состоит в выпадении четного числа очков.

`Замечание 1.` Элементарное событие не может быть составлено из других событий.

Определение 10. *Событие A, которое всегда происходит в данном испытании, называется достоверным событием.*

Пример 3. Опыт состоит в подбрасывании правильного игрального кубика.
Достоверное событие A: выпадение количества очков не менее 1.

Определение 11. *Событие A, которое никогда не происходит в данном испытании, называется невозможным событием.*

Пример 4. Опыт состоит в подбрасывании правильного игрального кубика. Невозможное событие A: выпадение 7 очков.

Определение 12. *Суммой событий A и B называется событие $A+B$, которое наступает тогда, когда наступает хотя бы одно из событий A или B (в теории множеств $A \cup B$).*

Определение 13. *Произведением событий A и B называется событие $A \cdot B$, которое наступает тогда, когда наступает каждое из событие A и B (в теории множеств $A \cap B$).*

Определение 14. *Разностью событий $A - B$ называется событие, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит.*

Определение 15. *Событием $\overline{A}$, противоположным событию A, называется событие, которое наступает только тогда, когда не наступает событие A.*

Очевидно, что Ω - достоверное событие, а $\varnothing$ - невозможное событие.

Определение 16. *События A и B называются несовместными, если они никогда не происходят в одном и том же испытании, т. е. $AB = \varnothing$.*

Определение 17. *Событие A влечет событие B, если $A \subset B$ (A является частным случаем B).*

Определение 18. *События A и B называются эквивалентными $A = B$, если событие A влечет событие B и событие B влечет событие A. т. е. если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$.*

Определение 19. *События называются равновозможными, если из условия опыта нельзя отдать предпочтения одному из них.*

Пример 5. При подбрасывании правильной монеты выпадения герба и решки равновозможны.

Определение 20. *События* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *называются полной группой событий, если*

1. *они попарно несовместны* $A_i \cdot A_j = \varnothing, \forall i, j.$
2. *в сумме образуют все пространство элементарных событий:* $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i = \Omega.$
3. *и в результате данного испытания только одно из них обязательно произойдет.*

Определение 21. *Событие* A_i *благоприятствует событию* A, *если появление* A_i *приводит к наступлению события* A, *т. е. если* $A_i \subseteq A$.

Пример 6. Опыт заключается в подбрасывании правильного игрального кубика. Событие A состоит в выпадении чётного числа очков. Благоприятствующими будут следующие события $A_i = \{2, 4, 6\}$.

3. Вероятность

Вероятность - это количественная характеристика наступления данного события.

Определение 1. *Вероятностью называется числовая функция P, определенная на каждом множестве $A \subseteq \Omega$ и обладающая следующими свойствами:*

1. $P(A) \geqslant 0$
2. $P(\Omega) = 1$
3. $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$,
   где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - *попарно несовместные события, т. е* $A_i \cdot A_j = \varnothing, \forall i, j$.

Следствия из свойств вероятности

1. $P(\Omega) = P(\varnothing) + P(\Omega)$ - следует из соотношения $\Omega = \varnothing + \Omega$ и свойства 3.

2. $P(\varnothing) = 0$ - следует из первого следствия.

3. $P(\overline{A}) = 1 - P(A), \forall A$ - Следует из соотношения $\overline{A} + A = \Omega$ и свойства 3.

4. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$ - из свойств 1 и 2.

5. $P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB)$, где A, B - произвольные, не обязательно несовместные события (см. Венцель с. 41). Наступление события A означает, что произошло одно из событий $\omega_i \in A$, которое одновременно принадлежит событию B. Следовательно, $P(B|A)$ - вероятность наступления события из пересечения $A \cap B$ множеств A и B.

Ограничив события, на которых определены вероятности, дополнительными условиями, можно выделить несколько вероятностных схем.

3.1 Классическая вероятностная схема

Определение 2. *Классической вероятностной схемой называют испытания, удовлетворяющие следующим свойствам:*

1. *элементарные исходы образуют конечное множество* $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$*;*

2. *элементарные исходы образуют полную группу событий, т.е. попарно несовместны, в сумме образуют пространство элементарных событий* Ω *и только одно из них обязательно происходит;*

3. *элементарные события равновозможны.*

В классической схеме вероятность P случайного события A вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{n_A}{n} \tag{1}$$

где n_A - число элементарных событий, благоприятствующих событию A, т. е. тех исходов, при которых событие A происходит, n - полное число элементарных событий.

Функция (1) является вероятностью потому, что удовлетворяет всем свойствам вероятности.

Пример 1. Из урны, содержащей 4 белых шара и 6 черных шаров, наугад извлекают один шар. Какова вероятность того, что этот шар окажется черным?

Решение. Событие A={извлеченный шар - черный}. Элементарное событие ω={из урны извлечен один шар}. Данное испытание имеет $n = 4 + 6 = 10$ элементарных событий. Благоприятствующих событию A элементарных событий $n_A = 6$. Поэтому по формуле (1) вероятность события A равна: $P(A) = \dfrac{6}{10} = 0,6$.

Пример 2. Что более вероятно при подбрасывании двух монет: монеты лягут одноименными или разноименными сторонами?
Решение. Равновозможные исходы опыта представим в виде: {гг,гр,рг,рр}, где г - герб, р - решка, общее число исходов $n = 4$.
Событию A={монеты лягут одноименными сторонами} благоприятствуют исходы {гг,рр}, событию B={монеты лягут разноименными сторонами} благоприятствуют исходы {гр,рг}. Поэтому $n_A = 2$, $n_B = 2$ и из формулы (1) следует, что $P(A) = \dfrac{2}{4} = 0,5$, $P(B) = \dfrac{2}{4} = 0,5$. Значит, вероятности одинаковы.

Из формулы (1) следует, что в классической схеме вычисление вероятности события сводится к вычислению числа благоприятствующих этому событию случаев. Часто эти числа подсчитываются с использованием методов комбинаторики.

4.

Размещения с повторениями Пусть множество $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ состоит из n элементов, среди которых могут быть одинаковые. Выберем из этого множества k элементов, где $k \leq n$. Полученный набор элементов, расположенных в определенном порядке, называется размещением с повторениями и обозначается $\overline{A}_n^k$.
Два набора считаются различными, если они различаются или типом входящих элементов, или порядком их следования.

Число таких наборов вычисляется по формуле:

$$\overline{A}_n^k = n^k \tag{2}$$

Пример 3. Имеется кодовый замок, содержащий 3 ячейки. Сколько кодовых комбинаций может содержать такой замок?
Решение. Всего имеется десять цифр: $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. В первой ячейке можно набрать 10 цифр. С каждой из этих цифр во второй ячейке можно набрать тоже 10 цифр. Всего получится $10 \cdot 10 = 100$ комбинаций в двух ячейках. С каждой из 100 комбинаций в первых двух ячейках можно набрать 10 цифр в третьей ячейке. Итого во всех трех ячейках можно набрать 1000 комбинаций.

Размещения без повторений Пусть множество $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ состоит из n элементов, среди которых нет одинаковых. Выберем из этого множества k элементов, где $k \leq n$. Полученный набор элементов, расположенных в определенном порядке, называется размещением без повторения и обозначается A_n^k.
Два набора считаются различными, если они различаются хотя бы одним элементом, или состоят из одинаковых элементов, но отличаются порядком их следования.

Число таких наборов вычисляется по формуле:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)$$

или

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} \tag{3}$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Пример 4. В первенстве по футболу участвует 17 команд. Сколькими способами могут распределится между ними комплекты золотых, серебряных и бронзовых медалей?
Решение. Золотые медали может получить каждая из 17 команд, т.е. существует 17 способов распределения. Серебряные медали может получить каждая из оставшихся 16 команд, причем с каждым из 17 способов распределения золотых медалей сочетается 16 способов распределения серебряных медалей. Всего существует $17 \cdot 16 = 272$ способа. Бронзовые медали может получить каждая из оставшихся 15 команд в сочетании с 272 способами распределения золотых и серебряных медалей. Поэтому общее число способов распределения всех комплектов медалей равно $272 \cdot 15 = 4080$.

Данную задачу можно решить непосредственно используя формулу (3):
$A_{17}^{3} = \frac{17!}{(17-3)!} = \frac{14! \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{14!} = 4080$.

Перестановки Если при рассмотрении размещений без повторений из n различных видов элементов выбирать n элементов, то они могут отличаться только порядком следования. Такие наборы называются перестановками и обозначаются через P_n. Из формулы (3) следует, что при $k = n$, число перестановок равно

$$P_n = n! \tag{4}$$

Пустое множество можно упорядочить одним способом, поэтому $0! = 1$.

Пример 5. Сколько раз требуется пересаживаться персонажам басни Крылова "Квартет", чтобы убедиться в том, что в музыканты они не годятся?
Решение. Имеется 4 стула и осел, козел, мартышка да косолапый мишка. Надо выяснить сколькими способами можно разместить 4 элемента по 4 местам. По формуле (4)
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$.

Перестановки с повторениями Пусть множество $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ состоит из n элементов, среди которых могут быть одинаковые. Выберем из этого множества n элементов. Полученный набор элементов, расположенных в определенном порядке, называется перестановками с повторениями и обозначается $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$. Такие наборы могут отличаться только порядком следования элементов. Перестановок с повторениями будет меньше, чем таких же без повторения. Например, если в слове "МАМА"второй и четвертый элемент поменять местами, то слово не изменится.

Число перестановок с повторениями вычисляется по формуле:

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!} \tag{5}$$

где n_1 - число элементов первого типа, n_2 - число элементов второго типа, и т. д.

Пример 6. Сколько перестановок можно сделать из букв слова "Миссисипи"?
Решение. В данном слове буква "и"встречается 4 раза, буква "с"встречается три раза, остальные буквы встречаются по одному разу. Всего 9 букв. По формуле (5) получаем:
$P(4, 3, 1, 1) = \dfrac{9!}{4!3!1!1!} = 2520.$

Сочетания без повторений Сочетаниями C_n^k из n элементов по k элементов называются всевозможные наборы этих элементов, отличающиеся друг от друга составом элементов, но не порядком следования.

Число сочетаний без повторений равно:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{6}$$

Пример 7. В шахматном турнире участвуют 20 шахматистов. В финал выходят трое. Сколькими способами может быть образован финал турнира?
Решение. В задаче не важен порядок, в котором шахматисты выходят в финал, поэтому можно воспользоваться формулой (6): $C_{20}^3 = \frac{20!}{3!(20-3)!} = \frac{17! \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{3!17!} = 1140.$

Сочетания с повторениями Пусть множество $\Omega = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ состоит из n элементов, среди которых есть одинаковые. Набор из k элементов, расположенных в любом порядке, называется сочетаниями с повторениями. Например, в продаже имеется 4 сорта пирожных, требуется купить 7 пирожных. В результате покупки обязательно окажутся пирожные одинакового сорта, но порядок, в котором они уложены в сумку не важен.

Число сочетаний с повторениями определяется по формуле:

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!} \tag{7}$$

Правила комбинаторики Правило суммы

Пусть дано множество A и множество B. Если из первого множества один элемент можно выбрать n способами, а из второго - m способами, то выбор одного элемента из первого или из второго множества можно выбрать $n+m$ способами. Это правило справедливо для любого конечного числа множеств.

Правило произведения

Пусть дано множество A и множество B, причем из первого множества один элемент можно выбрать n способами, а из второго m - способами. Из каждого множества выбирают по одному элементу и получившуюся пару записывают в определенном порядке. Число таких пар можно выбрать: $n \cdot m$ способами. Это правило справедливо для любого конечного числа множеств.

Пример 8. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек и 15 юношей, разыгрывается 5 билетов в театр. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки.
Решение. Найдем число благоприятствующих случаев и общее число возможных случаев. Общее число случаев - это число способов, которыми можно распределить 5 билетов среди 25 человек. Порядок распределения не важен, поэтому надо вычислить число сочетаний: $C_{25}^{5} = \frac{25!}{5!(25-5)!} = 53130$.
Число благоприятствующих случаев. Имеем множество девушек и множество юношей. Среди 10 девушек распределить 2 билета можно $C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!(10-2)!} = 45$ способами, т. к. порядок не важен. Аналогично, среди 15 юношей распределить 3 билета можно $C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!(15-3)!} = 455$ способами. По правилу умножения распределить все 5 билетов можно $C_{10}^{2} \cdot C_{15}^{3} = 20475$ способами.
Вероятность того, что 2 билета достанутся девушкам равна: $P(A) = \frac{C_{10}^{2} \cdot C_{15}^{3}}{C_{25}^{5}} \approx 0,385$.

5. Статистическая вероятностная схема

Существенной особенностью классической схемы является требование равновозможности исходов. Когда в условиях испытания не выполняется это требование, то используют статистическую вероятность (частоту). Проведем серию из n опытов и подсчитаем число n_A появлений события A. Тогда вероятность в статистической схеме вычисляется по формуле:

$$P(A) = \frac{n_A}{n}$$

Данную вероятность можно вычислить только после проведения опыта, т. е. требуются экспериментальные данные. Этим статистическая вероятность отличается от классической, которая определяется числом благоприятствующих случаев. Здесь n_A частота появления события A, а не число благоприятствующих случаев.

Примером использования статистической схемы может служить подбрасывание монеты, у которой смещен центр тяжести. В этом случае выпадение числа орлов и гербов не одинаково, поэтому вычислить число благоприятствующих какому-либо исходу случаев нельзя. Вероятность определенного исхода можно вычислить только подбросив монету n раз и подсчитав число интересующих исходов. Вероятность вычисляется после проведения опыта.

6. Геометрическая вероятностная схема

Если в классической схеме отказаться от требования того, что элементарные исходы образуют конечное множество, оставив в силе остальные требования, то получим следующую задачу. Пусть на плоскости имеется множество G и его подмножество D. Обозначим через S_G и S_D площадь каждого из множеств. В область G наудачу бросают точку и интересуются, какова вероятность попадания этой точки в область D. Бросают наудачу означает, что брошенная точка может попасть в любую точку множества G. Вероятность попадания точки в какую-либо часть множества G пропорциональна площади этой части. Поэтому, рассматривая событие A={точка попала в множество D}, получим:

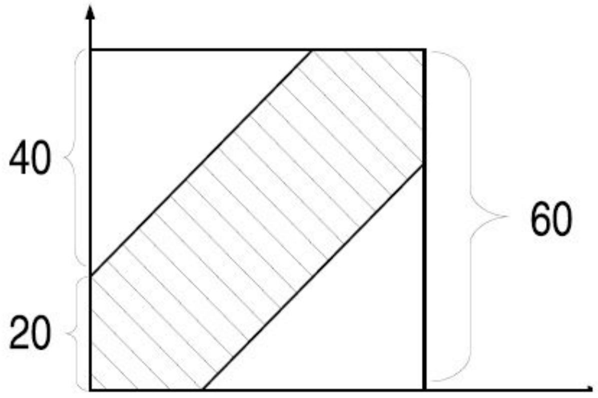
$$P(A) = \frac{S_D}{S_G}$$

В общем случае

$$P(A) = \frac{mes(D)}{mes(G)} \tag{8}$$

где mes означает площадь или объем, в зависимости от размерности задачи.

Пример 9. Два человека A и B договорились о встрече между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет в течение 20 минут, затем уходит. Чему равна вероятность встречи A и B?
Решение. Обозначим моменты прихода A и B соответственно через x и y. Для того чтобы встреча произошла необходимо и достаточно выполнения соотношения:
$|x-y| \leq 20$. Рассмотрим x и y как декартовы координаты на плоскости. Всевозможные исходы изображаются точками квадрата со стороной 1 час (60 мин).



Благоприятствующие встрече события характеризуются точками в заштрихованной полосе. Искомая вероятность равна отношению площади полосы к площади квадрата:
$P(A) = \dfrac{60^2 - 40^2}{60^2} = \dfrac{5}{9} \approx 0,56$

7 Независимость событий

Определение 1. *События A и B называются независимыми, если*

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) \tag{1}$$

т. е. вероятность одного события не зависит от вероятности появления другого события.

Свойства независимых событий:

1. Если $P(B) > 0$, то $P(A|B) = P(A)$.
2. Если A и B независимы, то $\overline{A}$ и B тоже независимы.
3. Если A и B независимы, и $B \cap C = \varnothing$, тогда события A и $B + C$ тоже независимы.

Пример 1. Найти вероятность появления герба на двух монетах одновременно при однократном их подбрасывании.

Решение. Вероятности появления герба на каждой монете равны $P(A) = \frac{1}{2}$ и не зависят друг от друга, поэтому можно воспользоваться формулой произведения для независимых событий: $P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Определение 2. *События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются независимыми в совокупности, если для любых $k \leq n$ из них выполняется соотношение:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_k)$$

`Замечание 1.` Из попарной независимости событий не следует их независимость в совокупности и наоборот, из соотношений вида $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$ не следует попарной независимости событий A, B, C.

8. Вероятность суммы событий

Правила сложения вероятностей следуют из свойств вероятности и их следствий. Эти правила справедливы для всех вероятностных схем (не только классической). Если события попарно несовместны т. е. $A_i \cap A_j = \varnothing$, то по свойству 3:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Пример 10. В урне 30 шаров: 10 красных, 5 синих и 15 бесцветных. Найти вероятность появления цветного шара.
Решение. Появление цветного шара (событие $A + B$) означает появление либо красного (событие A), либо белого (событие B) шара. Вероятность появления красного шара $P(A) = \frac{10}{30}$. Вероятность появления синего шара $P(B) = \frac{5}{30}$. События A и B несовместны (появление шара одного цвета исключает одновременное появление шара другого цвета), поэтому

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{10}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{2}$$

Для полной группы событий, т. е. $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$, события $A_1, A_2, \ldots A_n$ попарно несовместны и одно из них обязательно происходит, по свойству 3 и свойству 2 получим: $P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1$.

Пример 11. Стрелок производит 2 выстрела по мишени. Вероятность одного попадания $P(A) = 0,5$, вероятность двух попаданий $P(B) = 0,3$. Какова вероятность промаха (событие C)?
Решение. События $A + B + C = \Omega$, поэтому они образуют полную группу событий, т. к. они попарно несовместны и одно из них обязательно произойдет. Поэтому $P(A) + P(B) + P(C) = 1$, откуда $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - 0,5 - 0,3 = 0,2$

Событие A и противоположное ему событие $\overline{A}$ для $\forall A$ образуют полную группу, поэтому $P(A) + P(\overline{A}) = 1$.

Сложение вероятностей совместных событий Для совместных событий, т. е. $A_i \cap A_j \neq \varnothing$ в соответствии со следствием 5:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

где события A, B и C произвольны.

Вероятность наступления хотя бы одного события

Наступление хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ означает, что должно произойти либо одно, либо два, либо три, либо все n событий. Для вычисления таких вероятностей пользуются следующим результатом.

Теорема 1. *Вероятность появления хотя бы одного из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимых в совокупности событий равна:*

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \ldots P(\overline{A_n})$$

Доказательство. События $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$ и $\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n}$ образуют полную группу событий, поэтому

$$A + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n} = \Omega \quad \text{и} \quad P(A + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) = 1$$

По правилу сложения независимых событий можно записать:

$$P(\Omega) = P(A + \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) = P(A) + P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n})$$

или

$$P(A) = 1 - P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n})$$

По условию события независимы в совокупности, поэтому

$$P(\overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \ldots \overline{A_n}) = P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) \ldots P(\overline{A_n})$$

Подстановка этого соотношения в предыдущее равенство завершает доказательство.

Пример 2. Вероятности попадания в цель каждого из трех орудий соответственно равны: $p_1 = 0,8$, $p_2 = 0,7$, $p_3 = 0,9$. Какова вероятность попадания в цель хотя бы одного из орудий (событие A) при одном залпе?

Решение. Результат залпа, при котором произошло попадание хотя бы одного, орудия можно записать в виде:

111 110 101 011 100 010 001,

где 0 означает промах, а 1 - попадание соответствующего орудия.

Вероятности промаха каждого орудия имеют вид:

$1 - p_1, \;\; 1 - p_2, \;\; 1 - p_3$

Результат выстрела каждого орудия - независимое событие, поэтому вероятность попадания хотя бы одного орудия имеет вид:

$$P(A) = p_1p_2p_3 + (1-p_1)p_2p_3 + p_1(1-p_2)p_3 + p_1p_2(1-p_3) +$$
$$(1-p_1)(1-p_2)p_3 + (1-p_2)p_2(1-p_3) + p_1(1-p_2)(1-p_3)$$

Подставив значения, получим $P(A) = 0,994$
Более простой способ решения. Попадание каждого орудия является независимым событием, поэтому можно воспользоваться доказанной теоремой. Вероятность промаха всех орудий сразу равна:

$$P(A) = (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$$

Тогда по теореме вероятность попадания хотя бы одного орудия равна:

$$P(A) = 1 - (1-p_1)(1-p_2)(1-p_3) = 0,994$$

9. Формула полной вероятности

Пусть пространство элементарных событий Ω представлено в виде суммы n попарно не пересекающихся событий $H_1, H_2, \ldots H_n$, $\quad H_i \cap H_j = \varnothing$. Каждое событие H_i называется гипотезой и в совокупности они образуют полную группу событий. Пусть $A \subseteq \Omega$ - некоторое произвольное событие. Его можно представить в виде суммы независимых событий:

$$A = A\Omega = A(H_1 + H_2 + \ldots + H_n) = AH_1 + AH_2 + \ldots + AH_n$$

поэтому по формуле сложения вероятностей независимых событий вероятность события A равна:

$$P(A) = P(AH_1) + P(AH_2) + \ldots + P(AH_n)$$

Для каждого слагаемого справа можно воспользоваться формулой умножения зависимых событий. В результате получится формула полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n) \qquad (2)$$

т.е. вероятность события A равна сумме вероятностей гипотез, умноженных на условную вероятность события A при справедливости данной гипотезы H_n.

Пример 3. В механическом цехе изготавливают 30% всех болтов на первом станке, 25% - на втором и 45% - на третьем. Первый станок допускает 2% бракованных изделий, второй - 1% и третий - 3%. Все болты помещают в ящик и привозят на контроль. Какова вероятность того, что извлеченный наугад болт окажется бракованным?
Решение. Обозначим A={ извлеченный болт дефектный}. Введем гипотезы: H_1 ={болт сделан на первом станке}, H_2 ={болт сделан на втором станке}, H_3 ={болт сделан на третьем станке}. По условию вероятности гипотез равны: $P(H_1) = 0,3$, $P(H_2) = 0,25$, $P(H_3) = 0,45$. Вероятность брака при условии, что болт сделан на первом станке: $P(A|H_1) = 0,02$. Аналогичные условные вероятности: $P(A|H_2) = 0,01$, $P(A|H_3) = 0,03$. Вероятность того, что извлеченный болт окажется дефектным вычислим по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3)$$

Или подставив значения, получим:

$$P(A) = 0,3 \cdot 0,02 + 0,25 \cdot 0,01 + 0,45 \cdot 0,03 = 0,022$$

10. **Формула Байеса**

Пусть $\Omega = H_1 + H_2 + \ldots + H_n$, $H_i \cap H_j = \varnothing$, т. е. H_i - гипотезы. Дополнительно будем считать, что $P(A) > 0$. Для любого события A по формуле умножения вероятностей (10) получим: $P(AH_i) = P(A)P(H_i|A) = P(H_i)P(A|H_i)$. Из второй части данного соотношения получим вероятность гипотезы H_i при условии, что событие A наступило: $P(H_i|A) = \dfrac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(A)}$. К знаменателю последнего соотношения применим формулу полной вероятности, в результате чего получим формулу Байеса:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(H_k)P(A|H_k)} \tag{3}$$

В этой формуле вероятности $P(H_i)$ называются априорными (т.е. до опыта), а вероятности $P(H_i|A)$ называют апостериорными (т.е. после опыта). Формулы Байеса позволяют переоценить вероятности $P(H_i)$ гипотез на основе данных, полученных после проведения опыта, в результате которого появилось событие A.

Пример 4. В ящике находятся одинаковые изделия, изготовленные на разных автоматических станках, причем 40% изделий изготовлено на первом станке, а остальные – на втором. Брак в продукции первого станка составляет 3%, второго – 2%. Случайно выбранное изделие из ящика оказалось бракованным. Какова вероятность того, что оно изготовлено на первом станке?
Решение. Пусть $A = \{$извлеченное изделие бракованное$\}$. Рассмотрим две гипотезы: H_1=$\{$Изделие изготовлено первым станком$\}$, H_2=$\{$Изделие изготовлено вторым станком$\}$. Условные вероятности: $P(A|H_1) = 0,03$ - вероятность появление брака при условии, что изделие изготовлено на первом станке, $P(A|H_2) = 0,02$ - вероятность появление брака при условии, что изделие изготовлено на втором станке. Априорные вероятности гипотез $P(H_1) = 0,4$ и $P(H_2) = 1 - 0,4 = 0,6$. Извлеченное изделие оказалось бракованным, значит, опыт уже произведен, и событие A произошло. Поэтому можно воспользоваться формулой Байеса

$$P(H_1|A) = \frac{P(H_1)P(A|H_1)}{\sum\limits_{k=1}^{2} P(H_k)P(A|H_k)} = \frac{0,4 \cdot 0,03}{0,4 \cdot 0,03 + 0,6 \cdot 0,02} = 0,5$$

5. Испытания Бернулли

Кроме рассмотренных вероятностных схем (классической, статистической и геометрической) практический интерес представляют последовательности нескольких испытаний – испытания Бернулли.

Определение 3. *Одно испытание Бернулли – это опыт с двумя исходами, например 0 (неудача) и 1 (успех), и имеющими вероятности* $P(1) = p$, $P(0) = 1 - p = q$, *причем* $p + q = 1$. *Исход каждого такого одиночного испытания не зависит от результатов предыдущих одиночных испытаний.*

Примером таких испытаний служит однократное подбрасывание монеты с вероятностями $p = q = \dfrac{1}{2}$ для правильной монеты.

Интерес представляет не одно, а n независимых испытаний.

Определение 4. *Испытания Бернулли - это независимые испытания с двумя исходами и с вероятностью успеха, не меняющейся от испытания к испытанию.*