Лекция 1.
Основы теории упругости

1.1 Основные положения, допущения и обозначения

* Теория упругости имеет целью аналитическое изучение напряженно-деформированного состояния упругого тела. С помощью теории упругости могут быть проверены решения, полученные с использованием допущений сопротивления материалов, и установлены границы применимости этих решений.
* В линейной теории упругости предполагается существование линейной зависимости между составляющими напряжениями и деформациями. Для ряда материалов (резина, некоторые сорта чугуна) такая зависимость даже при малых деформациях не может быть принята: диаграмма $\sigma - \varepsilon$ в пределах упругости имеет одинаковые очертания как при нагружении, так и при разгрузке, но в обоих случаях криволинейна. При исследовании таких материалов необходимо пользоваться зависимостями нелинейной теории упругости.

В математической линейной теории упругости исходят из следующих допущений:

1. О непрерывности (сплошности) среды. При этом структура вещества или наличие каких-либо пустот не учитывается.

2. О естественном состоянии, на основании которого началь ное напряженное (деформированное) состояние тела, возникшее до приложения силовых воздействий, не учитывается, т. е. предполагается, что в момент нагружения тела деформации и напряжения в любой его точке равны нулю.

3. Об однородности, на основании которого предполагается, что состав тела одинаков во всех точках. Если применительно к металлам это допущение не дает больших погрешностей, то в отношении бетона при рассмотрении малых объемов оно может привести к значительным погрешностям.

4. О шаровой изотропности, на основании которого считается, что механические свойства материала одинаковы по всем направлениям.
5. Об идеальной упругости, на основании которого предпола гается полное исчезновение деформации после снятия нагрузки.
6. О линейной зависимости между составляющими деформа циями и напряжениями.
7. О малости деформаций, на основании которого предпола гается, что относительные линейные и угловые деформации малы по сравнению с единицей. Для таких материалов, как резина, или таких элементов, как спиральные пружины, создана теория больших упругих деформаций.

При решении задач теории упругости часто пользуются принципом Сен-Венана: *если внешние силы, приложенные на небольшом участке упругого тела, заменить действующей на том же участке статически эквивалентной системой сил (имеющей тот же главный вектор и тот же главный момент), то эта замена вызовет лишь изменение местных деформаций.*

ВНЕШНИЕ СИЛЫ (нагрузки)

Поверхностные

– результат непосредственного контактного взаимодействия тела с другими телами.

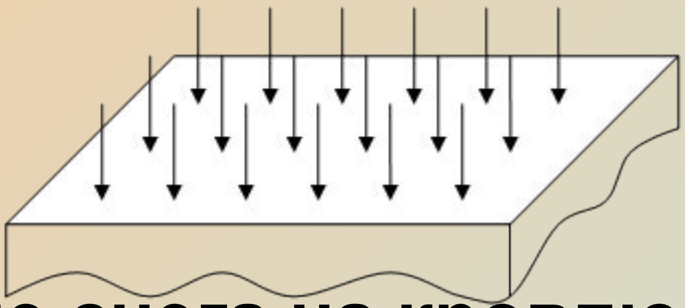
Объемные

приложены к каждой точке объема. Это – собственный вес, центробежные силы, силы магнитного или электрического взаимодействия.

Поверхностные

- распределенные по площади

p



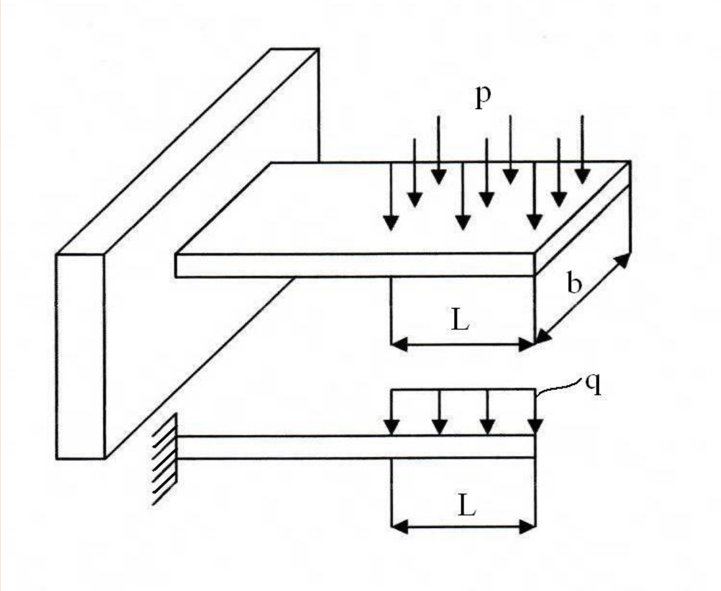
Давление снега на кровлю, давление зерна на дно и стенки силосов, давление воды на плотину и т.д.

Величина нагрузки приходящейся на единицу площади, *называется интенсивностью нагрузки p.*

Размерность p (ед.силы / ед.площади)

Поверхностные

- распределенная по длине (погонная нагрузка)



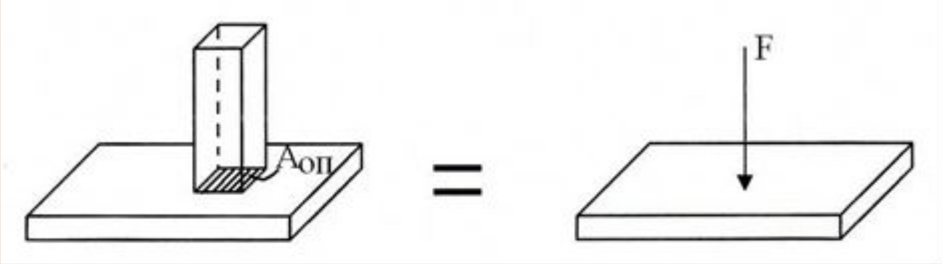
Она характеризуется интенсивностью q – величина нагрузки на единицу длины. Интенсивность погонной нагрузки определяется произведением интенсивности распределенной нагрузки по площади на ширину конструкции $q = p \cdot b$

Размерность q (ед.силы / ед.длины)

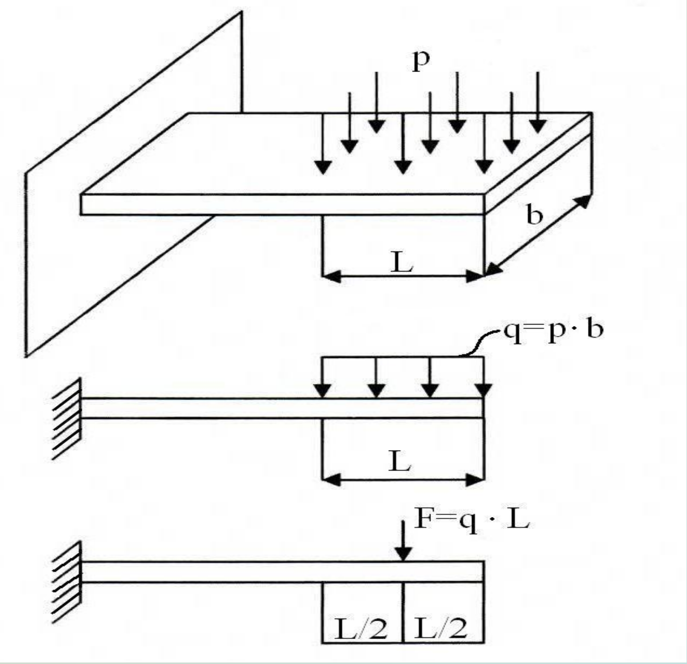
Поверхностные

сосредоточенные силы

передаются на конструкцию через небольшую площадку и условно считают, что они приложены в точке. $A_{оп}$ – величина очень маленькая.



Распределенную нагрузку можно собрать с площади, с длины и заменить ее действие сосредоточенной силой, приложенной по центру тяжести эпюры q.



Объемные нагрузки

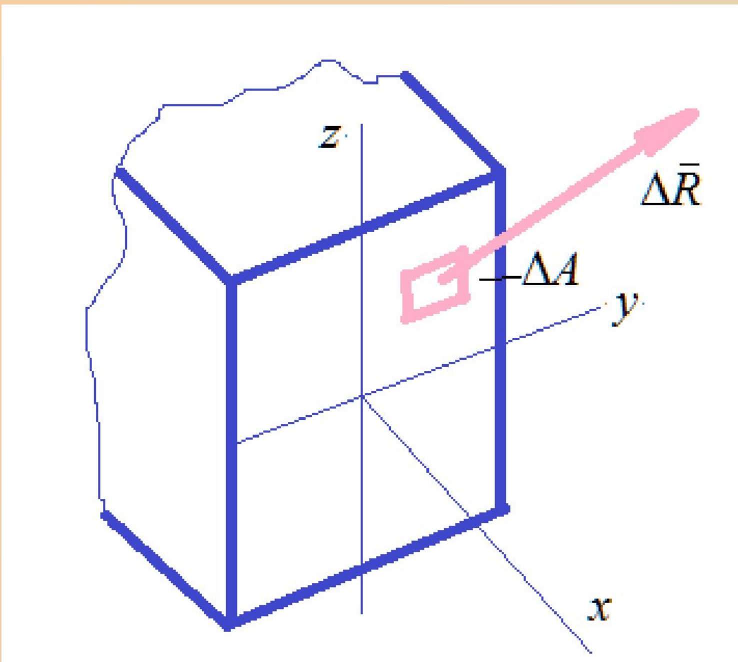
приложены к каждой точке объема. Это – собственный вес, центробежные силы, силы магнитного или электрического взаимодействия.

В зависимости от характера приложения сил во времени различают нагрузки *статические и динамические*.

Статическая нагрузка **прикладывается сравнительно медленно и плавно возрастает от нуля до своего конечного значения. Возникающими при ее действии ускорениями и силами инерции можно пренебречь.**

Динамическая нагрузка **меняет свою величину или направление настолько быстро, что возникающее при этом ускорение создает значительные инерционные силы, которые необходимо учитывать в расчетах.**

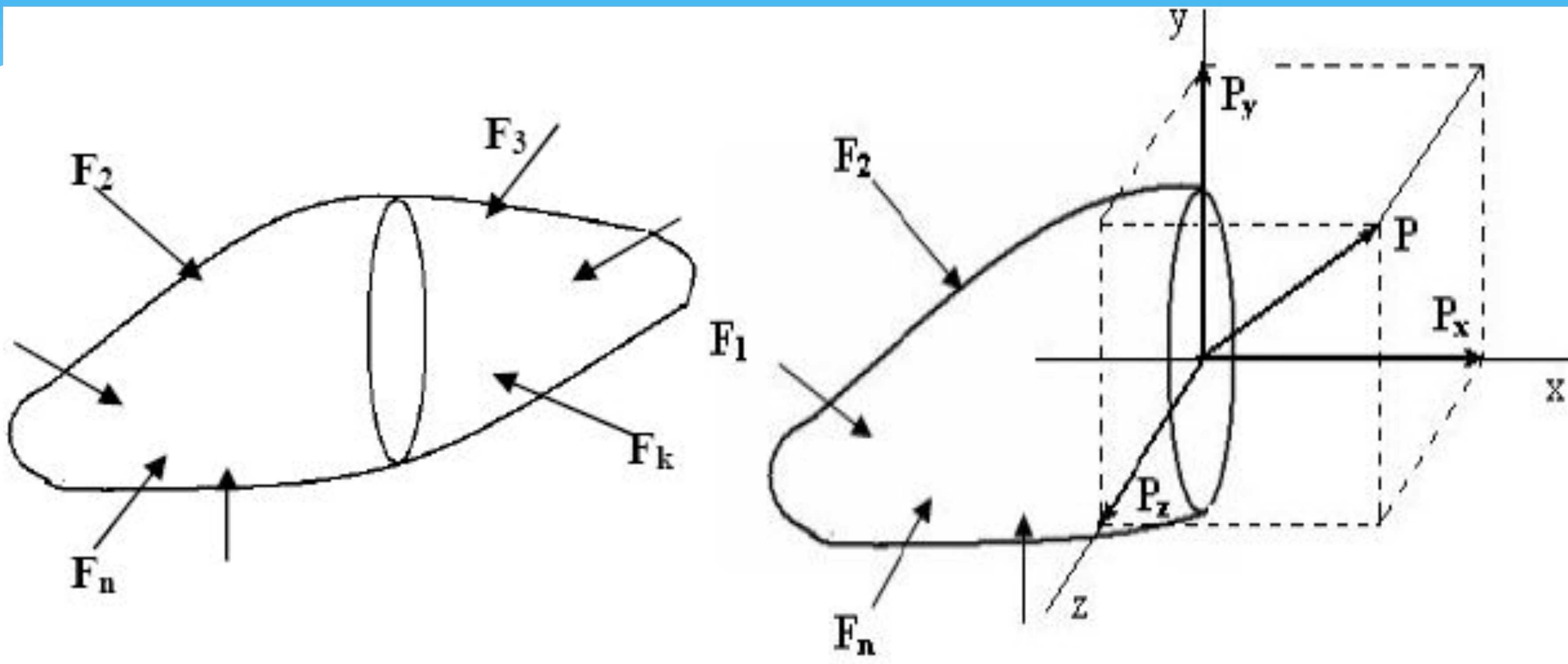
Понятие о напряжениях



Рассмотрим произвольно нагруженный стержень. Применяя метод сечений и проецируя главный вектор и главный момент на координатные оси, получим шесть внутренних усилий. Все эти внутренние усилия были отнесены к центру тяжести сечения.

В действительности внутренние усилия непрерывно распределены по всему сечению. Выделим в точке "А" малую площадку ΔA. Равнодействующая внутренних сил на этой площадке ΔR.

Напряжения в точке деформируемой среды



а) Тело б) Метод сечения

рис. 1

Полное напряжение в точке определяют как предел отношения:

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \Delta P / \Delta A.$$

Нормальное напряжение в точке определяют как предел отношения

$$\sigma_x = \lim_{\Delta A \to 0} \Delta P_x / \Delta A.$$

Касательные напряжения в точке определяют как пределы отношений

$$\tau_{yx} = \lim_{\Delta A \to 0} \Delta P_y / \Delta A.$$

$$\tau_{zx} = \lim_{\Delta A \to 0} \Delta P_z / \Delta A.$$

Вырежем мысленно в произвольной точке рассматриваемого сечения элементарный параллелепипед со сторонами dx, dy и dz и рассмотрим напряжения, действующие на гранях этого параллелепипеда (рис. 2).

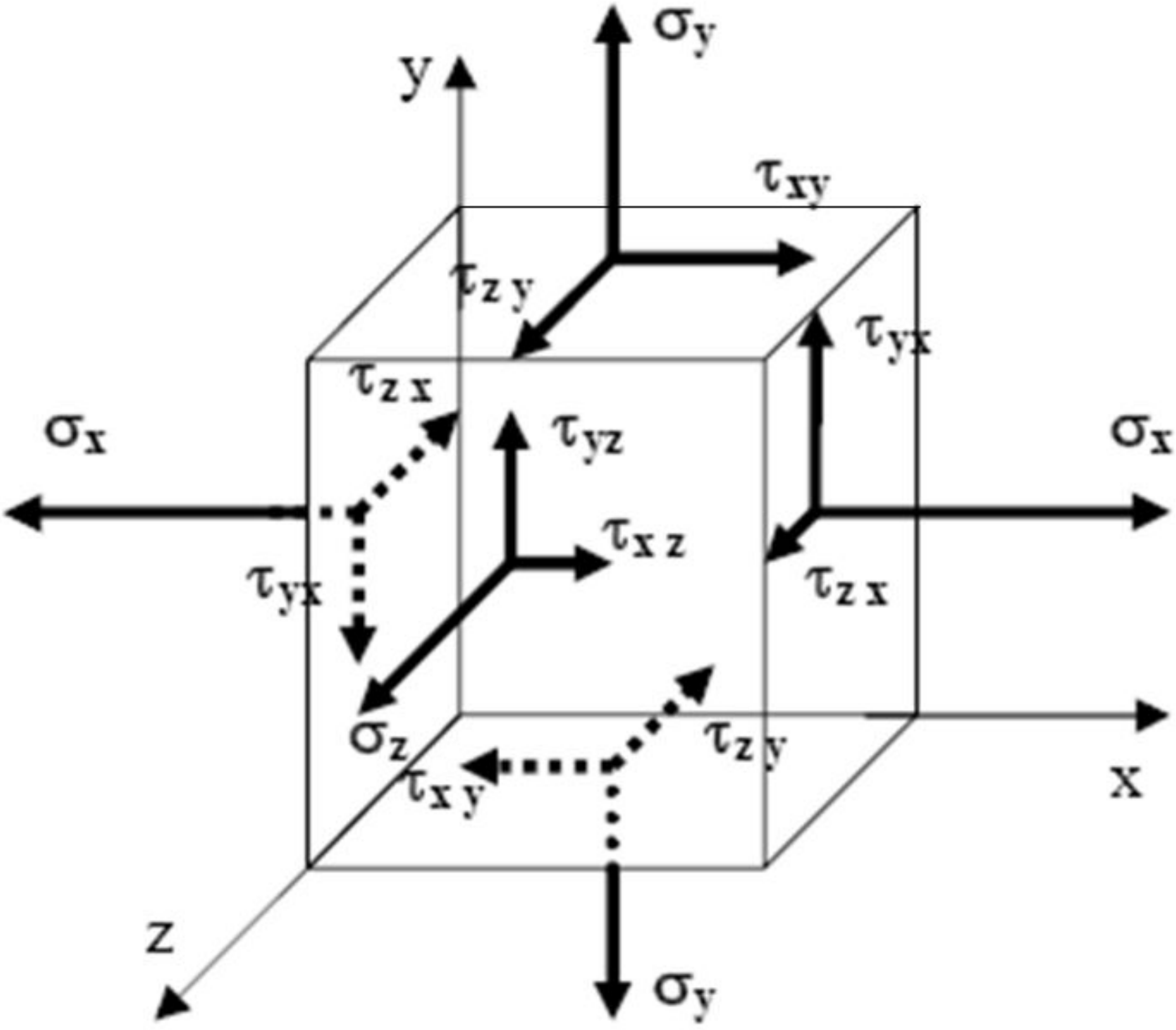


Рис. 2 - Напряжения на гранях элементарного параллелепипеда

Тогда в каждой точке действуют напряжения, которые представляются матрицей, называемой *тензором напряжений*.

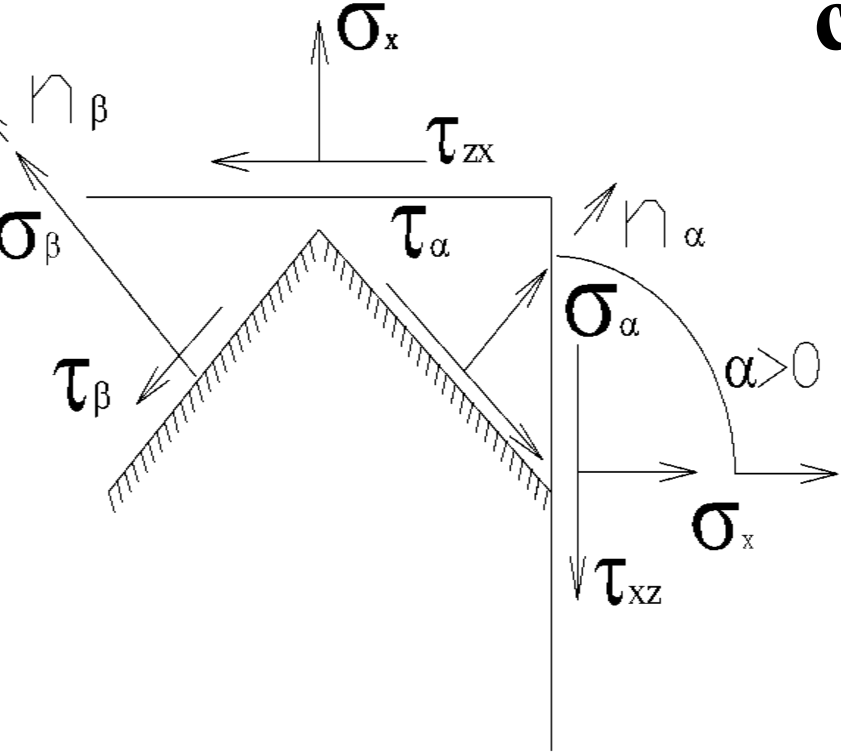
$$T_\sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{Vmatrix}$$

Составляющие тензора напряжений зависят от выбора системы координат.

Правила знаков для составляющих **тензора напряжений**.

1. Нормальные напряжения положительны, если их направление совпадает с направлением внешней нормали;
2. Касательные напряжения будем считать положительными, когда они направлены по осям координат на площадках с внешней нормалью, направленной по оси координат, и когда они направлены против направления осей координат на площадках с внешней нормалью, направленной против направления оси координат.

Соотношения, позволяющие решить задачи плоского напряженного состояния



$$\sigma_\alpha = \sigma_{\mathrm{x}} cos\alpha^2 + \sigma_z sin\alpha^2 - \tau_{xz} sin2\alpha,$$

$$\sigma_\beta = \sigma_x sin^2\alpha + \sigma_2 cos^2\alpha + \tau_{xz} sin2\alpha$$

$$\tau_\alpha = -\tau_\beta = \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} sin2\alpha + \tau_{xz} cos2\alpha.$$

Главные (экстремальные) напряжения вычисляют по формуле

$$\sigma_{\substack{max\\min}} = \frac{\sigma_x+\sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}\ .$$

Максимальные напряжения действует на площадке ближайшей к наклонной площадке с большим нормальным напряжением.

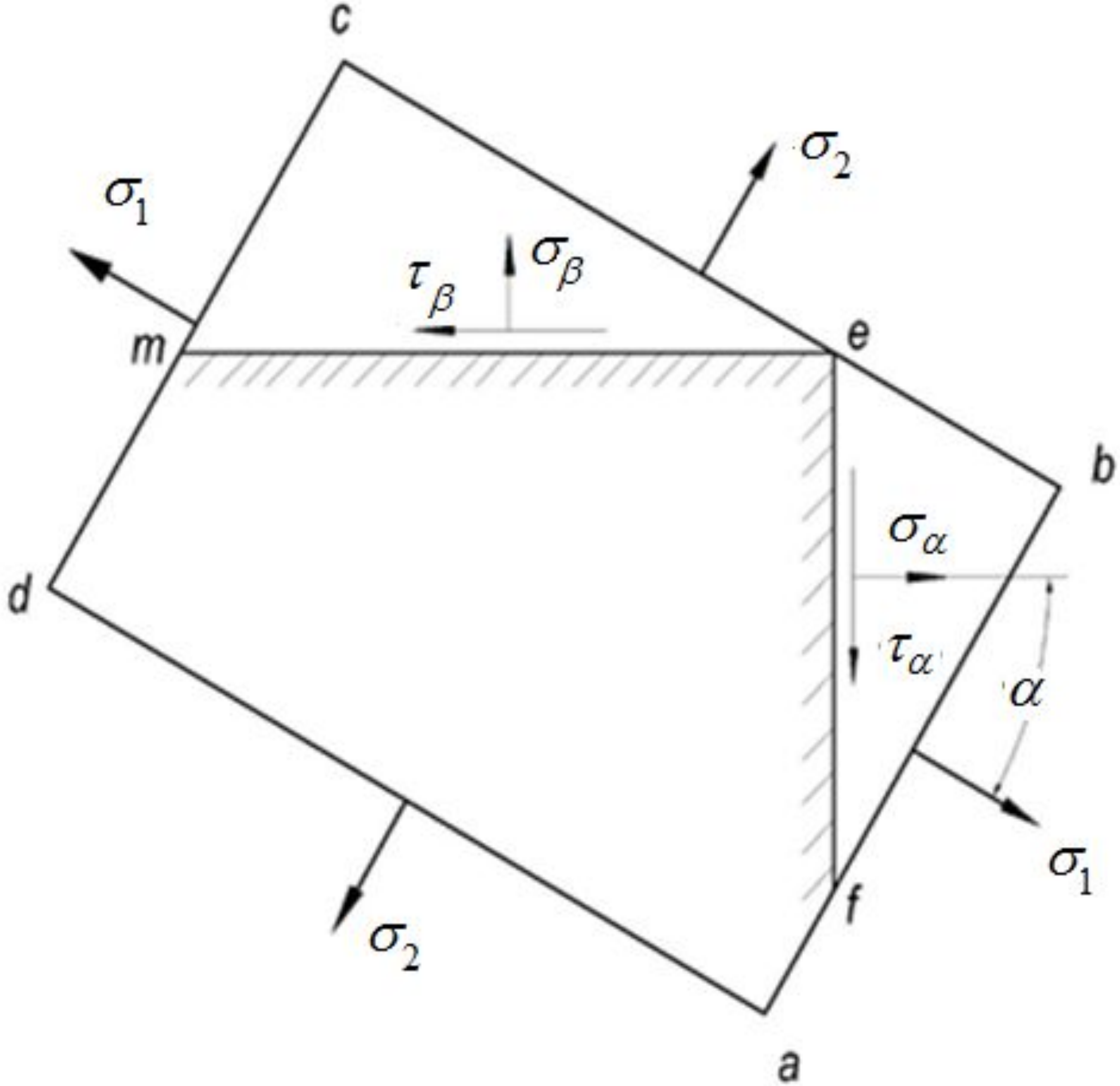
Из сказанного выше следует, что плоское напряженное состояние в точке характеризуется системой трех напряжений, из которых формируется тензор напряжений:

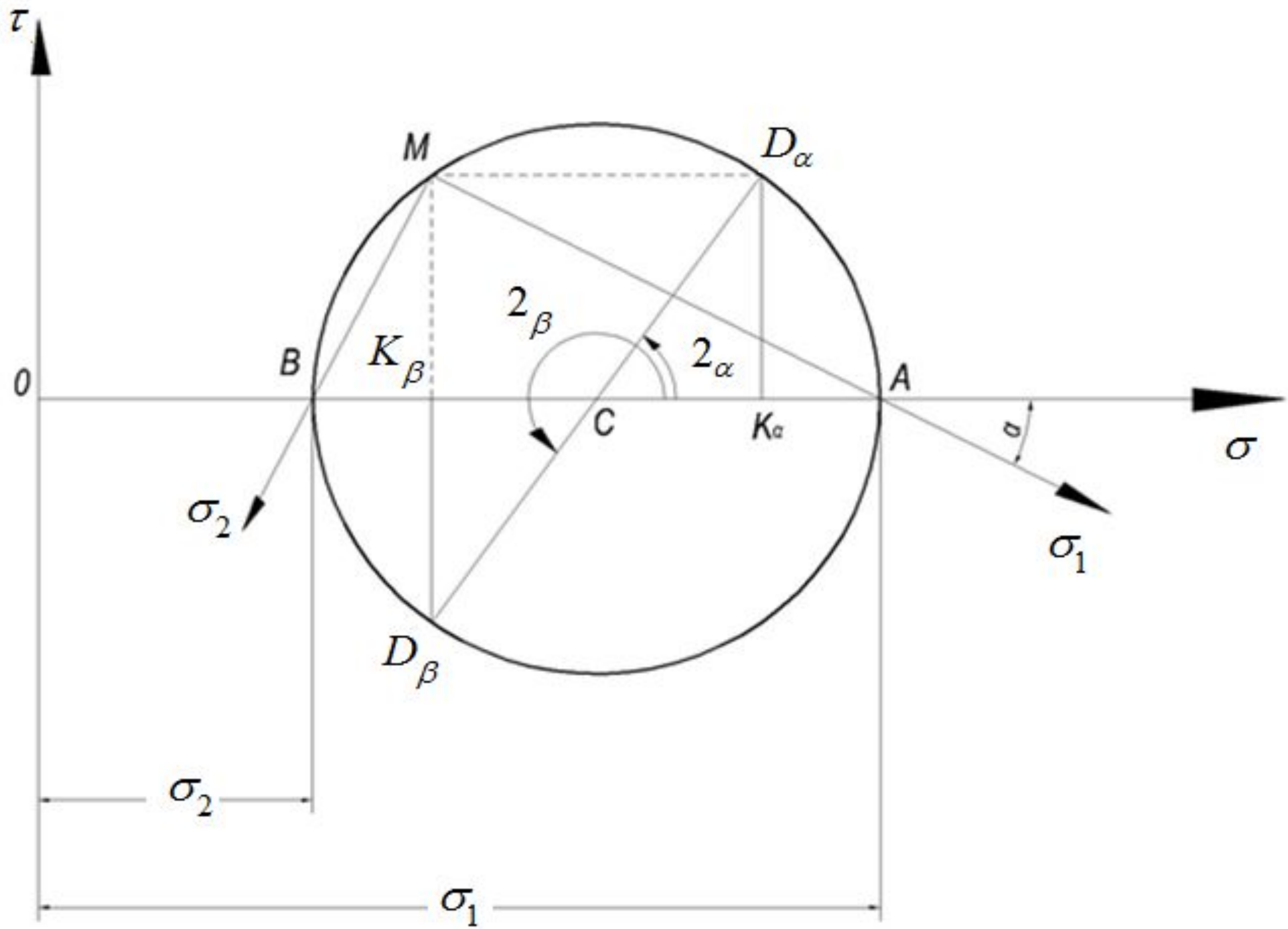
$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_\alpha & \tau_\beta \\ \tau_\alpha & \sigma_\beta \end{vmatrix}$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}\ .$$

Инвариантами тензора напряжений являются такие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} I_\sigma &= \sigma_x + \sigma_z = \sigma_{max} + \sigma_{min} \\ \mathrm{II}_\sigma &= \sigma_x\sigma_z - \tau^2 = \sigma_{max}\sigma_{min} \end{aligned}\right\}$$


c
σ_2
σ_1
τ_β
σ_β
m
e
b
σ_α
d
τ_α
α
σ_1
f
σ_2
a



τ
M
Dα
2β
Kβ
2α
B
0
A
C
Kα
α
σ
σ2
σ1
Dβ
σ2
σ1

Радиус круга

$$R=\frac{\overline{OA}-\overline{OB}}{2}=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}.$$

Поскольку центр круга C лежит посередине между точкам A и B, то

$$\overline{OC}=\frac{\overline{OA}+\overline{OB}}{2}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}.$$

Далее

$$\overline{CK_\alpha}=R\cos2\alpha=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos2\alpha.$$

Тогда абсцисса точки D_α

$$\overline{OK_\alpha}=\overline{OC}+\overline{CK_\alpha}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos2\alpha=$$

$$=\sigma_1\frac{1+\cos2\alpha}{2}+\sigma_2\frac{1-\cos2\alpha}{2}=\sigma_1\cos^2\alpha+\sigma_2\sin^2\alpha\,. \qquad (13)$$

Из треугольника $CD_\alpha K_\alpha$ ордината точки D_α

$$\overline{K_\alpha D_\alpha}=R\sin2\alpha=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin2\alpha. \qquad (14)$$

Напряжение на площадке, перпендикулярной к рассмотренной, найдем, проведя луч под углом $2\beta=2(\alpha+\frac{\pi}{2})=2\alpha+\pi$ и получив в пересечении с окружностью точку D_β. Ордината точки D_β

$$\overline{K_\beta D_\beta}=-\overline{K_\alpha D_\alpha}=-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin2\alpha=\tau_\beta. \qquad (15)$$

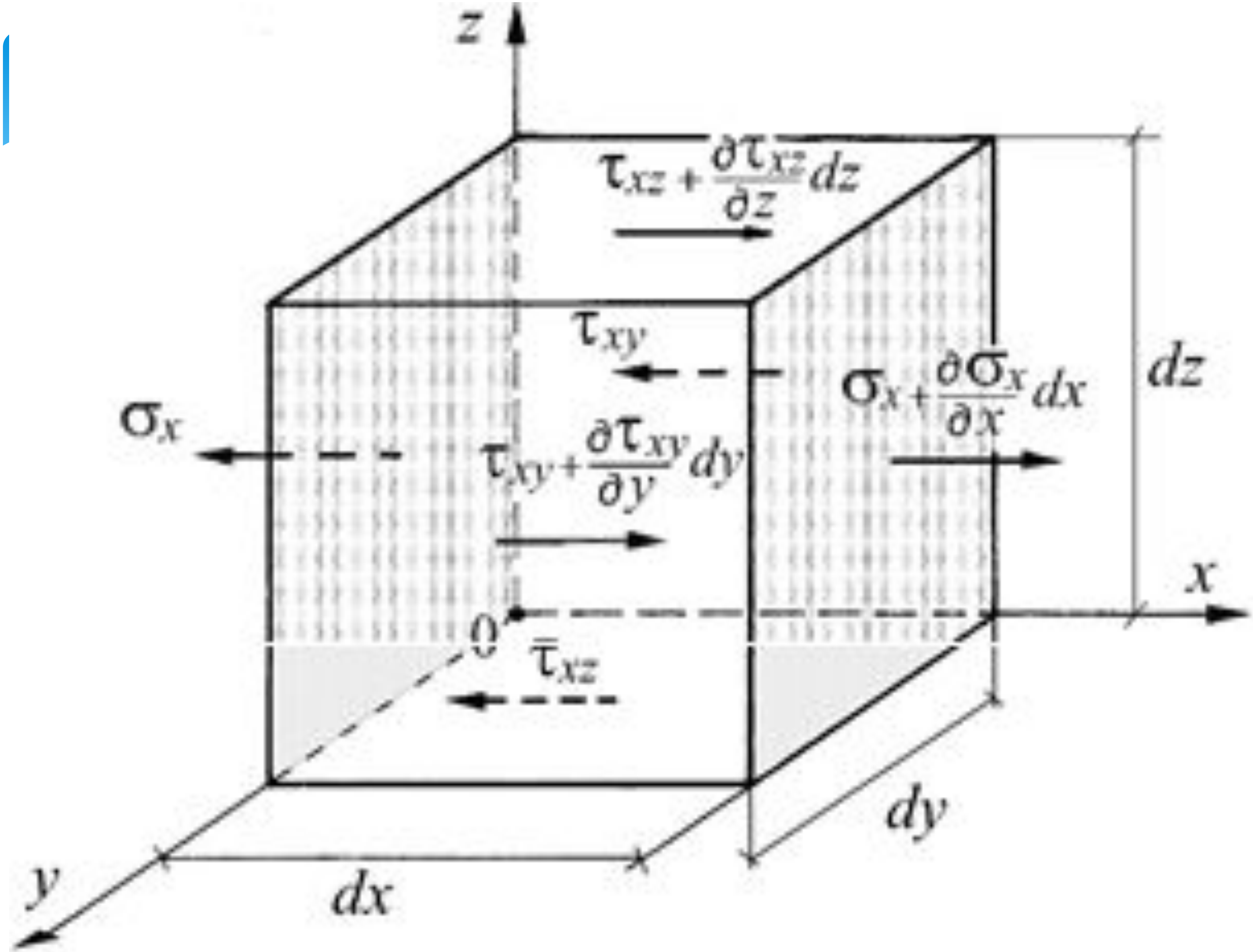
$$\overline{OK_\beta}=\overline{OC}-\overline{CK_\beta}=\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}-\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos2\alpha=\sigma_1\sin^2\alpha+\sigma_2\cos^2\alpha=\sigma_\beta \qquad (16)$$

Сравнивая формулы (13), (14) с формулами (15), (16), видно что

$$\overline{OK_\alpha}=\sigma_\alpha\,;\ \overline{K_\alpha D_\alpha}=\tau_\alpha\,.$$

Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье)

Ввиду бесконечной малости параллелепипеда принято, что напряжения во всём его объёме остаются неизменяемыми (однородное напряжённое состояние). В действительности компоненты тензора напряжений на параллельных гранях, отстоящих друг от друга на бесконечно малом расстоянии, отличаются одно от другого на бесконечно малую величину. Таким образом, как бы ни были близки грани элементарного объёма, имеет место приращение напряжений, пропорциональное расстоянию между гранями и равное частному дифференциалу этого напряжения. Поэтому на рис. изображено уточнённое распределение напряжений на гранях параллелепипеда.



z
$\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz$
τ_{xy}
$\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$
dz
σ_x
$\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy$
x
0
$\bar{\tau}_{xz}$
dy
y
dx

Рассмотрим напряжения, параллельные оси x: $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$

Если на левой грани элемента с координатой $x = 0$ принять напряжение σ_x, то на правой грани, имеющей координату dx, функция σ_x получит приращение $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ равное частному дифференциалу этой функции по аргументу x. В итоге на правой грани параллелепипеда будет напряжение $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$

Аналогично рассуждая, получим выражения для касательных напряжений, а также для напряжений, параллельных осям y и z . Кроме напряжений, на параллелепипед действуют объемные силы, компоненты которых на оси координат будут следующие: $X\,dx\,dy\,dz$, $Y\,dx\,dy\,dz$, $Z\,dx\,dy\,dz$.

При выводе уравнений равновесия проекций сил элементарные силы на поверхностях граней параллелепипеда получаем перемножением напряжений на площади граней. В итоге, после приведения подобных членов и деления на объём $dV = dx\ dy\ dz$, получаем три дифференциальных уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0.$$

Полученные три дифференциальных уравнения равновесия называются *уравнениями Навье.*

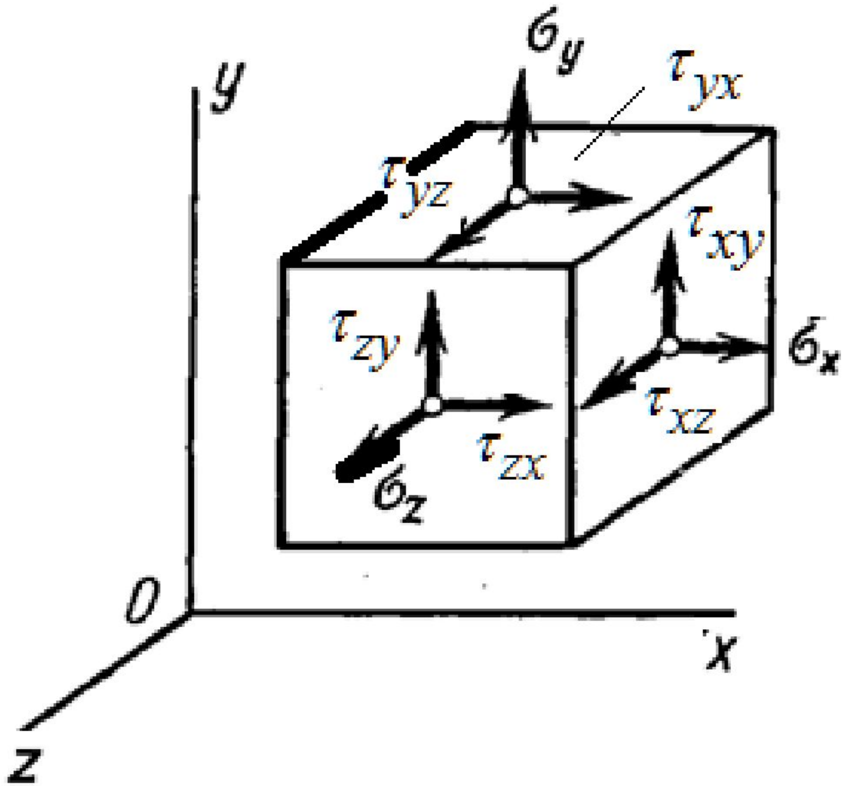
Если для параллелепипеда аналогично расписать три уравнения статики для моментов, то получим соотношения *закона парности касательных напряжений:* $\tau_{xy} = \tau_{yx}$; $\tau_{yz} = \tau_{zy}$; $\tau_{zx} = \tau_{xz}$.

Согласно этому закону по двум взаимно перпендикулярным площадкам составляющие касательных напряжений, перпендикулярные линиям пересечения этих площадок, равны между собой.

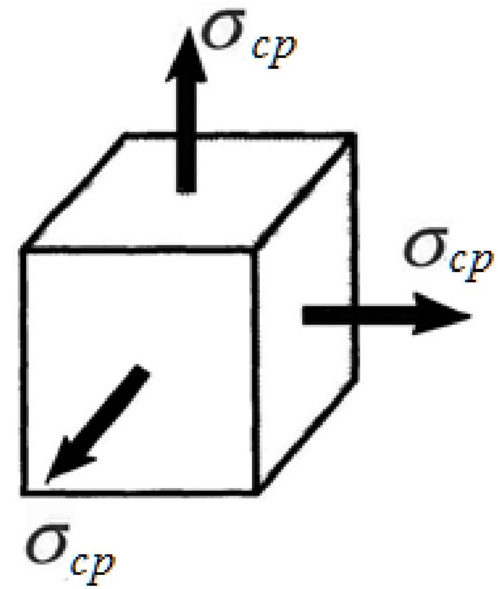
Таким образом, вследствие парности касательных напряжений, вместо девяти неизвестных компонент тензора напряжений, которые характеризуют напряжённое состояние в точке тела и являются функциями координат этой точки, остаётся только шесть. Для отыскания шести неизвестных функций напряжений имеются только три дифференциальных уравнения равновесия. Отсюда следует важный вывод: так как число неизвестных напряжений превышает число уравнений равновесия Навье, то задача теории упругости оказывается статически неопределимой. Недостающие уравнения можно получить, лишь изучая деформации и учитывая физические свойства тела.

Шаровой тензор и девиатор напряжений

Введем понятие шаровый тензор напряжений (уч. Ламе) и девиатор напряжений. Он же предложил ввести понятие среднего напряжения.



=



$$\sigma_{cp} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

Так как тело по-разному сопротивляется равномерному всестороннему давлению и касательным напряжениям, то удобно представить тензор напряжений в виде суммы $T_{\text{Н}} = T_{\text{Ш}} + D_{\text{Н}}$,

$$T_{ш} = \begin{vmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{vmatrix} = \sigma_{cp} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

– *шаровой тензор напряжений*, который характеризует всестороннее растяжение или сжатие (изменяет только объем)

$$D_{н} = \begin{vmatrix} \sigma_{x} - \sigma_{cp} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{y} - \sigma_{cp} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{z} - \sigma_{cp} \end{vmatrix}$$

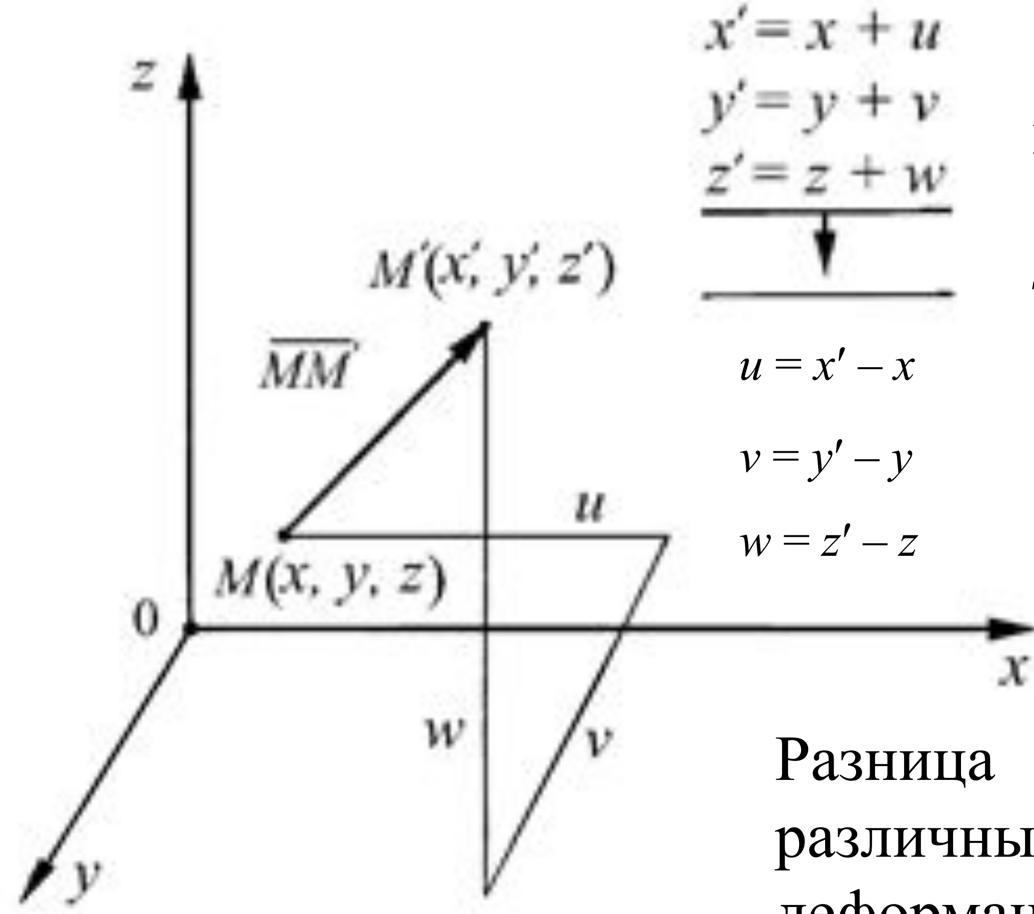
– тензор, характеризующий напряжения сдвига в данной точке и называемый *девиатором напряжений*.

При действии напряжений воображаемый элемент меняет линейные размеры и форму. Тензоры можно складывать и умножать на некоторое постоянное число.

Тензор деформаций. Связь между перемещениями и деформациями (формулы Коши)

Если упругое тело закрепить так, чтобы оно не могло перемещаться как абсолютно твёрдое тело, и приложить внешние нагрузки, то перемещения любой его точки будут вызываться только деформациями этого тела.

Рассмотрим точку $M\ (x, y, z)$. После деформации тела (рис.) точка M переместится в новое положение $M'(x', y', z')$. Обозначим три компоненты (проекции) вектора перемещения MM' на оси координат x , y , z через u , v , w , соответственно.



$$u = x' - x$$

$$v = y' - y$$

$$w = z' - z$$

Компоненты вектора перемещения являются функциями координат точки:

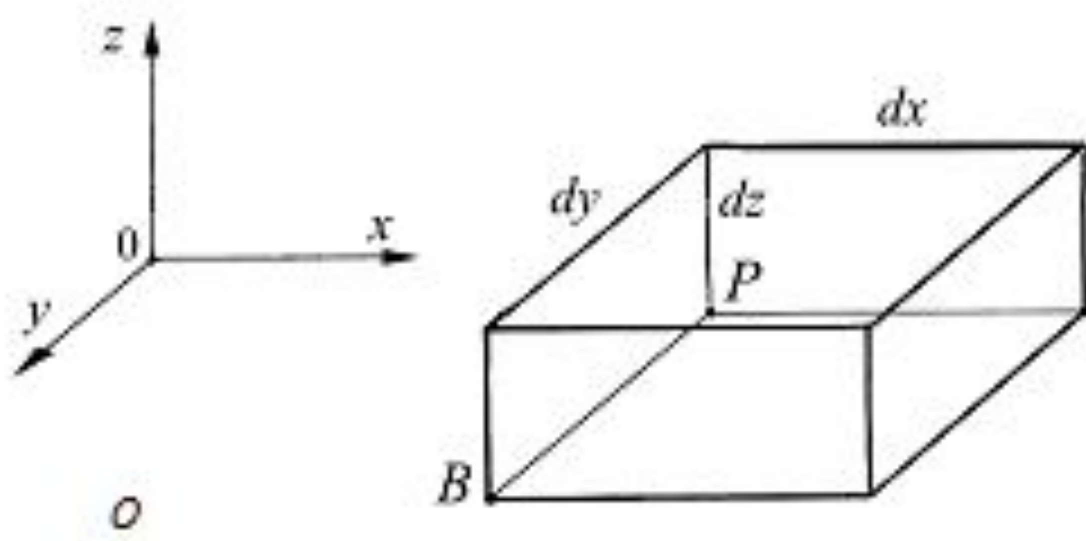
$$u = u(x, y, z)$$

$$v = v(x, y, z)$$

$$w = w(x, y, z)$$

Разница в перемещениях в различных точках тела вызывает его деформацию.

Рассмотрим элементарный параллелепипед с рёбрами dx , dy, dz, вырезанный в окрестности точки P упругого тела до его деформации.



Если тело подвергается деформации и величины u , v , w являются компонентами вектора перемещения точки P, то перемещение в направлении оси x соседней точки A , расположенной на оси x , равно $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$ ввиду возрастания функции перемещения u на величину $\frac{\partial u}{\partial x}dx$

с увеличением на расстояние dx.

Увеличение длины ребра PA , т. е. его абсолютное удлинение, вызванное деформацией, равно $\frac{\partial u}{\partial x}dx$

Тогда *линейная деформация* (*относительное удлинение*) точке P в направлении x представляет собой отношение абсолютного удлинения ребра PA к его исходной длине dx :

$$\varepsilon_x = \frac{\frac{\partial u}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Таким же путём можно показать, что относительные удлинения в точке P в направлениях y *и* z определяются производными $\frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$

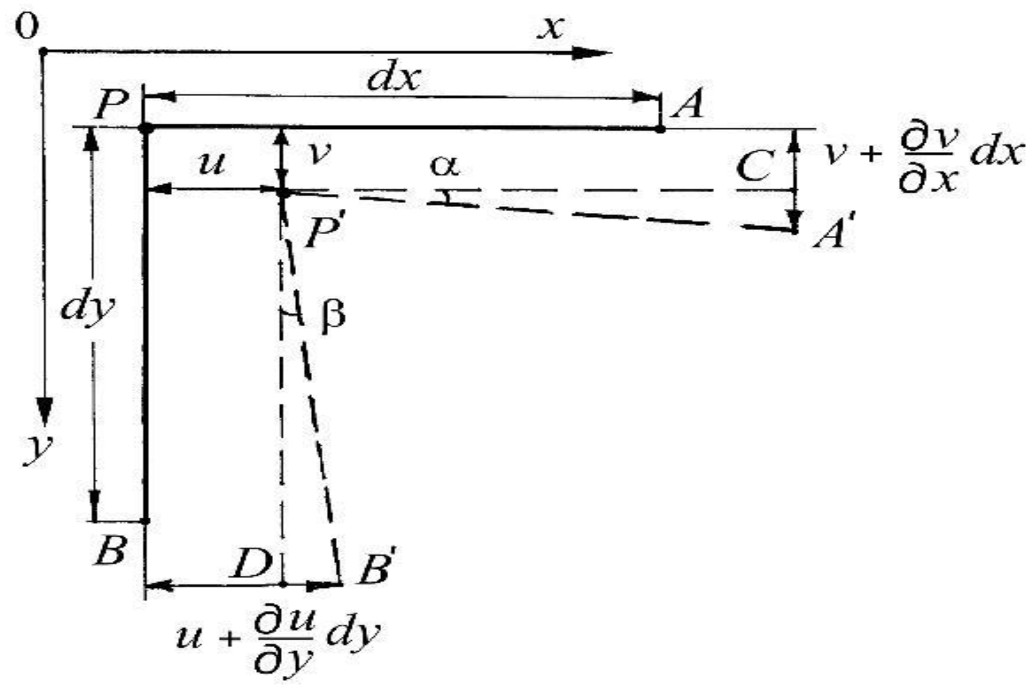
Рассмотрим изменение угла между элементами PA и PB при деформации параллелепипеда.

Пусть точка P получила перемещения u и v в направлении осей x и y, соответственно. Тогда положение этой точки будет P'.

Перемещение точки A в направлении y будет $v+\dfrac{\partial v}{\partial x}dx$

а перемещение точки B в направлении x $u+\dfrac{\partial u}{\partial y}dy$

В итоге новое ∂y направление $P'A'$ ребра PA образует с начальным направлением малый угол α.



Расстояние $A'C = v + \frac{\partial v}{\partial x}dx - v = \frac{\partial v}{\partial x}dx$ Из треугольника $\Delta A P'C$

находим
$$tg\alpha = \frac{A'C}{P'C} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Ограничиваясь рассмотрением малых деформаций, можно полагать, что $tg\alpha \approx \alpha = \frac{\partial v}{\partial x}$

Точно так же направление B' $'$ повёрнуто к направлению *PB* на малый угол β . Аналогично получаем $\beta = \frac{\partial u}{\partial y}$

Отсюда видно, что первоначальный прямой угол *APB* между двумя рёбрами *PA* и *PB* уменьшился на величину $\alpha + \beta$

Эта величина представляет собой *угловую деформацию* (*относительный сдвиг*) между направлениями *x*, *y*

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

Таким же способом можно получить угловые деформации в плоскостях y, z и x, z . В пределе, когда рёбра параллелепипеда стремятся к нулю, получаем формулы для шести функций деформаций в следующих точках:

– *трёх линейных деформаций*:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

– *трёх угловых деформаций:*

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

Полученные уравнения устанавливают связь между функциями перемещений и деформаций. Они называются *формулами Коши*.

Условие совместимости деформаций

Сформулируем определение понятия «деформированное состояние в точке» как совокупность линейных и угловых деформаций для всевозможных направлений осей, проведённых через данную точку. Тогда *тензор деформаций* – это совокупность компонент деформации бесконечно малого объёма (в форме параллелепипеда) в окрестности заданной точки:

$$T_{Д} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}.$$

Правило знаков деформаций : положительным линейным деформациям ε_x ε_y ε_z соответствуют удлинения вдоль осей координат, отрицательным –укорочения; положительным угловым деформациям γ_{xy} γ_{yz} γ_{zx} соответствуют уменьшения углов между положительными направлениями осей; отрицательным – увеличения тех же углов.

Формулы Коши связывают шесть компонент тензора деформаций ε_x ε_y ε_z γ_{xy} γ_{yz} γ_{zx} и три компоненты вектора перемещения – *u, v, w*.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

С помощью этих 3х уравнений можно решить прямую задачу по известным функциям *u (x,y), v (x,y)* и определить 3 функции. Задача решается дифференцированием и имеет единственное решение.

Сложнее обстоит дело с обратной постановкой задачи. Если заданы шесть функций деформаций, то для определения трёх функций перемещений необходимо проинтегрировать шесть дифференциальных уравнений в частных производных, что не всегда можно сделать однозначно. Поэтому между шестью компонентами тензора деформаций должны существовать определённые зависимости.

Для получения этих зависимостей, которые делятся на две группы, необходимо исключить перемещения *u, v, w* из формул Коши.

Обратная задача.

По 3м заданным функциям $\varepsilon_x \; \varepsilon_y \; \gamma_{xy}$ определить функции *u, v.* Задача решается интегрированием и имеет множество решений. В связи с этим получено уравнение совместимости деформаций.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|\frac{\partial^2}{\partial y}$$

Продифференцируем дважды первые два уравнения по y и по x, соответственно. Складывая их почленно, получаем дифференциальное уравнение

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|\frac{\partial^2}{\partial x}$$

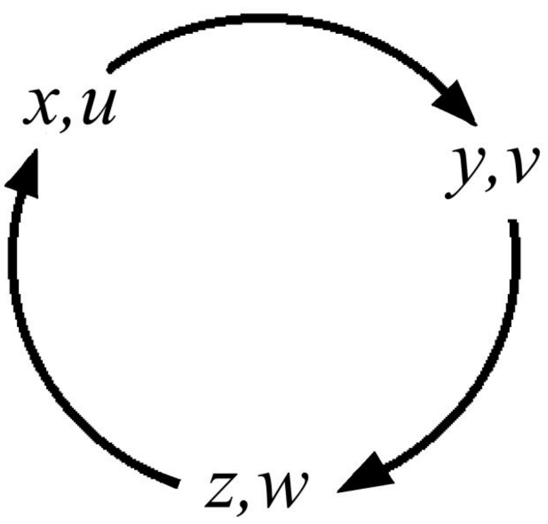
$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

В теории упругости при проведении выкладок часто пользуются круговой подстановкой букв x, y, z и u, v, w



Сделаем такую подстановку в последнем уравнении, и получим два других равенства. Это приводит к первой группе, состоящей из трёх уравнений

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z};$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}$$

1) Если заданы 2 линейные деформации – угловая деформация произвольно назначена не может быть.
2) Если задана угловая деформация, то линейные деформации произвольно не могут быть заданы.

Выводы Сен-Венана.

Обобщённый закон Гука

Английский естествоиспытатель Роберт Гук в 1660 г. открыл закон, названный его именем. Этот закон устанавливает линейную зависимость между упругой деформацией твёрдого тела и приложенным напряжением от внешней нагрузки. Различают закон Гука при растяжении-сжатии и при сдвиге. При растяжении-сжатии нормальное напряжение пропорционально относительному удлинению, т. е.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

При сдвиге касательное напряжение пропорционально угловой деформации: $\tau = G \cdot \gamma$

Из опытов по одноосному растяжению стержня установлен закон, связывающий относительные удлинения (укорочения) в продольном и поперечном направлениях:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x$$

Коэффициент пропорциональности μ называется *коэффициентом поперечной деформации* (*коэффициентом Пуассона*) и представляет собой постоянную величинудля каждого материала.

Обобщенный закон Гука, который рассматривался в предыдущем разделе, при рассмотрении плоской задачи теории упругости имеет две редакции:

-плоское напряженное состояние ($\sigma_2 = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$), вследствие этого имеем:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y);$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x);$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{G};$$

$$\tau_{xy} = \frac{2(1+\mu)}{E}$$

Располагая физическими уравнениями и дифференциальными уравнениями равновесия, условие совместности деформаций можно преобразить к напряжениям. Следует отметить, что в случае постоянных объемных сил уравнение совместности:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

Справедливо как в случае плоского напряженного состояния, так и в случае плоской деформации распределение напряжений будет одним и тем же, если формы контуров и приложенные к ним внешние нагрузки совпадают.

Решение двумерной задачи сводится к интегрированию дифференциальных уравнений равновесия вместе с контурными условиями и уравнением совместности деформаций.

Рассмотрим случай, когда единственной объемной силой является собственный вес, при произвольной ориентации исследуемой области по отношению к координатным осям «x-y» проекции объемной как и ранее, обозначаются X и Y. Уравнения равновесия представляются в таком виде:

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau_{yx}}{\partial y^2}+X=0,\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+Y=0$$

Уравнение совместности, соответственно, деформаций, записанное в напряжении:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

К этим соотношениям добавляются еще условие на контуре

Задача решается достаточно просто, если ввести в рассмотрение новую функцию, так называемою функцию напряжений (функцию Эри). Функции нормальных и касательных напряжений представляется следующими производными от этой новой функции :

$$\varphi = \varphi(x, y)$$

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \text{ и } \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - X * y - Y * x$$

После подстановки этих соотношений уравнение равновесия обращаются в тождества, а уравнение совместности превращается в уравнение четвертого порядка:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$$

Решение этого уравнения должно удовлетворить контурные условия:

$$q_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l + \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - X * y\right) m$$

$$q_{y=} \left(-\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - X\right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m$$

Зависимость между компонентами тензоров деформаций и напряжений

Чтобы установить зависимость между компонентами тензоров деформаций и напряжений при объёмном напряжённом состоянии, выделим из тела элементарный параллелепипед и рассмотрим действие только нормальных напряжений

$$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$$

На основании принципа независимости действия сил находим полные относительные удлинения рёбер параллелепипеда по направлениям трёх координатных осей как сумму относительных удлинений этих рёбер от действия каждого нормального напряжения.

Тогда обобщённый закон Гука для упругого, однородного и изотропного твёрдого тела записывается следующим образом:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right], \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right], \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right], \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$